Analisis Model Matematika *Predator–Prey* Tiga Spesies pada Rantai Makanan dengan Pengaruh Pencemaran di Ekosistem Perairan

Deborah Dicenelsye Marito Sihite [1*], Alya Rizkia Maharani[2], Dina Olivia Nainggolan[3], Angelyca[4], Hamidah Nasution[5], Alvi Sahrim Nasution[6]
[1,2,3,4,5,6] Matematika, Universitas Negeri Medan, Kota Medan, 20221, Indonesia
*Corresponding Author: deborahmarito@gmail.com

Abstrak

Keseimbangan ekosistem perairan dapat dijelaskan secara kuantitatif melalui model matematika predator–prey karena interaksi antarspesies berperan penting dalam menjaga stabilitas rantai makanan. Namun, sebagian besar penelitian terdahulu hanya mempertimbangkan dua spesies dan belum memasukkan pengaruh pencemaran serta aktivitas pemanenan yang dapat memengaruhi dinamika populasi. Penelitian ini mengembangkan model matematika tiga spesies dengan mempertimbangkan efek toksisitas polutan dan pemanenan untuk menganalisis kestabilan sistem ekologi perairan tercemar. Model diformulasikan sebagai sistem persamaan diferensial nonlinier dengan fungsi respon Holling Tipe II yang menggambarkan interaksi antara prey, predator menengah, dan predator puncak. Analisis kestabilan dilakukan secara analitik melalui linearisasi di sekitar titik ekuilibrium, sedangkan simulasi numerik digunakan untuk mengevaluasi pengaruh variasi tingkat polusi terhadap dinamika populasi. Hasil menunjukkan bahwa peningkatan konsentrasi polutan menurunkan kestabilan sistem dan dapat memicu osilasi ekstrem hingga kepunahan salah satu spesies ketika toksisitas melampaui ambang kritis. Temuan ini memberikan dasar kuantitatif bagi strategi pengendalian polusi dan pengelolaan ekosistem perairan yang berkelanjutan guna mencegah ketidakseimbangan ekologis..

Kata kunci: Abstrak; model predator–prey; model tiga spesie; pencemaran lingkungan; kestabilan ekosiste; pemanenan.

Abstract

The balance of aquatic ecosystems can be quantitatively described using a predator–prey mathematical model, as interspecies interactions play a crucial role in maintaining food chain stability. However, most previous studies have focused only on two species and have not incorporated the effects of pollution and harvesting activities that influence population dynamics. This study develops a three-species mathematical model by considering the effects of pollutant toxicity and harvesting to analyze the stability of aquatic ecosystems under contaminated conditions. The model is formulated as a nonlinear differential equation system with a Holling Type II functional response representing interactions among prey, intermediate predators, and top predators. Stability analysis is conducted analytically through linearization around equilibrium points, while numerical simulations are used to evaluate the impact of varying pollution levels on population dynamics. The results indicate that increasing pollutant concentrations reduce system stability and may trigger extreme oscillations leading to the extinction of one species when toxicity exceeds a critical threshold. These findings provide a quantitative foundation for pollution control strategies and sustainable management of aquatic ecosystems to prevent ecological imbalance.

Keywords: Abstract; predator–prey model; three-species model; environmental pollution; ecosystem stability; harvesti.

Citation: Sihite, D. D. M., dkk. (2025). Analisis Model Matematika Predator–Prey Tiga Spesies pada Rantai Makanan dengan Pengaruh Pencemaran di Ekosistem Perairan. *Prodising Seminar Nasional Jurusan Matematika 2025*. 511 – 519.

PENDAHULUAN

Biologi matematika merupakan cabang ilmu yang berperan penting dalam mempelajari sistem dunia nyata, khususnya dalam bidang ekologi. Sistem ekologi merupakan lingkungan kompleks di mana setiap komponennya saling berinteraksi secara nonlinier (Kalra, 2020).. Pendekatan matematis memungkinkan analisis dan prediksi perilaku dinamis dalam sistem tersebut, termasuk kestabilan, periodisitas, hingga kekacauan (chaos) yang dapat terjadi akibat perubahan lingkungan. Salah satu sistem ekologi yang paling penting adalah rantai makanan, yaitu mekanisme aliran energi dan nutrisi dari satu organisme ke organisme lain melalui hubungan makan dan dimakan (Talib 2022). Dalam ekosistem perairan, rantai makanan terdiri atas produsen (fitoplankton), konsumen primer (zooplankton atau ikan kecil), konsumen sekunder (ikan menengah), dan konsumen puncak (seperti hiu atau burung pemangsa) (Talib, Helal, and Naji 2022). Namun, keseimbangan rantai makanan ini sangat bergantung pada kondisi lingkungan perairan yang kini menghadapi ancaman serius akibat pencemaran. Ekosistem perairan di seluruh dunia berada pada titik kritis akibat peningkatan pencemaran multifaset yang mencakup limbah industri, pupuk pertanian, mikroplastik, serta emisi karbon (*Sustainability*, 2023). Menurut Living Planet Report 2024 yang dirilis oleh WWF, populasi ikan air tawar menurun sebesar 81% antara tahun 1970–2020, terutama pada spesies migrasi yang sangat sensitif terhadap perubahan kualitas air. Selain itu, sekitar

25% spesies ikan air tawar telah diklasifikasikan sebagai rentan atau terancam punah oleh IUCN. Di wilayah Asia Tenggara, lebih dari 60% spesies ikan perairan tawar juga terancam punah akibat pencemaran dan degradasi habitat.

