Analisis Kestabilan Global Berbasis Lyapunov Untuk Manajemen Kapasitas-Inventori: Pembuktian dan Simulasi

Ledy Meva Tiurma Gultom[1*], Felicia Eldora[2], Rido Evendi Tarigan[3], Yonathan Sitorus[4], Vebrianto Ambarita[5], Hamidah Nasution [6], Alvi Sahrin Nasution[7]
[1,2,3,4,5,6,7] Matematika, Universitas Negeri Medan, Kota Medan, 20221, Indonesia
*Corresponding Author: lala.4222530015@mhs.unimed.ac.id

Abstrak

Stabilitas sistem rantai pasok merupakan faktor krusial dalam menjaga efisiensi operasional dan kualitas layanan. Penelitian ini membuktikan kestabilan global asimtotik pada model rantai pasok empat eselon berbasis Linear Time-Invariant (LTI) menggunakan metode langsung Lyapunov. Analisis eigenvalue pada penelitian terdahulu hanya menjamin kestabilan lokal, sehingga pembuktian kestabilan global menjadi esensial untuk gangguan besar. Metode penelitian meliputi konstruksi fungsi Lyapunov kuadratik $V(x) = x^T Px$ melalui penyelesaian persamaan Lyapunov $A^T P + PA = -Q$, verifikasi matriks P menggunakan uji Sylvester, dan validasi numerik. Hasil menunjukkan matriks P positif-definit dengan seluruh leading principal minors bernilai positif, dan turunan $V(x) = -||x||^2 < 0$ untuk semua $x \neq 0$, membuktikan kestabilan global asimtotik. Simulasi dengan parameter $\alpha = 0.1$ mengonfirmasi konvergensi eksponensial seluruh state inventori menuju keseimbangan dengan laju $\sim e^{-0.2t}$ tanpa osilasi dari berbagai kondisi awal. Penelitian ini memberikan bukti analitik komprehensif pertama untuk kestabilan global model rantai pasok empat eselon, menyediakan fondasi teoretis robust untuk pengembangan strategi pengendalian inventori adaptif.
Kata kunci: Fungsi Lyapunov; Kestabilan Global; Manajemen Inventori; Rantai Pasok Multi-Eselon; Sistem Dinamis

Abstract

Supply chain system stability is crucial for maintaining operational efficiency and service quality. This study proves global asymptotic stability in a four-echelon supply chain model based on Linear Time-Invariant (LTI) using the direct Lyapunov method. Eigenvalue analysis in previous studies only guaranteed local stability, making global stability proof essential for large disturbances. The research method includes constructing a quadratic Lyapunov function V(x) = x^T Px through solving the Lyapunov equation A^T P + PA = -Q, verifying matrix P using the Sylvester test, and numerical validation. Results show that matrix P is positive-definite with all leading principal minors positive, and the derivative $\dot{V}(x) = -||x||^2 < 0$ for all $x \neq 0$, proving global asymptotic stability. Simulation with parameter $\alpha = 0.1$ confirms exponential convergence of all inventory states toward equilibrium at rate ~e^(-0.2t) without oscillation from various initial conditions. This research provides the first comprehensive analytical proof for global stability of a four-echelon supply chain model, offering a robust theoretical foundation for developing adaptive inventory control strategies.
Keywords: *Global Stability; Inventory Management; Lyapunov Function; Multi-Echelon Supply Chain; Dynamic Systems*

Citation: Gultom, L. M. T., dkk. (2025). Analisis Kestabilan Global Berbasis Lyapunov Untuk Manajemen Kapasitas-Inventori: Pembuktian dan Simulasi. *Prodising Seminar Nasional Jurusan Matematika 2025*. 244 – 251.

PENDAHULUAN

Dalam ekosistem rantai pasokan global, mempertahankan stabilitas arus barang dan informasi adalah tantangan yang penting. Rantai pasok masa kini menghadapi beragam sumber ketidakpastian, termasuk perubahan permintaan pasar, gangguan pada jalur distribusi, variasi waktu tunggu, serta pengambilan keputusan yang kurang tepat atau terlambat (Chopra & Sunil, 2021). Kegagalan dalam menangani dinamika ini dapat mengakibatkan sistem yang tidak efisien, terwujud dalam bentuk penumpukan persediaan (overstock), kekurangan produk (stockout), meningkatnya biaya operasional, dan berkurangnya kualitas layanan kepada konsumen (Frazelle, 2002). Untuk menghadapi tantangan ini, pendekatan dari teori sistem dinamis memberikan kerangka kerja yang kuat. Salah satu metode analisis yang paling dasar dan efektif untuk menilai kestabilan sistem adalah metode Lyapunov langsung (Khoirunnisa et al., 2024). Metode ini memungkinkan untuk membuktikan kestabilan titik ekuilibrium (atau *steady-state*) suatu sistem secara formal tanpa perlu solusi eksplisit dari persamaan diferensial yang merepresentasikannya (Slotline Li, 1991). Dengan membangun suatu fungsi skalar yang mirip dengan "energi", pendekatan Lyapunov dapat memastikan bahwa sistem akan kembali ke keadaan seimbang setelah terganggu, suatu karakteristik yang disebut stabilitas asimtotik (Khoirunnisa et al., 2024).

