

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf ialah salah satu cabang ilmu matematika sebenarnya sudah ditemukan lebih dari 200 tahun lalu. Euler yang merupakan matematikawan asal Swiss pada saat tahun 1736 memperkenalkan Jurnal teori graf pertama. Dari sudut pandang matematika, teori graf awalnya hanya dimanfaatkan sebagai solusi untuk memecahkan permasalahan teka-teki, jadi pada saat itu teori graf tidak "sangat" penting pada awalnya, tetapi akhirnya berkembang sangat cepat dalam beberapa dekade terakhir (Daniel dan Taneo 2019). Graf ialah bentuk dari salah satu pemodelan matematika yang proses pembentukannya sulit dan sangat kompleks, namun demikian teori graf menawarkan solusi yang dapat diterapkan dengan sangat baik untuk dalam mengatasi masalah tertentu. Banyak permasalahan yang dapat dijumpai didalam kehidupan sehari-hari yang dapat diaplikasikan dengan menggunakan graf, seperti *puzzle games*, *transportation problem*, *operation research* dan lain sebagainya (Mutianingsih 2016). Graf digunakan untuk untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungannya antara objek-objek tersebut (Daniel dan Taneo 2019).

Teori graf ialah subjek yang relatif muda, tetapi aplikasinya sangat luas. Misalnya, optimalisasi jaringan telepon, pemodelan papan sirkuit, pemodelan struktur pada ikatan kimia, oprimaliasasi jaringan komputer, oprimalisasi jaringan listrik, dan banyak peangaplikasian lainnya. Graf dipakai dalam mewakili objek (representasi) diskrit maupun representasi hubungan antara objek-objeknya. Representasi visual pada graf ialah merepresentasikan objek sebagai simpul, atau yang disebut juga dengan titik, sedangkan representasi hubungan antar objek-objeknya direpresentasikan dengan edge, sisi atau garis . Nilai dari titik (simpul) dan garis merupakan bilangan asli. Untuk menentukan nilai dari titik (simpul) dan garis digunakan pelabelan.

Pelabelan pada suatu graf dimunculkan pada awalnya oleh Sedlacek (1964), setelah itu Stewart (1966), dan kemudian Kotzig dan Rosa (1970). Selama ini, peran teori pelabelan pada graf telah banyak diterapkan, terutama dalam

sistem komunikasi dan navigasi (transportasi), radar, pemancar frekuensi navigasi geografis dan database elektronik.

Pelabelan ialah mapping (pemetaan) satu-ke-satu dari setiap elemen graf, yaitu kumpulan (himpunan) simpul, garis, edge, titik atau sisi, dengan sebuah bilangan positif yang diberi nama dengan istilah label. Sedangkan untuk pelabelan dengan domain node (simpul atau titik) diberi nama pelabelan simpul. Pelabelan yang dilakukan dengan domain himpunan edge atau garis disebut pelabelan sisi. Pelabelan yang melakukan pelabelan pada simpul (titik) dan pelabelan pada sisi (edge) nya diberi nama dengan pelabelan total.

Pelabelan pada simpul dan pelabelan sisi dari sebuah graf dapat dilakukan menggunakan berbagai cara. Salah satu metode yang dapat diterapkan ialah dengan cara melakukan pelabelan dengan menggunakan bilangan. Beberapa jenis dari pelabelan graf yang sudah dilakukan pengembangan ialah pelabelan harmoni, pelabelan total tidak teratur, pelabelan gracefull, pelabelan anti ajaib dan pelabelan ajaib. Dalam prosesnya pelabelan ajaib dikembangkan menjadi beberapa jenis pelabelan yaitu pelabelan total super simpul ajaib, pelabelan total super sisi ajaib, pelabelan total sisi ajaib dan pelabelan total simpul ajaib.

Pada graf G suatu pelabelan total sisi ajaib ialah merupakan pemetaan fungsi bijektif $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$ yang dimana nilai p ialah jumlah dari banyaknya simpul sedangkan q ialah jumlah dari banyaknya sisi, dengan demikian maka pada tiap sisi $uv \in E(G)$, pada tiap bobot sisi $w(uv) = f(u) + f(uv) + f(v) = k$, dengan k merupakan konstanta dengan nilai bilangan bulat positif. Pada pelabelan total sisi ajaib super ini nilai k deiberi nama dengan konstanta ajaib. Pelabelan total sisi ajaib f dinyatakan merupakan pelabelan total sisi ajaib super dari suatu graf G jika memenuhi sifat $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p\}$ dan sifat $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{p + 1, p + 2, \dots, p + q\}$ (Hardi dkk. 2019).

Pada pelabelan graf hasil yang diperoleh berupa nilai simpul dan sisi. Nilai simpul dan sisi tersebut berupa suatu himpunan yang memetakan sisi terhadap simpul. Dalam kondisi khusus himpunan hasil dari pelabelan graf yang subhimpunan label dan posisinya, yang membentuk graf yang persis (sama) dengan hasil pelabelan grafnya dan hasil pelabelannya hanya dapat membentuk satu garf disebut dengan himpunan kritis.