Dampak serupa terjadi di perairan laut, di mana polusi logam berat, pestisida, dan eutrofikasi menurunkan kadar oksigen terlarut dan memicu perubahan drastis pada struktur rantai makanan. Ketika kontaminan menurunkan kelangsungan hidup dan reproduksi prey, populasi predator ikut menurun, dan tekanan pada top predator dapat menyebabkan destabilisasi ekosistem serta hilangnya fungsi ekologis penting seperti penyimpanan karbon dan penguraian limbah alami. Kondisi ini tidak hanya mengancam keberlanjutan ekosistem, tetapi juga menimbulkan dampak sosial-ekonomi berupa penurunan hasil perikanan, berkurangnya sumber protein masyarakat pesisir, serta kerugian di sektor pariwisata. Oleh karena itu, diperlukan pendekatan kuantitatif berbasis model matematika untuk mempelajari bagaimana pencemaran memengaruhi interaksi antarspesies dan keseimbangan populasi dalam ekosistem perairan. Dalam konteks tersebut, model matematika predator–prey tiga spesies menjadi alat yang efektif untuk menjelaskan dinamika populasi antarorganisme di lingkungan tercemar. Model ini memungkinkan peneliti mengintegrasikan variabel pencemaran, seperti kadar logam berat atau oksigen terlarut, ke dalam sistem persamaan diferensial yang menggambarkan hubungan antara prey, predator menengah, dan predator puncak (Manaqip, 2021).

Sebagian besar penelitian terdahulu masih berfokus pada sistem predator–prey dua spesies tanpa mempertimbangkan faktor pencemaran dan aktivitas pemanenan yang dapat memengaruhi dinamika populasi serta kestabilan ekosistem perairan (Talib, Helal, and Naji 2022). Selain itu, kajian-kajian sebelumnya umumnya belum mengintegrasikan efek toksisitas polutan secara eksplisit ke dalam model matematika tiga spesies, padahal keberadaan polutan memiliki peranan penting dalam mengubah parameter biologis seperti laju pertumbuhan, tingkat mortalitas, serta interaksi antarspesies (Mustafa, Al-Rudainy, and Salman 2024). Kekosongan penelitian tersebut menunjukkan adanya kebutuhan untuk mengembangkan model yang lebih komprehensif dan realistis dalam merepresentasikan kondisi ekosistem perairan tercemar. Berdasarkan hal tersebut, penelitian ini bertujuan untuk membangun dan menganalisis model matematika predator–prey tiga spesies dengan mempertimbangkan pengaruh pencemaran lingkungan dan aktivitas pemanenan, guna menentukan kondisi kestabilan sistem serta memahami pengaruh variasi tingkat polusi terhadap dinamika populasi antarspesies. Hasil analisis diharapkan dapat memberikan kontribusi teoretis dalam bidang biomatematika sekaligus menjadi dasar kuantitatif bagi upaya pengelolaan dan konservasi ekosistem perairan yang berkelanjutan.

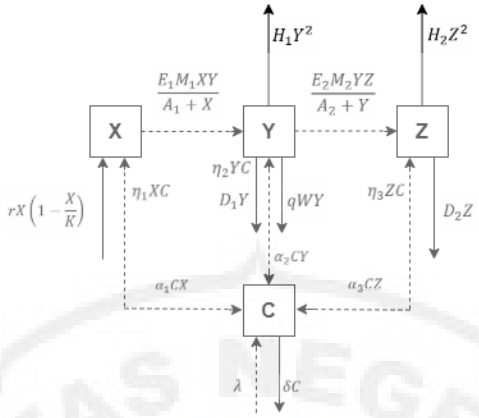
METODE PENELITIAN

Model dasar predator–prey pertama kali diperkenalkan oleh Lotka (1925) dan Volterra (1926) yang menjelaskan interaksi antara populasi prey (mangsa) dan predator. Tanpa adanya predator, populasi prey tumbuh secara logistik, sedangkan predator bergantung sepenuhnya pada keberadaan prey. Model dua spesies ini dapat dituliskan dalam bentuk sistem persamaan diferensial, yang menjadi dasar pengembangan model tiga spesies pada penelitian ini. Fungsi respon menjelaskan laju konsumsi predator terhadap prey pada berbagai tingkat kepadatan prey. Berdasarkan Holling (1959), fungsi respon Tipe II mengikuti bentuk hiperbolik yang menggambarkan bahwa predator memiliki batas maksimum dalam menangkap dan mengonsumsi prey. Fungsinya dinyatakan sebagai persamaan 1.

$$f(x) = \frac{ax}{b+x} \tag{1}$$

di mana a adalah laju maksimum predasi dan b adalah konstanta separuh jenuh. Ketika X kecil, predator banyak menghabiskan waktu untuk mencari mangsa; ketika X besar, waktu lebih banyak digunakan untuk menangani dan mencerna mangsa.

Model ini dibangun dengan beberapa asumsi dasar sebagai berikut; (1) polutan tersebar secara homogen di seluruh wilayah perairan; (2) tidak terdapat migrasi antarspesies ke dalam maupun ke luar sistem; (3) semua parameter bersifat positif dan konstan sepanjang waktu; (4) peningkatan konsentrasi polutan menurunkan laju pertumbuhan prey dan meningkatkan mortalitas predator; (5) aktivitas pemanenan hanya dilakukan pada populasi predator menengah. Asumsi-asumsi tersebut digunakan untuk menyederhanakan sistem tanpa mengurangi karakteristik ekologis utamanya (Talib, Helal, and Naji 2022). Berdasarkan asumsi yang telah dijelaskan sebelumnya, hubungan interaksi antarspesies pada rantai makanan perairan yang melibatkan pengaruh pencemaran dan pemanenan dapat diinterpretasikan dalam bentuk diagram seperti gambar 1. Diagram ini menggambarkan dinamika populasi tiga spesies utama yaitu prey (x), predator (y), predator menengah (Y) dan predator puncak (Z) yang hidup pada satu ekosistem pereiran tercemar dengan keberadaan polutan (C).