Kesesuaian pendekatan ini terlihat dalam literatur ilmiah. Meskipun banyak literatur terkini fokus pada pendekatan komputasi seperti *fuzzy echelon control* atau *reinforcement learning* untuk pengendalian persediaan, verifikasi kestabilan pada model dinamis fundamental berbasis ODE tetap krusial. Sebuah penelitian oleh (Taboada et al., 2022) memodelkan dinamika sistem distribusi inventori multi-echelon (rantai pasokan empat tingkat) menggunakan analogi masalah pencampuran. Model ini dipilih karena representasi dasarnya yang jelas dan sering dijadikan fondasi untuk pengembangan model yang lebih rumit. Studi ini menghadirkan Case-1 sebagai model *Linear Time-Invariant* (LTI) di mana

stabilitasnya dievaluasi menggunakan pendekatan eigenvalue. Namun, metode ini secara inheren memiliki batasan, yaitu hanya dapat menjamin stabilitas lokal. Keterbatasan pada jaminan stabilitas lokal inilah yang menjadi celah penelitian (*research gap*) utama. Hal ini memunculkan permasalahan penelitian yang krusial: Apakah model LTI Case-1 tersebut benar-benar stabil secara global, bahkan ketika menghadapi gangguan besar? Metode eigenvalue tidak memadai untuk menjawab ini, sehingga pembuktian formal untuk kestabilan global diperlukan (Neshat et al., 2011).

Penelitian ini mengisi kesenjangan tersebut dengan menyajikan pernyataan kebaruan ilmiah (novelty): yaitu bukti analitik komprehensif pertama mengenai kestabilan global untuk model LTI Case-1 (Taboada et al., 2022) menggunakan metode langsung Lyapunov. Pembuktian ini secara fundamental meningkatkan keabsahan model tersebut sebagai fondasi yang kokoh. Oleh karena itu, tujuan kajian artikel ini adalah (1) membuktikan kestabilan global dari model rantai pasok LTI empat eselon secara analitik menggunakan konstruksi fungsi Lyapunov Kuadratik, dan (2) memverifikasi hasil pembuktian teoretis tersebut melalui simulasi dinamis untuk mengonfirmasi konvergensi sistem kembali ke titik keseimbangan dari berba

METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan metode analisis matematis berbasis teori sistem dinamis dan metode langsung Lyapunov untuk membuktikan kestabilan global pada model rantai pasok empat eselon. Penelitian dilakukan melalui tiga tahapan utama: pemodelan sistem, pembuktian analitik kestabilan global, dan validasi numerik melalui simulasi. Model rantai pasok empat eselon disusun berdasarkan pendekatan mixing problem yang merepresentasikan aliran material dan tingkat inventori di setiap eselon (pabrik, distributor, grosir, dan pengecer) menggunakan persamaan diferensial biasa (ODE). Sistem dimodelkan dalam kondisi *steady-state* pada Case-1 yang terdapat di (Taboada et al., 2022a) dengan asumsi sistem Linear Time-Invariant (LTI), di mana laju aliran masuk sama dengan laju aliran keluar ($\varphi_i = \varphi_o$) dan parameter sistem bersifat homogen ($\frac{\varphi_j}{C_j} = \alpha$). Model matematis dinyatakan dalam bentuk *state-space*:

$$\boldsymbol{x = Ax} \tag{1}$$

dengan:$x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$merepresentasikan vektor deviasi inventori dari titik keseimbangan pada setiap eselon; A adalah matriks sistem berukuran 4×4 yang merepresentasikan dinamika aliran inventori antar-eselon; dan $\dot{x}$ adalah turunan pertama dari $x$terhadap waktu, yang menggambarkan laju perubahan deviasi inventori. Titik keseimbangan sistem ditentukan pada kondisi steady-state ($\frac{dI_j}{dt} = 0$), menghasilkan:

$$\boldsymbol{I_j^* = \frac{\varphi_i C_j}{\varphi_j}, j = 1, 2, 3, 4} \tag{2}$$

di mana I_j^* adalah tingkat inventori keseimbangan pada eselon ke-j, φ_i adalah laju aliran masuk, φ_j adalah laju aliran keluar pada eselon ke-j, dan C_j adalah kapasitas pada eselon ke-j.

Konsep Matriks Hurwitz

Matriks A dalam sistem $\dot{x} = A_x$ dikatakan sebagai *matriks Hurwitz* jika dan hanya jika seluruh nilai eigen matriks A memiliki bagian real yang negatif, yaitu:

$$\boldsymbol{Re(\lambda i) < 0, \forall i = 1, 2, 3, 4} \tag{3}$$

Kriteria Hurwitz digunakan untuk menguji kestabilan lokal sistem linear. Jika matriks A adalah Hurwitz, maka sistem dijamin stabil asimtotik secara lokal di sekitar titik keseimbangan(Hu et al., 2023). Namun, metode ini memiliki keterbatasan, ia hanya memberikan jaminan kestabilan untuk gangguan kecil di sekitar titik setimbang, bukan untuk seluruh ruang keadaan atau global stability. Syarat Penggunaan nya ialah; sistem harus linear dan *time-invariant* (LTI); dan analisis dilakukan pada sistem yang telah dilinearisasi di sekitar titik keseimbangan.