Himpunan kritis dalam pelabelan suatu graf ialah himpunan bagian dari kumpulan posisi label dan kumpulan label yang ketika selesai disusun dan dilengkapi akan didapati sebuah pelabelan yang unik (hanya tercipta satu pelabelan). Singkatnya, diberikan subset label suatu graf dan posisi labelnya, himpunan (set) hanya dapat membentuk graf yang hasilnya sama dengan pelabelan subsetnya dan hanya dapat dibentuk satu graf. Jika suatu himpunan membentuk graf yang sama maka himpunan tersebut adalah himpunan kritis (Adithia 2000).

Himpunan kritis ialah suatu informasi partial (terpisah) dari set (himpunan), dengan demikian maka untuk mengetahui informasi yang terpisah (partial) ini, dapat dilakukan reonstruksi himpunan yang berbeda secara tunggal. Adapun Ide dasar dari suatu himpunan kritis ialah bentuk bujur sangkar Latin (persegi Laten), yang merupakan sebuah matriks dengan ukuran $n \times n$ yang dimana setiap elemen yang dipilih diambil dari nilai bilangan bulat positif $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Pada baris dan kolomnya tidak diperbolehkan mempunyai bilangan yang sama. Artinya dalam satu baris hanya ataupun kolom memiliki bilangan yang unik (tunggal). Konsep yang diterapkan pada persegi laten kemudian dijadiakn acuan dan diterapkan pada konsep menentukan sebuah himpunan kritis dari suatu graf. Himpunan kritis biasanya dapat diaplikasikan pada beberapa bidang keilmuan misalnya pada bidang keilmuan kriptografi.

Himpunan kritis ialah suatu bentuk suatu himpunan setiap elemennya dapat membentuk dan menentukan posisi dan nilai dari elemen-elemen lainnya dari suatu set (himpunan) label yang dimana Set (Himpunan) label ajaib ialah suatu himpunan yang dimana setiap elemen-elemennya merupakan pasangan berurut dari posisi label dan labelnya. Adapun dengan adanya himpunan kritis yang diperoleh dari graf tertentu, terkhusus pada graf bintang, sedemikian sehingga dapat dilakukan rekonstruksi ulang pelabelan dari graf tersebut.

Masalah penentuan himpunan kritis pada pelabelan suatu graf ialah permasalahan yang rumit dan cukup sulit. Hal tersebut disebabkan banyaknya kemungkinan sub himppunan dari suatu graf seiring dengan bertambahnya jumlah simpul dan sisinya sehingga perlu dilakukan pengujian setiap subset untuk mengetahui subset mana yang dapat membentuk satu-satun ya pelabelan dari graf tersebut (Baskoro 2007).

Penentuan himpunan kritis setiap graf mempunyai aturan yang berbeda-beda. Untuk mendapatkan memperoleh himpunan kritis dari suatu graf kita harus mengetahui jenis graf tersebut. Graf yang digunakan dalam pengaplikasian konsep himpunan kritis pada penelitian ini adalah graf bintang.

Graf bintang yang dinyatakan menggunakan simbol S_n ialah graph bipartit lengkap yang berbentuk $K_{1,n}$. Bentuk Graf bintang merupakan graph pohon yang graphnya memiliki satu simpul dengan derajat $n-1$ sedangkan untuk simpul lainnya memiliki derajat 1.

Graf bintang $K_{1,n}$ merupakan sebuah graf dengan jumlah simpulnya yakni $n + 1$ simpul, yang dimana salah satu simpul yang memiliki derajat n , yang diberi nama simpul pusat, dan untuk n simpul lainnya yang memiliki derajat satu, yang diberi nama simpul daun. (Irawati 2013) menyatakan bahwa Label simpul pusat untuk pelabelan total sisi ajaib graf bintang ialah simpul pusat 1, simpul pusat $n + 1$, dan simpul pusat $2n + 1$.

Penelitian terdahulu tentang himpunan kritis pada graf yaitu oleh (Imron 2005) dengan judul “Himpunan Kritis Pada Graf Cycle” menjadi acuan untuk meneliti “Himpunan Kritis Pada Graf Bintang”. Pada penelitian kali ini akan penerapan himpunana kritis yang dibahas ialah mencari himpunan kritis dari suatu pelabelan suatu graph. Graf bintang ialah graf yang akan dibahas pada penelitan ini.

1.2 Rumusan Masalah

Masalah yang diteliti dan diangkat pada pengerjaan penelitian ini ialah permasalahan bagaimana menentukan himpunan kritis pada Graf Bintang

1.3 Batasan Masalah

Dalam menghindari melebarnya permasalahan dan pembahasan yang akan disajikan, ialah:

1. Graf yang digunakan graf bintang $K_{1,n}$ dengan $n = 5$.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan diadakan penelitian ini ialah dapat memberikan label dan menentukan himpunan kritis pada graf bintang.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dilakukan penelitian ini yaitu:

1. Bagi penulis, hasil dari dilakukannya penelitian ini dapat berguna dalam memahami dengan lebih baik mengenai Himpunan Kritis pada Graf Bintang.
2. Bagi pembaca, hasil dari penelitian ini dapat dijadikan referensi dan acuan penelitian selanjutnya tentang simpul, himpunan kritis, khususnya pada graf bintang.
3. Bagi instansi lainnya, hasil dari penelitian ini dapat menjadikan acuan dalam penentuan pembelajaran yang berkaitan dengan materi graf bintang.