Gambar 1. dinamika populasi tiga spesies utama

Gambar 1 menjelaskan; Panah penuh menggambarkan interaksi predasi antarspesies, di mana predator menengah (Y) memangsa prey (x), sedangkan predator puncak (Z) memangsa predator menengah. Panah putus-putus menunjukkan pengaruh toksisitas polutan (C) terhadap populasi masing-masing spesies, yang menurunkan laju pertumbuhan mereka seiring peningkatan konsentrasi polutan. Parameter (λ) menyatakan laju input polutan dari luar sistem, sedangkan $(\delta\ C)$ menggambarkan laju degradasi alami polutan di lingkungan. Aktivitas pemanenan (harvesting) dilakukan terhadap predator menengah (Y) untuk merepresentasikan tekanan eksploitasi dalam ekosistem perairan. Berdasarkan diagram asumsi di atas, sistem interaksi tiga spesies dengan pengaruh pencemaran dan pemanenan dapat diformulasikan sebagai sistem diferensial nonlinier berikut:

$$\frac{dX}{dT} = rX\left(1-\frac{X}{K}\right) - \frac{M_1XY}{A_1+X} - \alpha_1CX \tag{2}$$

$$\frac{dY}{dT} = \frac{E_1M_1XY}{A_1+X} - D_1Y - \frac{M_2YZ}{A_2+Y} - H_1Y^2 - qWY - \alpha_2CY \tag{3}$$

$$\frac{dZ}{dT} = \frac{E_2M_2YZ}{A_2+Y} - D_2Z - H_2Z^2 - \alpha_3CZ \tag{4}$$

$$\frac{dC}{dT} = \lambda - \delta C - \eta_1XC - \eta_2YC - \eta_3ZC \tag{5}$$

Model tersebut menunjukkan bahwa; (1) populasi prey (x) mengalami pertumbuhan logistik dengan laju (r) dan kapasitas dukung (K); (2) predator menengah (Y) memperoleh energi dari konsumsi prey dan kehilangan populasi akibat predasi oleh predator puncak serta akibat aktivitas pemanenan; (3) predator puncak (Z) bergantung pada predator menengah sebagai sumber energi, dan rentan terhadap toksisitas polutan; (4) konsentrasi polutan (C) meningkat akibat input eksternal (λ), namun berkurang karena degradasi alami dan penyerapan oleh organisme air.

Tabel 1. Simbol dan parameter dalam model rantai makanan tiga spesies dengan pengaruh pencemaran pemanenan

Simbol	Definisi	Tipe	Kondisi
$\boldsymbol{X(t)}$	Total populasi prey pada waktu-*t*	variabel	$X \geq 0$
$\boldsymbol{Y(t)}$	Total populasi predator pada waktu-*t*	variabel	$Y \geq 0$
$\boldsymbol{Z(t)}$	Total populasi top predator pada waktu-*t*	variabel	$Z \geq 0$
$\boldsymbol{C(t)}$	Konsentrasi polutan di lingkungan	variabel	$C \geq 0$
$\boldsymbol{r}$	Laju pertumbuhan intrinsik prey	parameter	$r > 0$
$\boldsymbol{K}$	Kapasitas lingkungan untuk prey	parameter	$K > 0$
$\boldsymbol{M_1}$	Maksimum laju konsumsi predator terhadap prey (skala)	parameter	$M_1 > 0$
$\boldsymbol{A_1}$	Konstanta separuh-saturasi Holling II untuk prey	parameter	$A_1 > 0$
$\boldsymbol{E_1}$	Efisiensi konversi energi dari prey ke predator	parameter	$0 < E_1 \leq 1$
$\boldsymbol{M_2}$	Maksimum laju konsumsi top predator terhadap predator	parameter	$M_2 > 0$
$\boldsymbol{A_2}$	Konstanta separuh-saturasi Holling II untuk predator	parameter	$A_2 > 0$
$\boldsymbol{E_2}$	Efisiensi konversi dari predator ke top predator	parameter	$0 < E_2 \leq 1$
$\boldsymbol{D_1}$	Laju kematian alami predator	parameter	$D_1 > 0$
$\boldsymbol{D_2}$	Laju kematian alami top predator	parameter	$D_2 > 0$
$\boldsymbol{H_1}$	Koefisien kompetisi intraspesifik predator	parameter	$H_1 \geq 0$
$\boldsymbol{H_2}$	Koefisien kompetisi intraspesifik top predator	parameter	$H_2 \geq 0$
$\boldsymbol{q}$	Koefisien tanggapan terhadap usaha pemanenan (efektifitas)	parameter	$q \geq 0$
$\boldsymbol{W}$	Usaha pemanenan	parameter	$W \geq 0$
$\boldsymbol{\alpha_1}$	Koefisien toksisitas polutan pada prey (per C)	parameter	$\alpha_1 \geq 0$

$\boldsymbol{\alpha_2}$	Koefisien toksisitas polutan pada predator menengah	parameter	$\alpha_2 \geq 0$
$\boldsymbol{\alpha_3}$	Koefisien toksisitas polutan pada top predator	parameter	$\alpha_3 \geq 0$
$\boldsymbol{\lambda}$	Laju input polutan eksternal (sumber)	parameter	$\lambda \geq 0$
$\boldsymbol{\delta}$	Laju degradasi alami polutan	parameter	$\delta > 0$
$\boldsymbol{\eta_1}$	Laju uptake/penyerapan polutan oleh prey per unit X	parameter	$\eta_1 \geq 0$
$\boldsymbol{\eta_2}$	Laju uptake polutan oleh predator per unit Y	parameter	$\eta_2 \geq 0$
$\boldsymbol{\eta_3}$	Laju uptake polutan oleh top predator per unit Z	parameter	$\eta_3 \geq 0$

Untuk memudahkan analisis matematis, sistem di atas kemudian ditrasformasikan menjadi bentuk tak berdimensi (nondimensional form) dengan distribusi persamaan 6.

$$x = \frac{X}{K};\ y = \frac{Y}{KE_1}; z = \frac{Z}{KE_1E_2}; \text{dan } c = \frac{\alpha_1 K}{r}C \tag{6}$$

Sehingga diperoleh sisitem nondimensional sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{a_1xy}{1+b_1x} - \alpha_1 cx \tag{7}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a_1xy}{1+b_1x} - d_1y - \frac{a_2yz}{1+b_2y} - h_1y^2 - py - \alpha_2 cy \tag{8}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{a_2yz}{1+b_2y} - d_2z - h_2z^2 - \alpha_3 cz \tag{9}$$

$$\frac{dc}{dt} = \lambda - \delta c - \eta_1 xc - \eta_2 yc - \eta_3 zc \tag{10}$$

$$r = \{(x,y,c) \in \mathbb{R}^4 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, c \geq 0\} \tag{11}$$

Analisis dilakukan pada domain biologis $r = \{(x,y,z,c) \in R^4 : x,y,z,c \geq 0\}$. Solusi model tetap non-negatif untuk semua waktu $\tau \geq 0$ (invariansi positif). Dengan bentuk nondimensional ini, jumlah parameter berkurang sehingga analisis kestabilan dapat dilakukan lebih sederhana tanpa mengubah sifat dinamik sisitem.