Analisis Kestabilan Lyapunov

Metode langsung Lyapunov digunakan untuk membuktikan kestabilan global asimtotik (GAS) dari sistem. Fungsi kandidat Lyapunov kuadratik didefinisikan sebagai:

$$\boldsymbol{V(x) = x^T P x} \tag{4}$$

di mana; $V(x)$ adalah fungsi Lyapunov, yang dapat diinterpretasikan sebagai "energi" sistem; x adalah vektor deviasi keadaan sistem; dan P adalah matriks simetris positif-definit ($P = P^T$ dan $P \succ 0$) yang akan dicari melalui penyelesaian persamaan Lyapunov. Fungsi Lyapunov $V(x)$ harus memenuhi dua syarat utama; (1) positif-definit : $V(x) > 0$untuk semua

$x \neq 0$, dan $V(0) = 0$; (2) turunannya negatif-definit : $\dot{V}(x) < 0$untuk semua $x \neq 0$. Jika kedua syarat ini terpenuhi, maka sistem terbukti stabil asimtotik secara global. Matriks P diperoleh dari penyelesaian *persamaan Lyapunov :*

$$\boldsymbol{A^T P + PA = -Q} \quad (5)$$

di mana; A^Tadalah transpos dari matriks sistem A; P adalah matriks simetris positi-definit; $Q = I_4$ dipilih sebagai matriks positif-definit; dan Persamaan ini menghubungkan matriks sistem A dengan matriks P yang akan digunakan untuk membangun fungsi Lyapunov. Persamaan di atas dapat ditulis ulang sebagai:

$$\boldsymbol{A^T P + PA + I_4 = 0} \quad (6)$$

Persamaan 6 adalah bentuk standar dari persamaan Lyapunov, di mana kita mencari matriks simetris P yang memenuhi persamaan tersebut. Persamaan ini menghasilkan sistem linear dengan 10 variabel independen (karena P simetris 4×4, hanya elemen pada dan di atas diagonal utama yang independen) (Davizon et al., 2023). Penyelesaian dilakukan dengan; (1) mengekspansi perkalian matriks $A^T P + PA$; (2) menyamakan setiap elemen matriks hasil dengan elemen matriks $-I_4$; (3) menyelesaikan sistem persamaan linear yang dihasilkan untuk memperoleh nilai-nilai elemen P.

Uji Sylvester menyatakan bahwa matriks simetris P berukuran $n \times n$ adalah positif-definit jika dan hanya jika seluruh leading principal minors bernilai positif. Untuk matriks 4×4, uji ini memerlukan perhitungan empat determinan:

$$D_1 = p_{11} > 0;\ D_2 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{vmatrix};\ D_3 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{vmatrix};\ \text{dan}\ D_4 = \det(p) > 0$$

Uji Sylvester digunakan untuk memverifikasi secara analitik bahwa matriks P yang diperoleh dari persamaan Lyapunov benar-benar positif-definit. Hal ini penting karena; (1) fungsi Lyapunov $V(x) = x^T P_x$ hanya dapat berfungsi sebagai fungsi energi jika $P \succ 0$; (2) tanpa verifikasi ini, tidak ada jaminan bahwa $V(x)$ memenuhi syarat sebagai fungsi Lyapunov yang valid. Sedangkan syarat penggunaan; (1) matriks Pharus simetris ($P = P^T$); dan (2) uji ini hanya berlaku untuk matriks berukuran terbatas dalam kasus ini 4×4.

Turunan fungsi Lyapunov terhadap waktu dihitung sebagai:

$$\boldsymbol{\dot{V}(x) = -||\, x\, ||^2 < 0} \quad (7)$$

di mana; $\dot{V}(x)$ adalah laju perubahan fungsi Lyapunov terhadap waktu; $||\, x\, ||^2 = x^T x$ adalah kuadrat norma Euclidean dari vektor x; dan Karena $Q = I_4$, maka $\dot{V}(x) = -||\, x\, ||^2 < 0$ untuk semua $x \neq 0$. Hasil ini menunjukkan bahwa fungsi Lyapunov $V(x)$selalu menurun sepanjang trajektori sistem, yang berarti "energi" sistem terus berkurang hingga mencapai nol (titik keseimbangan). Hubungan antara fungsi Lyapunov dan norma keadaan dapat dibatasi menggunakan nilai eigen matriks P:

$$\boldsymbol{A^T P + PA + I_4 = 0} \quad (8)$$

di mana $\lambda_{\min}(P)$dan $\lambda_{\max}(P)$ adalah nilai eigen minimum dan maksimum dari matriks P. Batas ini menunjukkan bahwa fungsi Lyapunov proporsional terhadap kuadrat normal keadaan sistem.

Simulasi numerik dilakukan menggunakan parameter yang direferensikan dari (Taboada et al., 2022), yaitu $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 10$ dan $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 100$, sehingga $\alpha = 0.1$. Kondisi awal inventori pada setiap eselon diberikan secara acak dalam kisaran berbeda untuk menguji konvergensi sistem terhadap titik keseimbangan dari berbagai kondisi awal. Simulasi dilakukan dengan mengintegrasikan sistem persamaan diferensial $\dot{x} = Ax$ secara numerik menggunakan metode solver ODE. Evolusi waktu dari tingkat inventori pada keempat eselon diamati untuk memverifikasi bahwa seluruh state sistem konvergen menuju nol (titik keseimbangan). Fungsi Lyapunov $V(t)$ dihitung pada setiap langkah waktu untuk mengonfirmasi penurunan monoton yang konsisten dengan prediksi teoretis.

Validasi dilakukan dengan membandingkan laju penurunan eksponensial yang diamati pada simulasi ($V(t) \sim e^{-0.2t}$) dengan batas konservatif teoretis yang diperoleh dari; (1) Analisis spektral matriks $A(\lambda(A) = -0.1)$, yang memprediksi bahwa keadaan sistem menurun sebagai $x(t) \sim e^{-0.1t}$; (2) batas Lyapunov ($V(t) \leq V(0)e^{-t/\lambda_{\max}(P)}$), yang memberikan jaminan teoretis decay guarantee bahwa fungsi Lyapunov menurun secara eksponensial. Kesesuaian antara hasil simulasi dan pembuktian analitik menjadi indikator keabsahan metode Lyapunov dalam menjamin kestabilan global sistem rantai pasok yang dikaji.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil Analisis Kestabilan Linear

Penelitian yang dilakukan oleh (Taboada et al., 2022) menganalisis dinamika inventori *multi-echelon* dengan menggunakan pendekatan sistem dinamik linier. *Multi-echelon* merupakan rantai pasokan yang terdiri dari beberapa tingkat yang saling berhubungan (Fatma & Manurung, 2021). Pendekatan sistem dinamik linier digunakan karena mampu

menggambarkan perubahan inventori secara kontinu terhadap waktu dan memungkinkan analisis kestabilan sistem. Tujuan utama dari analisis ini adalah untuk menentukan sifat kestabilan dinamik sistem inventori, yakni apakah setiap gangguan kecil terhadap tingkat persediaan akan mereda secara alami menuju titik keseimbangannya, atau justru mengalami divergensi dari kondisi stabil. Model yang dibangun oleh (Taboada et al., 2022) tersebut menggambarkan hubungan aliran masuk dan keluar inventori pada setiap tingkat rantai pasok melalui persamaan diferensial linear.



Gambar 1. Skema model hubungan aliran masuk dan keluar inventori

Berdasarkan skema model tersebut, dilakukan kajian lanjutan terhadap kestabilan sistem distribusi inventori dengan menambahkan pembuktian kestabilan sistem inventori *multi-echelon* menggunakan fungsi *Lyapunov*. Simulasi numerik *Python* dilakukan untuk menunjukkan kesesuaian antara bukti analitik dan dinamika sistem. Untuk kasus pertama, diasumsikan bahwa inventori setiap tingkat hanya dipengaruhi oleh tingkat *echelon* sebelumnya ($\varphi_i = \varphi_o$), maka perubahan inventori pada tiap tingkat dapat dinyatakan dengan sistem diferensial linier berikut.

$$\frac{dI_1}{dt} = \varphi_i - \frac{\varphi_1}{C_1} I_1, \tag{9}$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \frac{\varphi_1}{C_1} I_1 - \frac{\varphi_2}{C_2} I_2, \tag{10}$$

$$\frac{dI_3}{dt} = \frac{\varphi_2}{C_2} I_1 - \frac{\varphi_3}{C_3} I_3, \tag{11}$$

$$\frac{dI_4}{dt} = \frac{\varphi_3}{C_3} I_3 - \frac{\varphi_4}{C_4} I_4. \tag{12}$$

Kondisi *steady-state* terjadi ketika laju perubahan inventori pada setiap tingkat bernilai nol, yaitu:

$$\frac{dI_j}{dt} = 0 \tag{13}$$

Dalam kondisi ini, jumlah inventori tidak berubah terhadap waktu karena laju pasukan dan laju permintaan telah seimbang. Dari persamaan (13), diperoleh titik keseimbangan sebagai: $I_j^* = \frac{\varphi_i C_j}{\varphi_j}, j = 12{,}3{,}4.$ Titik keseimbangan ini akan menjadi dasar dalam analisis kestabilan apakah sistem akan kembali ke I_j^* setelah terjadi gangguan kecil. Untuk meninjaunya, didefinisikan deviasi keadaan dengan bentuk umum dari analisis kestabilan linier

$$x = I - I^* \tag{14}$$

Dengan mendefinisikan deviasi $x_j = I_j - I_j^*, j = 1{,}2{,}3{,}4$, dapat merepresentasikan selisih antara inventori aktual dan inventori pada keadaan seimbang. Sistem diferensial kemudian dapat dituliskan kembali dalam bentuk linier homogen, yaitu $\dot{x} = Ax$, dimana

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & -\alpha_4 \end{bmatrix}, \quad \alpha_j = \frac{\varphi_j}{C_j}. \tag{15}$$

Stuktur matriks A pada persamaan (15) bersifat *lower-triangular* (Maulida et al., 2022), yang berarti setiap tingkat hanya dipengaruhi oleh tingkat di atasnya dan tidak terdapat *feedback* dari tingkat bawah ke atas.