Analisis terhadap model tiga spesies dengan pengaruh pencemaran dan pemanenan dilakukan melalui pendekatan matematis dan numerik untuk memperoleh karakteristik kestabilan sistem. Langkah-langkah analisis meliputi penentuan titik ekuilibrium, analisis kestabilan lokal, serta simulasi numerik untuk memvisualisasikan dinamika populasi. Titik ekulibrium diperoleh dengan mensubsitusikan $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = \frac{dc}{dt} = 0$. Pada persaan diferensial nonlinierhasil formulasi model. Langkah ini menghasilkan sisitem aljabar nonlinier yang menggambarkan kondisi keseimbangan antarspesies pada ekosistem perairan tercemar. Hasil penyelsesaian sistem tersebut memberikan bebebrapa titik ekuilibrium yang dapat diklasifikasikan menjadi; (1) titik trivial (E_0)seluruh populasi bernilai nol, menggambarkan kepunahan total; (2) titik semi-trivial (E_1, E_2) hanya sebagian spesies bertahan hidup, misalnya hanya prey atau prey dan predator menengah; (3) titik koeksistensi (E^*) semua spesies dan polutan berada pada nilai positif, merepresentasikan kondisi ekosistem yang seimbang. Titik-titik ekuilibrium tersebut kemudian menjadi dasar dalam analisis kestabilan sistem.

Penentuan kestabilan sistem dinamik di sekitar tiap titik ekulibrium, dilakukan literasi dengan membentuk matriks Jacobian (J) dari sisitem persamaan diferensial sebagai persamaan 12.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial c} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial c} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} & \frac{\partial f_3}{\partial c} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x} & \frac{\partial f_4}{\partial y} & \frac{\partial f_4}{\partial z} & \frac{\partial f_4}{\partial c} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Nilai eigen λ_i dari matriks Jcobian digunakan untuk menentukan sifat kestabilan lokal dari titik ekulibrium; (1) jika seluruh $(R_e\lambda_i < 0)$, maka sistem stabil asimtotik; (2) jika terdapat $(R_e\lambda_i > 0)$, sistem menjadi tidak stabil; (3) jika $(R_e\lambda_i = 0)$, sistem berada pada kondisi batas kestabilan (neutral equilibrium).

Analisis ini memberikan dasar teoritis untuk memahami apakah ekosistem perairan akan mencapai keseimbangan stabil, mengalami osilasi populasi, atau menuju kepunahan sebagian spesies. Simulasi numerik dilakukan untuk memverifikasi hasil analisis teoretis dan menggambarkan perilaku dinamis populasi dari waktu ke waktu. Perhitungan numerik dilakukan menggunakan Google Colab dengan bahasa Python, memanfaatkan pustaka SciPy melalui metode Runge-Kutta orde 4 untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial. Langkah-langkah simulasi meliputi: (1) menetapkan parameter awal berdasarkan literatur (Talib, Helal, and Naji 2022); (2) menentukan kondisi awal

$(x(0), y(0), z(0), c(0))$; (3) menjalankan integrasi numerik dalam rentang waktu (t = 0) hingga (t = 400); (4) menganalisis pengaruh variasi parameter toksisitas $(\propto_i)$dan input polutan (λ) terhadap kestabilan populasi; (5) menampilkan hasil simulasi dalam bentuk grafik time series, phase portrait, dan parameter sweep untuk melihat perubahan nilai tunak (steady-state).

Kemudian interpretasi ekologis, setiap hasil simulasi kemudian diinterpretasikan dalam konteks ekologi perairan. Jika sistem mencapai kondisi tunak yang stabil, maka ekosistem dianggap berada dalam keadaan seimbang. Sebaliknya, apabila hasil menunjukkan osilasi atau kepunahan sebagian spesies, maka hal ini menunjukkan adanya gangguan ekologis akibat peningkatan polusi atau aktivitas pemanenan berlebih. Interpretasi ini digunakan untuk mengidentifikasi parameter kritis yang menentukan kestabilan ekosistem dan memberikan dasar ilmiah bagi pengendalian polusi dan pengelolaan sumber daya perairan berkelanjutan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan model nondimensional yang diperoleh pada bagian metode, sistem tiga spesies predator-prey dengan pengaruh pencemaran memiliki empat titik kesetimbangan utama; (1) $(E_0 = 0{,}0{,}0, c_0)$: kondisi kepunahan total, tidak stabil karena prey dapat tumbuh logistik dari nom; (2) $(E_x = x^*, 0{,}0, c^*)$: hanya prey yang bertahan (prey-only equilibrium); (3) $(E_{xy} = x^*, y^*, 0, c^*)$: prey dan predator menengah koeksis, predator puncak lenyap; (4) $(E_{xyz} = x^*, y^*, z^*, c^*)$: semua spesies koeksis. Kestabilan lokal di sekitar setiap ekuilibrium ditentukan melalui linearisasi sistem dan analisis tanda bagian real nilai eigen matriks Jacobian. Hasil analisis menunjukkan; (1) (E_0) selalu tidaka stabil karena pertumbuhan prey positif di sekitar nol; (2) (E_x) stabil bila predator menengah tidak mampu menginvasi, yaitu $(\lambda_y < 0)$; (3) (E_{xy}) stabil bila predator puncak gagal menginvasi $(\lambda_z < 0)$; dan (4) (E_{xyz}) stabil jika seluruh nilai eigen memiliki bagian real negatif, yang tercapai saat panen toksisitas rendah. Dengan demikian keseimbangan sisitem ditentukan oleh dua syarat invasi utama, yaitu:

$$\lambda_Y = \frac{a_1 x^*}{1 + b_1 x^*} - (d_1 + h + \propto_2 c^*) = 0, \text{dan } \lambda_z = \frac{a_2 x^*}{1 + b_2 x^*} - (d_2 + \propto_3 c^*) = 0, \quad (13)$$

Kedua persamaan ini menghasilkan ambang kritis (h_c) dan (λ_c) yang menandai transisi antar zona kestabilan sisitem.