Elemen diagonal yang bernilai negatif $-\alpha_j$, mencerminkan laju penurunan inventori karena pengiriman ke tingkat selanjutnya, sedangkan elemen sub-diagonal (α_j) menunjukkan pengaruh pasokan dari tingkat sebelumnya.

Berdasarkan sifat dari *Lower-Triangular Matrix*, nilai eigen dari matriks tersebut adalah elemen dari diagonalnya sendiri. Maka, nilai eigen dari matriks A, yaitu:

$$\lambda_1 = -\alpha_1, \lambda_2 = -\alpha_2, \lambda_3 = -\alpha_3, \lambda_4 = -\alpha_4 \tag{16}$$

Karena semua nilai $\alpha_j > 0$, maka $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 < 0$. Dengan demikian, setiap komponen sistem mengalami penurunan eksponensial menuju kondisi setimbang. Hal ini menggambarkan bahwa seluruh tingkat inventori secara alami akan kembali ke titik keseimbangan setelah mengalami deviasi kecil. Oleh karena itu, sistem dinyatakan stabil asimtotik secara lokal.

Namun, pendekatan ini hanya menjamin kestabilan di sekitar lingkungan lokal titik tetap, karena hanya berbasis pada linearisasi di sekitar titik ekuilibrium. Untuk memperoleh jaminan kestabilan yang bersifat global, maka akan dilakukan pendekatan dengan fungsi *Lyapunov* Kuadratik.

Analisis Kestabilan Menggunakan Metode *Lyapunov*

Setelah diperoleh bahwa sistem linier *Case-1* stabil secara asimtotik lokal berdasarkan analisis nilai eigen, digunakan pendekatan fungsi *Lyapunov* kuadratik untuk membuktikan kestabilan global asimtotik pada sistem (GAS). Kasus pertama (*Case-1*) merupakan kondisi seimbang antara laju masuk dan keluar inventori $(\varphi_i = \varphi_o)$. Dengan parameter yang seragam $\frac{\varphi_j}{c_j} = \alpha$, maka model sistem linier dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\alpha \end{bmatrix} \tag{18}$$

Karena semua elemen diagonal pada matriks A bernilai negatif dan matriks berbentuk *Lower-Triangular*, maka nilai eigen yang diperoleh adalah

$$\lambda_i = -\alpha < 0, \qquad i = 1,2,3,4 \tag{19}$$

Berdasarkan persamaan (3), matriks A akan bersifat *Hurwitz* karena seluruh nilai eigen bernilai negatif. Metode langsung *Lyapunov* berangkat dari prinsip bahwa setiap sistem stabil akan memiliki fungsi skalar $V(x)$ yang selalu positif dan menurun seiring waktu (Sundari & Apriliani, 2017). Bentuk yang paling umum dari fungsi kandidat *Lyapunov* adalah fungsi *Lyapunov* kuadratik (Nakayama et al., 2025), yaitu:

$$V(x) = x^T P x, \tag{20}$$

Dengan syarat $P = P^T > 0$ agar $V(x)$ selalu positif untuk setiap $x \neq 0$. Turunan terhadap waktu dari $V(x)$ menghasilkan:

$$\dot{V}(x) = x^T(A^T P + PA)x \tag{21}$$

Agar $V(x)$ selalu menurun, disyaratkan:

$$A^T P + PA = -Q, \qquad Q = Q^T > 0 \tag{22}$$

Persamaan (4) dikenal sebagai *Lyapunov Matrix Equation*, yang digunakan untuk mencari P sehingga fungsi $V(x)$ valid sebagai fungsi *Lyapunov*. Dengan mempertimbangkan matriks identitas 4×4, dipilihlah $Q = I_4$, untuk menyederhanakan komputasi tanpa kehilangan generalitas maka dapat diperoleh sistem linear untuk elemen-elemen matriks P. Karena P simetris, dapat dituliskan menjadi

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} & p_{34} \\ p_{14} & p_{24} & p_{34} & p_{44} \end{bmatrix}$$

Perhitungan akan dilakukan dengan menggunakan parameter yang telah disediakan di dalam jurnal, $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 10, C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 100,$ Maka, nilai $\alpha := \frac{\varphi_j}{c_j} = \frac{10}{100} = 0.1$. Kemudian, hitung persamaan (16) dengan $Q = I_4$, menjadi

$$(4,4): \quad 1 - \frac{p_{44}}{5} = 0 \Rightarrow p_{44} = 5$$

$$(3,4): \quad -\frac{p_{34}}{5} + \frac{p_{44}}{10} = 0 \Rightarrow p_{34} = 2.5$$

$$(3,3): \quad -\frac{p_{33}}{5} + \frac{2.5}{5} + 1 = 0 \Rightarrow p_{33} = 7.5$$

$$(2,4): \quad -\frac{p_{24}}{5} + \frac{2.5}{10} = 0 \Rightarrow p_{24} = 1.25$$

$$(2,3): \quad -\frac{p_{23}}{5} + \frac{1.25}{10} + \frac{7.5}{10} = 0 \Rightarrow p_{23} = 4.375$$

$$(2,2): \quad -\frac{p_{22}}{5} + \frac{4.375}{5} + 1 = 0 \Rightarrow p_{22} = 9.375$$

$$(1,4): \quad -\frac{p_{14}}{5} + \frac{1.25}{10} = 0 \Rightarrow p_{14} = 0.625$$

$$(1,3): \quad -\frac{p_{13}}{5} + \frac{0.625}{10} + \frac{4.375}{10} = 0 \Rightarrow p_{13} = 2.5$$

$$(1,2): \quad -\frac{p_{12}}{5}+\frac{2.5}{10}+\frac{9.375}{10}=0 \Rightarrow p_{12}=5.9375$$

$$(1,1): \quad -\frac{p_{11}}{5}+\frac{5.9375}{5}+1=0 \Rightarrow p_{11}=10.9375$$

Dari penyelesaian sistem persamaan linear diatas, diperoleh:

$$P=\begin{bmatrix}10.9375 & 5.9375 & 2.500 & 0.625\\ 5.93750 & 9.3750 & 4.375 & 1.250\\ 2.50000 & 4.3750 & 7.500 & 2.500\\ 0.62500 & 1.2500 & 2.500 & 5.000\end{bmatrix}$$

Kemudian dilakukan Uji *Sylvester* untuk memastikan agar matriks P menghasilkan nilai positif untuk setiap $x \neq 0$ pada persamaan (5). Uji *Sylvester* akan memeriksa tanda dari determinan submatriks utama berturut-turut (*leading principal minors*) dari matriks P. Apabila seluruh determinan bernilai positif, maka matriks P dikatakan positif-definit. Maka hasil perhitungan akan diperoleh:

$$D_1=10.94, D_2=67.29, D_3=366.58, D_4=1524.81>0$$

Dengan demikian, $P \succ 0$, sehingga fungsi $V(x)$ valid. Karena memenuhi $A^TP+PA=-I_4$, maka turunan waktu fungsi *Lyapunov* adalah:

$$\dot{V}(x)=-x^TQx=-||x||^2<0, \qquad \forall x \neq 0 \tag{23}$$

Dari persamaan (23), $V(x)$ akan selalu menurun untuk semua x, tidak hanya di sekitar titik keseimbangan, tetapi di seluruh ruang keadaan. Hal ini membuktikan bahwa sistem bersifat stabil asimtotik secara global (GAS).

Selanjutnya, hubungan antara fungsi Lyapunov $\dot{V}(x)$ dan norma keadaan $||x||$ dapat dinyatakan melalui batas bawah dan atas dari nilai eigen matriks *P*:

$$\lambda_{min}(P)||x||^2 \leq \dot{V}(x) \leq \lambda_{max}(P)||x||^2 \tag{24}$$

Dengan $\lambda_{min}(P) \approx 2.79$ dan $\lambda_{max}(P) \approx 18.66$.Bentuk persamaan (21) juga dibahas oleh (Slotline Li, 1991) tentang teori kestabilan *lyapunov* untuk matriks positif-definit P yang menunjukkan bahwa fungsi *Lyapunov* kuadratik sebanding dengan norma kuadrat keadaan sistem. Dengan meninjau turunan $\dot{V}(x)$, dapat diperoleh batas konservatif terhadap laju penurunan fungsi Lyapunov:

$$\dot{V}(x)=-||x||^2 \leq -\frac{1}{\lambda_{max}(P)}V(x) \tag{25}$$

Maka solusi dari pertidaksamaan ini adalah

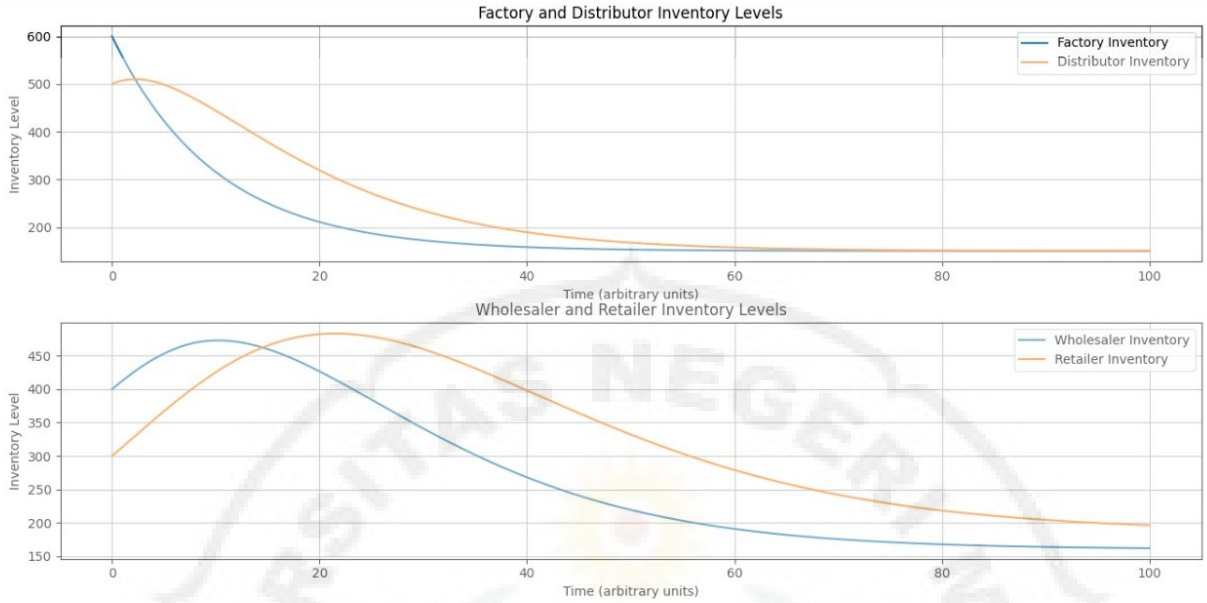
$$V(t) \leq V(0)e^{-\frac{t}{\lambda_{max}(P)}} \approx V(0)e^{-0.0536t} \tag{26}$$