Model nondimensional memberikan kemudahan untuk meninjau pengaruh relatif dan panen (h) dan populasi (λ) terhadap populasi. Parameter dasar yang digunakan dalam simulasi ditampilkan pada tabel 1, yang mencakup laju pertumbuhan alami (a_i), efisien transfer energi (e_i), tingkat toksisitas $(\propto_i)$, laju degrasi polusi (δ), dan koefisien serapan biotik (η_i). Parameter ini memastikan semua spesies nilai tunak positif pada kondisi awal, sehingga analisis kestabilan dan simulasi numerik dapat dilakukan secara valid.

Ekuilibrium Trival $\left(E_0\left(0{,}0{,}0, \frac{\lambda}{\delta}\right)\right)$, nilai eigen Jacobian: $\lambda_1 = 1 - \alpha_1 \frac{\lambda}{\delta}, \lambda_2 = -\left(d_1 + h + \alpha_2 \frac{\lambda}{\delta}\right), \lambda_3 = -\left(d_2 + h + \alpha_3 \frac{\lambda}{\delta}\right), \lambda_4 = -\delta.$ Kestabilan terjadi jika semua bernilai negtif. Karena $(\lambda_i > 0)$ ketika $\left(\lambda < \frac{\delta}{\propto_1}\right)$, sistem tidak stabil yang berrati prey akan tumbuh dilingkungan dengan polusi rendah. Sedangkan untuk Ekuilibrium Prey Saja $E_x(x^*, 0{,}0, c^*)$, Predator menengah dapat menginvasi jika: $\lambda_Y = \frac{a_1 x^*}{1+b_1 x^*}(d_1 + h + \propto_2 c^*) = 0.$ Bila nilai tersebut negatif, predator menengah tidak bertahan. Kondisi batas menghasilkan ambang penerimaan kritis: $h_c = \frac{a_1 x^*}{1+b_1 x^*} - d_1 + \propto_2 c^*.$ Predator puncak dapat menginvasi sisitem dua tofik bila: $\lambda_z = \frac{a_2 x^*}{1+b_2 x^*} - (d_2 + \propto_3 c^*) = 0.$ Nilai ambang pencemaran kritis dapat ditentukan sebagai: $\lambda_{c,Z} = \frac{\delta}{\propto_3}\left(\frac{a_2 y^*}{1+b_2 y^*}\right) - d_2$, sehingga menunjukkan bahwa peningkatan populasi membesar toksisitas efektif dan menurunkan kestabilan predator puncak. Kestabilan titik koeksistensi penuh diuji menggunakan keriteria Rounth-Hurwitz. Koefisien (A_1, A_2, A_3) dari karakteristik polinomial Jacobian memenuhi: $(A_1 > 0, A_2 > 0, A_3 > 0)$. Namun peningkatan polusi (λ) manaikkan $(\propto_i c^*)$, yang dapat menyebabkan pelanggaran $(A_3 > 0)$. kondisi ini menunjukkan potensi munculnya osilasi Hopf dan perubahan dinamika menuju perilaku non-stabil (limit cycle atau chaos), sebagaimana diamati pada model Hastings-Powell.

Dari analisis kestabilan, dua parameter pengendali utama sisitem adalah: $h_c = \frac{a_1 x^*}{1+b_1 x^*} - d_1 - \propto_2 c^*, \lambda_c = \frac{\delta}{\propto_1}(1 - d_1 - h)$; Bila$(h > h_c)$, predator menengah punah; Bila $(\lambda > \lambda_c)$, bahkan predator puncak tidak bertahan; dan Kombinasi keduanya mempersempit domain kestabilan hingga hanya menyisakan populasi prey. Analisis kestabilan di sekitar (E_x) memberikan ambang pemanenan kritis (h_c) bagi predator menengah (Y), sedangkan analisis di sekitar

(E_{XY}) menghasilkan ambang pencemaran kritis (λ_c) bagi predator puncak (Z). Dengan parameter dasar yang digunakan, hasil numerik memberikan $h_c \approx 0.7038$ dan $\lambda_c \approx 1.202$. Ambang (λ_c, Z) tidak muncul pada parameter dasar (tidak ada perubahan tanda (λ_Z) sepanjang interval yang diuji). Sensivitas sistem terhadap perubahan (λ) juga dihitung menghasilkan: $\frac{\partial \lambda_Y}{\partial \lambda} \approx -0.6425, \frac{\partial \lambda_Z}{\partial \lambda} \approx -1.608$. Nilai negatif menunjukkan bahwa peningkatan pencemaran menurunkan kemampuan invasi predator; efeknya lebih kuat pada predator puncak. Hasil ambang dan sensitivitas ini ditampilkan pada Tabel 3.

Tabel 3. Hasil ambang dan sensitivitas

Parameter	Nilai	Keterangan
h_c	0.7038	Ambang panen kritis predator menengah
λ_c	1.202	Ambang polusi kritis terhadap invasi Y
λ_c, Z	-	Tidak muncul pada parameter dasar
$\frac{\partial \lambda_Y}{\partial \lambda}$	-0.6425	Sensitivitas Y terhadap polusi
$\frac{\partial \lambda_Z}{\partial \lambda}$	-1.608	Sensitivitas Z terhadap polusi