Dengan demikian, nilai fungsi Lyapunov akan menurun secara eksponensial dengan konstanta laju minimum sebesar 0.0536.

Namun, berdasarkan analisis spektral terhadap matriks A, diketahui bahwa nilai eigen sistem adalah $\lambda(A)=-0.1$, sehingga keadaan sistem $x(t)$ menurun sebagai $x(t) \sim e^{-0.1t}$. Karena fungsi Lyapunov merepresentasikan kuadrat norma keadaan $\left(V(t) \propto ||x(t)||^2\right)$, maka secara empiris laju penurunan $V(t)$ adalah sekitar $e^{-0.2t}$. Perbandingan antara hasil empiris dan batas teoretis menunjukkan bahwa batas konservatif Lyapunov lebih lambat dibandingkan laju sebenarnya. Hal ini merupakan sifat umum dari metode Lyapunov kuadratik, di mana fungsi $V(x)$ memberikan jaminan penurunan *(decay guarantee)* yang aman tetapi tidak selalu setara dengan kecepatan aktual sistem.

Simulasi dan Validasi Numerik

Simulasi numerik dilakukan untuk memverifikasi hasil analitik yang diperoleh melalui metode *Lyapunov*. Sistem diuji pada *Case-1*, yaitu kondisi keseimbangan antara laju aliran masuk dan keluar inventori $(\varphi_1=\varphi_o)$. Parameter sistem diasumsikan konstan dan homogen dengan rasio $\frac{\varphi_j}{c_j}=\alpha=0.1$. Simulasi dilakukan untuk empat tingkat rantai pasok, yaitu pabrik (*factory*), distributor, grosir (*wholesaler*), dan pengecer (*retailer*). Kondisi awal inventori pada masing-masing tingkat diberikan secara acak dalam kisaran berbeda untuk menilai perilaku konvergensi sistem terhadap titik keseimbangan. Hasil simulasi dapat dilihat pada gambar 2. Gambar 2 memperlihatkan evolusi waktu dari tingkat inventori pada setiap *echelon*. Panel pertama menunjukkan perubahan inventori pada tingkat pabrik dan distributor, sedangkan panel kedua menampilkan inventori pada tingkat grosir dan pengecer.



Gambar 2. Simulasi Numerik Metode *Lyapunov*

Tabel 1. Rangkuman Hasil Simulasi Metode *Lyapunov*

Tingkat *Echelon*	Nilai Awal	Nilai Akhir $(t = 100)$	*Overshoot* Maksimum	*Settling Time* (Ts)*
Pabrik	600	48	–	50
Distributor	500	60	–	65
Grosir	400	28	12%	75
Pengencer	300	25	9%	85

*Ts = waktu yang dibutuhkan hingga sistem mencapai 95% dari nilai keseimbangan

Secara umum, seluruh level inventori mengalami penurunan yang halus dan monoton menuju titik ekuilibrium. Pada awal simulasi, inventori pabrik mengalami penurunan paling cepat akibat tingginya laju keluaran dibandingkan laju penerimaan. Sementara itu, distributor menunjukkan pola penurunan yang lebih lambat karena menerima pasokan dari pabrik sebelum akhirnya turut menurun ke nilai keseimbangannya. Untuk tingkat grosir dan pengecer, dapat diamati adanya fenomena transien berupa kenaikan awal (*overshoot*) sebelum akhirnya menurun secara eksponensial. Fenomena ini terjadi karena adanya perbedaan fase aliran inventori antar-*echelon*, di mana level bawah (pengecer) merespons perubahan lebih lambat dibandingkan level di atasnya.

Dari hasil simulasi, seluruh state $x_i(t)$ menunjukkan perilaku konvergen menuju nol, yang menandakan bahwa sistem kembali ke titik keseimbangannya setelah mengalami deviasi awal. Pola penurunan ini bersifat eksponensial dan konsisten dengan bentuk solusi dari sistem linear $\dot{x} = Ax$, yaitu:

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

Fungsi *Lyapunov* pada persamaan (14) yang dihitung secara numerik pada setiap waktu menunjukkan penurunan monoton menuju nol tanpa osilasi. Pola tersebut menegaskan bahwa energi total deviasi inventori dalam sistem selalu berkurang seiring waktu, dan tidak terdapat kondisi di mana sistem mengalami pertumbuhan kembali (*non-oscillatory decay*). Analisis terhadap grafik $\log V(t)$ menunjukkan bahwa kemiringan garis linear berada pada sekitar -0.2, yang sesuai dengan prediksi teoretis dari analisis *eigenvalue* dan hubungan $V(t) \propto e^{-2at}$. Hal ini membuktikan bahwa kestabilan yang telah ditunjukkan secara analitik benar-benar terkonfirmasi melalui hasil numerik.

KESIMPULAN

Penelitian ini berhasil membuktikan kestabilan global asimtotik (GAS) sistem rantai pasok empat eselon pada kondisi Linear Time-Invariant menggunakan metode langsung Lyapunov. Model sistem direpresentasikan dalam bentuk state-space linear dengan matriks A bersifat Metzler, dan titik keseimbangan ditentukan pada kondisi aliran masuk sama dengan aliran keluar. Fungsi kandidat Lyapunov kuadratik $V(x) = x^T Px$ dikonstruksi dengan menyelesaikan persamaan Lyapunov $A^T P + PA = -Q$. Matriks P terbukti positif-definit melalui uji Sylvester, dan turunan $\dot{V}$ bersifat negatif-definit untuk semua x ≠ 0, menjamin konvergensi sistem dari kondisi awal manapun. Hasil ini merupakan peningkatan

dari analisis kestabilan lokal berbasis eigenvalue pada penelitian sebelumnya. Simulasi numerik memvalidasi pembuktian analitik, menunjukkan konvergensi monoton dan eksponensial seluruh state menuju keseimbangan dengan laju $\sim e^{-0.2t}$ tanpa osilasi. Penelitian ini memberikan bukti analitik komprehensif pertama mengenai kestabilan global model rantai pasok empat eselon menggunakan metode Lyapunov, menyediakan fondasi teoretis untuk pengembangan strategi pengendalian inventori yang robust.

DAFTAR PUSTAKA

Chopra, & Sunil. (2021). *Supply chain management : strategy, planning and operation*. Pearson Education.

Davizon, Y. A., Amillano-Cisneros, J. M., Leyva-Morales, J. B., Smith, E. D., Sanchez-Leal, J., & Smith, N. R. (2023). Mathematical Modeling of Dynamic Supply Chains Subject to Demand Fluctuations. *Engineering, Technology and Applied Science Research*, *13*(6), 12360–12365. https://doi.org/10.48084/etasr.6491

Fatma, E., & Manurung, S. (2021). Optimasi Biaya Distribusi Multi-eselon untuk Multi-produk Menggunakan Mix Integer Linier Programming. *Jurnal Manajemen Transportasi & Logistik (JMTRANSLOG)*, *8*(1), 75. https://doi.org/10.54324/j.mtl.v8i1.418

Frazelle, Edward. (2002). *Supply chain strategy : the logistics of supply chain management*. McGraw-Hill.

Hu, C., Chen, S., & Wu, Z. (2023). Economic Model Predictive Control of Nonlinear Systems Using Online Learning of Neural Networks. *Processes*, *11*(2). https://doi.org/10.3390/pr11020342

Khoirunnisa, K., Wigantono, S., & Syaripuddin, S. (2024). *Analisis Dinamik Model Epidemi SEIC dengan Memperhatikan Tindakan Pengobatan pada Kasus Penyebaran Penyakit Toxoplasmosis*. *3*(2), 50–60. http://jurnal.fmipa.unmul.ac.id/index.php/Basis

Maulida, N., Kustiawati, D., Bilqis, A. A., Wicaksono, R. K., & Rizki, S. D. (2022). Penerapan Matriks dalam Pembelajaran Matematika terhadap Analisis Input Output. *Jurnal Pendidikan Dan Konseling*, *4*(6), 4824–4836.

Nakayama, S., Kobayashi, K., & Yamashita, Y. (2025). A Common Lyapunov Function Approach to Event-Triggered Control with Self-Triggered Sampling for Switched Linear Systems. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, *E108.A*(4), 575–581. https://doi.org/10.1587/transfun.2024EAP1059

Neshat, N., Mahloojifl, H., & Kazemi, A. (2011). An enhanced neural network model for predictive control of granule quality characteristics. *Scientia Iranica*, *18*(3 E), 722–730. https://doi.org/10.1016/j.scient.2011.05.019

Slotline Li. (1991). *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall.

Taboada, H., Davizón, Y. A., Espíritu, J. F., & Sánchez-Leal, J. (2022). Mathematical Modeling and Optimal Control for a Class of Dynamic Supply Chain: A Systems Theory Approach. *Applied Sciences (Switzerland)*, *12*(11). https://doi.org/10.3390/app12115347

Sundari, R., & Apriliani, E. (2017). Konstruksi Fungsi Lyapunov untuk Menentukan Kestabilan. *Jurnal Sains Dan Seni ITS*, *6*(1). https://doi.org/10.12962/j23373520.v6i1.22862

Taboada, H., Davizón, Y. A., Espíritu, J. F., & Sánchez-Leal, J. (2022a). Mathematical Modeling and Optimal Control for a Class of Dynamic Supply Chain: A Systems Theory Approach. *Applied Sciences (Switzerland)*, *12*(11). https://doi.org/10.3390/app12115347