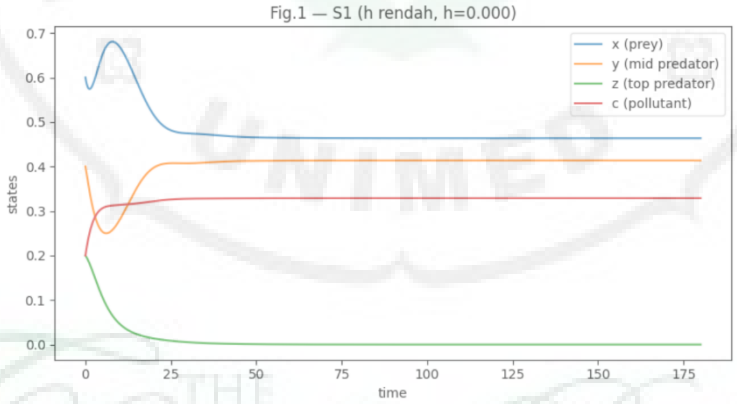
Ruang parameter (h, λ) membentuk tiga zona perilaku:

Tabel 4. Zoba Perilaku Parameter

Zona	Kondisi Matematis	Keadaan Ekologis
I	$(h < h_c \lambda), (\lambda < \lambda_c, Z)$	Koeksistensi penuh (semua spesies stabil)
II	$(h < h_c \lambda), (\lambda > \lambda_c, Z)$	Predator puncak punah
III	$(h < h_c \lambda), (\lambda > \lambda_c)$	Hanya prey yang bertahan

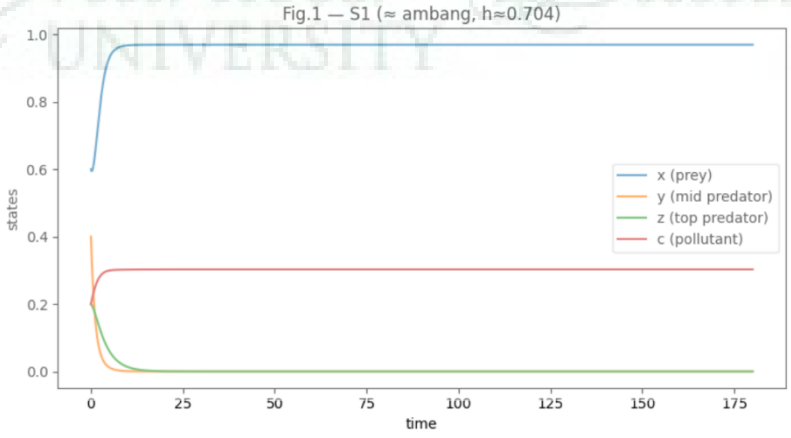
Diagram ini menjelaskan hubungan negatif antara eksploitasi (harvesting) dan pencemaran - semakin tinggi polusi, semakin kecil nilai pemanenan yang dibutuhkan untuk menyebabkan ketidakstabilan.

Simulasi dilakukan menggunakan integrator Runge-Kutta orde 4 dengan langkah waktu $\Delta t = 0.02$ dan horizon $T = 200$. Set parameter dasar digunakan untuk semua skenario. Pada seknario $S1$, nilai (λ) dijaga tetap sedangkan (h) disapu dari 0 hingga $2 \times (h_c)$. Hasil gambar 1 dan tabel 2menunjukkan: $(h \ll h_c) \rightarrow$ sistem berada pada zona I (koeksistensi XYZ). Semua spesies stabil, polutan c menurun moderat karena diserap oleh biomassa.



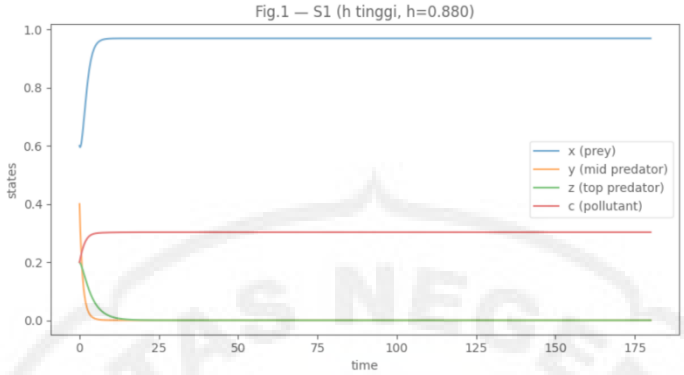
Gambar 1. Skenario $S1(h \ll h_c)$

$(h \approx h_c) \rightarrow$ predator Y mulai runtuh; Z menghilang setelah kehilangan sumber makanan. Zona bergeser dari I ke II.



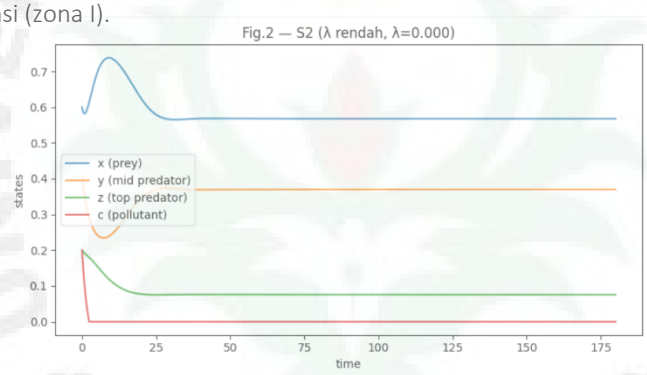
Gambar 2. Skenario $S1$ $(h \approx h_c)$

$(h \geq 1.25h_c - 2h_c) \rightarrow$ hanya prey yang bertahan (X-only, zona III). Populasi X mendekati nilai tunak logistik terkoreksi toksisitas$(1 - \propto_1 c)$.



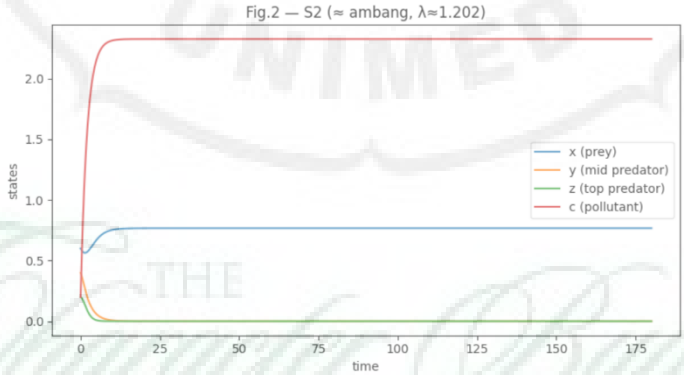
Gambar 3. Skenario $S1$ $(h \geq 1.25h_c - 2h_c)$

Secara matematis, (h_c) bertindak sebagai titik bifurkasi transkritikal, memindahkan kestabilan dari (E_{XYZ}). ke (E_X). Fenomena ini divisualisasikan pada Gambar 1 (kurva waktu) dan tercermin dalam klasifikasi zona pada Tabel 2. Dalam skenario $S2$, h dipertahankan tetap dan (λ) disapu lewat (λ_c). Hasilnya gambar 2, tabel 2 :Untuk $(\lambda < \lambda_c) \rightarrow$ semua spesies berkoeksistensi (zona I).



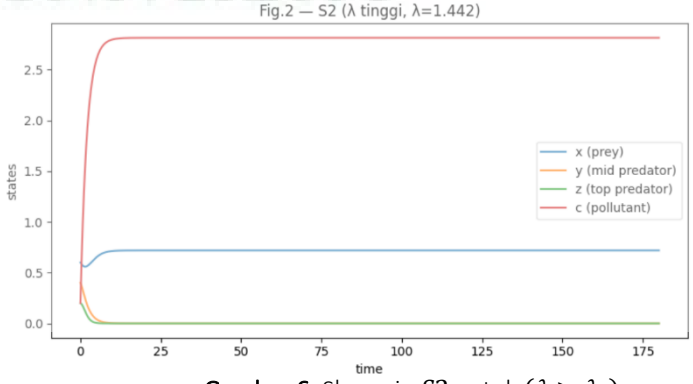
Gambar 4. Skenario $S2$ $(\lambda < \lambda_c)$

Mendekati $(\lambda_c) \rightarrow$ predator Z menurun drastis diikuti Y, seiring meningkatnya toksisitas c.



Gambar 5. Skenario $S2$ mendekati (λ_c)

Untuk $(\lambda > \lambda_c) \rightarrow$ hanya X yang bertahan (zona III); c meningkat karena berkurangnya serapan biotik.



Gambar 6. Skenario $S2$ untuk $(\lambda > \lambda_c)$

Polusi bekerja sebagai mortalitas efektif yang meningkatkan faktor $(\propto_i c)$ dalam setiap persamaan populasi, menekan predator lebih kuat dibanding prey. Peta dua dimensi hasil kombinasi $(h - \lambda)$ (gambar 4) memperlihatkan tiga zona utama yaitu; zona I (XYZ) : koeksistensi penuh; zona II (XY) : tanpa predator puncak; zona III (X) : hanya prey yang tersisa. Batas antar-zona condong dari kiri bawah ke kanan atas, menunjukkan bahwa kenaikan polusi menurunkan ambang panen yang diperlukan untuk menyebabkan kolaps trofik. Dengan kata lain, polusi dan panen bersinergi negatif, mempercepat hilangnya tingkat trofik atas meski tekanan panen relatif kecil. Pola trasisi I →II →III pada $S1$ dan gradien zona $S3$ tetap muncul meskipun kondisi awal populasi diubah $\pm 10\%$. Nilai ambanf dapat bergeser jika parameter toksisitas $(\propto_i)$ atau laju degradasi (δ) berubah. Tidak ditemukannya (λ_c, Z) pada baseline bukanlah kelemahan, tetapi menunjukkan bahwa pada kombinasi toksisitas-dengradasi saat ini, predator puncak masih adaktif terhadap peningkatan polusi moderat. Ambang tersebut dapat dimunculkan dengan menaikkan $(\propto_3)$ atau menurunkan (δ). Secara matematis:

$$d_1^{eff} = d_1 + h + \propto_2 c, d_2^{eff} = d_2 + h + \propto_3 c. \quad (13)$$

Peningkatan (h) atau (λ) meningkatkan mortalitas efektif dan menurunkan bilangan reproduksi predator. Secara ekologis, ini berarti pemanenan berlebihan dan pencemaran tinggi memiliki efek sinergis dalam mempercepat kepunahan spesies tingkat tinggi. Prey menjadi dominan secara tidak alami, menyebabkan ketidakseimbangan energi dan gangguan rantai makanan.

Secara matematis, seluruh hasil simulasi mendukung analisis kestabilan lokal; (1) ambang (h_c) dan (λ_c) merupakan titik bifurkasi transkritikal yang memindahkan kestabilan antar-ekuilibrium; (2) tidak ditemukan osilasi pada parameter dasar, menandakan sistem berada di domain kestabilan penuh (semua nilai eigen real negatif); dan (3) ketika (h) atau (λ) melewati ambang, nilai eigen utama berpindah tanda dari negatif ke positif, memicu hilangnya kestabilan (E_{XYZ}). Kemudian secara ekologis; (1) predator menengah (Y) adalah komponen paling krusial dalam menjaga rantai makanan. Ketika populasi Y menurun, Z segera kolaps karena kehilangan sumber energi; (2) polusi memperparah efek panen, menurunkan efisiensi predasi dan laju reproduksi melalui toksisitas yang terakumulasi; dan (3) pengelolaan ekosistem perairan harus menekan dua faktor secara bersamaan: laju panen (h) dan tingkat polusi (λ), untuk mempertahankan keberlanjutan predator puncak.

KESIMPULAN

Model matematika predator–prey tiga spesies yang dikembangkan dalam penelitian ini berhasil merepresentasikan secara kuantitatif dinamika interaksi antarspesies dalam ekosistem perairan tercemar. Melalui pendekatan sistem persamaan diferensial nonlinier dengan fungsi respon Holling Tipe II, model ini mampu menjelaskan pengaruh toksisitas polutan serta aktivitas pemanenan terhadap kestabilan ekosistem. Analisis kestabilan lokal menggunakan matriks Jacobian menunjukkan bahwa sistem memiliki beberapa titik ekuilibrium—mulai dari kondisi kepunahan total hingga koeksistensi penuh yang masing-masing kestabilannya ditentukan oleh dua parameter utama, yaitu tingkat pencemaran dan intensitas pemanenan.

Hasil simulasi numerik memperlihatkan adanya tiga zona dinamika utama: (1) zona koeksistensi stabil antara prey, predator menengah, dan predator puncak; (2) zona ketidakstabilan di mana predator puncak punah akibat peningkatan toksisitas; serta (3) zona dominasi prey saat polusi dan panen melebihi ambang kritis. Temuan ini mengindikasikan bahwa pencemaran berfungsi sebagai faktor mortalitas efektif yang secara signifikan mempercepat keruntuhan rantai makanan ketika dikombinasikan dengan eksploitasi berlebih. Secara matematis, model menunjukkan terjadinya bifurkasi transkritikal yang menandai perubahan kestabilan antar-ekuilibrium. Secara ekologis, fenomena tersebut menggambarkan bahwa pengelolaan ekosistem perairan yang berkelanjutan harus mempertimbangkan secara simultan pengendalian tingkat pencemaran dan regulasi aktivitas pemanenan agar keseimbangan populasi predator–prey dapat dipertahankan. Dengan demikian, penelitian ini memberikan kontribusi teoretis terhadap pengembangan biomatematika serta dasar ilmiah bagi strategi konservasi dan pengendalian polusi di ekosistem perairan.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada pihak Universitas Negeri Medan, khususnya Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, yang telah memberikan dukungan fasilitas dan kesempatan untuk melaksanakan penelitian ini. Ucapan terima kasih juga disampaikan kepada pihak-pihak yang telah membantu dalam proses pelaksanaan penelitian, baik secara langsung maupun tidak langsung, sehingga penelitian ini dapat terselesaikan dengan baik.

DAFTAR PUSTAKA

Gao, Y., & Yao, S. (2021). Persistence and extinction of a modified Leslie-Gower Holling-type II predator-prey stochastic model in polluted environments with impulsive toxicant input. Mathematical Biosciences and Engineering, 18(4), 4894–4918.

Gao, Y., & Yao, S. (2022). Dynamical analysis of a modified Leslie-Gower Holling-type II predator-prey stochastic model in polluted environments with interspecific competition and impulsive toxicant input. Journal of Biological Dynamics, 16(1), 840-858.

Danane, J., Yavuz, M., & Yıldız, M. (2023). Stochastic modeling of three-species prey-predator model driven by Lévy jump with mixed Holling-II and Beddington-DeAngelis responses. Fractal and Fractional, 7(10), 751.

Danane, J., & Torres, D. F. M. (2023). Three-species predator-prey stochastic delayed model driven by Lévy jumps and with cooperation among prey species. Mathematics, 11(7), 1595.

Kalra, P., & Shreya. (2020). Impact of water toxicity and acidity on dynamics of prey-predator aquatic populations: A mathematical model. Journal of Physics: Conference Series, 1531(1). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1531/1/012081

Manaqib, M., Suma'inna, & Zahra, A. (2022). Mathematical Model of Three Species Food Chain With Intraspecific Competition and Harvesting on Predator. Barekeng, 16(2), 551–562. https://doi.org/10.30598/barekengvol16iss2pp551-562

Mustafa, S. A., Al-Rudainy, A. J., & Salman, N. M. (2024). Effect of environmental pollutants on fish health: An overview. Egyptian Journal of Aquatic Research, 50(2), 225–233. https://doi.org/10.1016/j.ejar.2024.02.006

Qin, W., Zhang, H., & He, Q. (2021). Survival and ergodicity of a stochastic Holling-III predator-prey model with Markovian switching in an impulsive polluted environment. Advances in Continuous and Discrete Models, 2021, 80.

Shi, H., Xu, F., Cheng, J., & Shi, V. (2023). Exploring the Evolution of the Food Chain under Environmental Pollution with Mathematical Modeling and Numerical Simulation. Sustainability (Switzerland), 15(13). https://doi.org/10.3390/su151310232

Talib, R. H., Helal, M. M., & Naji, R. K. (2022). The Dynamics of the Aquatic Food Chain System in the Contaminated Environment. Iraqi Journal of Science, 63(5), 2173–2193. https://doi.org/10.24996/ijs.2022.63.5.31

Wang, S., & Dong, L. (2023). Stochastic dynamics of a hybrid delay food chain model with harvesting and Lévy jumps in a polluted environment. Methodology and Computing in Applied Probability, 25, 94.

Rohmatunnisa, H., Asih, T. S. N., Waluya, S. B., & Safaatullah, M. F. (2024). The influence of Allee effect, refugia, and alternative food on a three-species predator-prey model. Unnes Journal of Mathematics, 12(2).

Pal, J., Tiwari, P. K., Misra, A. K., & Wang, X. (2023). Fear effect in a three-species food chain model with generalist predator. Mathematical Biosciences and Engineering, 21(1), 1–29.

Jin, H.-Y., Wang, Z.-A., & Wu, L. (2022). Global dynamics of a three-species spatial food chain model. Journal of Differential Equations, 333, 144-183.

Cong, P., Fan, M., & Zou, X. (2021). Dynamics of a three-species food chain model with fear effect. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 97, 105809.

Thota, S. (2021). A three species ecological model with Holling type-II functional response. Information Sciences Letters, 10(3).

Campillay-Llanos, W., Córdova-Lepe, F. D., & Moreno-Gómez, F. N. (2022). Coexistence, energy, and trophic cascade in a three-level food chain integrating body sizes. Frontiers in Ecology and Evolution, 10, 821176.

Akhtar, P., Karmakar, S., Sahoo, D., & Samanta, G. (2024). Dynamical analysis of a prey-predator model in toxic habitat with weak Allee effect and additional food. International Journal of Dynamics and Control, 12, 3963–3986.

Chu, J., & Jin, H.-Y. (2025). Global dynamics of a three-species Lotka-Volterra food chain model with intraguild predation and taxis mechanisms. Journal of Nonlinear Science, 35, 56.

Makwana, K., Babu, R., & Jadon, B. P. S. (2025). Effect of toxicant on one prey and two competing predators with Beddington DeAngelis functional response. Jambura Journal of Biomathematics, 6(1).