BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Peran matematika sebagai suatu ilmu pada dasarnya tidak dapat dipisahkan dari ilmu lainnya. Dalam ilmu fisika, industri, ekonomi, keuangan, teknik sipil peran matematika terlibat di dalamnya. Satu hal yang membuat ilmu matematika berperan di dalamnya adalah mengenai pemodelan matematika. Banyak fenonema di dunia nyata yang sangat kompleks sehingga dibutuhkan penyederhanaan dari masalah tersebut.

Persamaan diferensial adalah salah satu ilmu matematika yang banyak digunakan untuk menjelaskan masalah – masalah fisis. Masalah - masalah fisis tersebut dapat dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial. Jika model matematika berbentuk persamaan diferensial, maka masalahnya adalah bagaimana menentukan solusi (penyelesaian) persamaan diferensial itu. Misalnya untuk persamaan diferensial dengan koefisien konstan akan sangat mudah untuk menentukan solusinya, tetapi dalam penerapannya, ada persamaan diferensial yang memiliki koefisien berupa variabel. Sebagai contoh persamaan diferensial berikut ini:

$$xY'' + (1-2x)Y' - 2Y = 0;\ Y(0) = 1,\ Y'(0) = 2 \tag{1}$$

Penyelesaian persamaan diferensial di atas dengan menggunakan persamaan karakteristik adalah, sebagai berikut:

Karena penyelesaian partikular tidak diketahui, maka diadakan subtitusi:

$$Y = e^u$$

$$Y' = e^u \frac{du}{dx}$$

$$Y'' = e^u \frac{d^2u}{dx^2} + e^u \left(\frac{du}{dx}\right)^2$$

Dengan demikian persamaan (1) dapat ditulis kembali menjadi:

$$x\left(e^u \frac{d^2u}{dx^2} + e^u \left(\frac{du}{dx}\right)^2\right) + (1-2x)\left(e^u \frac{du}{dx}\right) - 2e^u = 0$$

$$xe^u \frac{d^2u}{dx^2} + xe^u \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + e^u \frac{du}{dx} - 2xe^u \frac{du}{dx} - 2e^u = 0$$

$$x \frac{d^2u}{dx^2} + x\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{du}{dx} - 2x \frac{du}{dx} - 2 = 0 \quad (2)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusi: $\frac{du}{dx} = p \; dan \; \frac{d^2u}{dx^2} = p'$, ke persamaan (2) diperoleh:

$$x\frac{dp}{dx} + p^2x + p - 2px - 2 = 0$$

$$x\frac{dp}{dx} + p^2x - 2px + p - 2 = 0$$

$$x\frac{dp}{dx} + px(p-2) + (p-2) = 0$$

$$x\frac{dp}{dx} + (p-2)(px+1) = 0 \quad (3)$$

Lebih lanjut mensubstitusi:

$$px + 1 = q,$$

$$x\frac{dp}{dx} + p = \frac{dq}{dx}$$

$$x\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dx} - p$$

Ke dalam persamaan (3), diperoleh:

$$\frac{dq}{dx} - p + (p-2)(q) = 0$$

$$dq - pdx + (p-2)qdx = 0$$

Persamaan diferensial di atas tidak dapat diselesaikan karena tidak memiliki faktor integrasi.

Untuk menentukan solusi dari persamaan diferensial di atas (koefisien berupa variabel) dapat dilakukan dengan beberapa metode. Beberapa metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang koefisiennya berupa variabel yaitu dengan metode analitik dan numerik. Salah satu metode analitik yang digunakan adalah dengan pemakaian transformasi *Laplace* sedangkan untuk metode numerik diantaranya adalah menggunakan metode *Eurel*, metode *Runge-Kutta*, dan metode *Corrector.* (Prayudi, 2006: 233)

Suatu kelebihan metode transformasi Laplace adalah bahwa metode ini memungkinkan penggunaan teknik grafis untuk meramal kinerja sistem tanpa menyelesaikan persamaan diferensial sistem. Kelebihan lain metode transformasi Laplace adalah diperolehnya secara serentak baik komponen transien maupun komponen keadaan tunak.

(https://id.scribd.com/doc/186216197/Transformasi-Laplace)

Adapun penyelesaian dari persamaan diferensial di atas dengan menggunakan Transformasi Laplace adalah:

Dengan melakukan transformasi Laplace pada masing-masing bagian diperoleh:

$$L\{xY''\} + L\{(1-2x)Y'\} - L\{2Y\} = L\{0\}$$

$$L\{xY''\} + L\{Y'\} - L\{2xY'\} - L\{2Y\} = L\{0\}$$

$$-\frac{d}{ds}\{s^2y - sY(0) - Y'(0)\} + \{sy - Y(0)\} - 2\left(-\frac{d}{ds}\{sy - Y(0)\}\right) - 2y = 0$$

$$-\frac{d}{ds}\{s^2y - s - 2\} + \{sy - 1\} - 2\left(-\frac{d}{ds}\{sy - 1\}\right) - 2y = 0$$

$$\left(-s^2\frac{dy}{ds} - 2sy + 1\right) + (sy - 1) + 2\left(y + s\frac{dy}{ds}\right) - 2y = 0$$

$$(-s^2 + 2s)\frac{dy}{ds} - 2sy + 1 + sy - 1 + 2y - 2y = 0\{-s^2 + 2s\}\frac{dy}{ds} - sy = 0$$

$$\frac{dy}{y} + \frac{s\,ds}{s^2 - 2s} = 0$$

$$\frac{dy}{y} + \frac{ds}{s-2} = 0$$

Persamaan di atas merupakan persamaan diferensial tingkat satu derajat satu dengan variabel terpisah sehingga:

$$\int\frac{dy}{y} + \int\frac{ds}{s-2} = 0,$$

dan selesaian dari persamaan diperoleh:

$$y = \frac{1}{s-2}$$

Lebih lanjut, dengan mentransformasi balik (invers) hasil dari selesaian persamaan di atas, diperoleh:

$$Y = L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$$

$$Y = e^{2x}$$

Selesaian dari persamaan diferensial:

$xY'' + (1-2x)Y' - 2Y = 0;\ Y(0) = 1,\ Y'(0) = 2$ adalah:

$$Y = e^{2x}.$$

Untuk proses penyelesaian persamaan diferensial yang koefisiennya berupa variabel menggunakan metode transformasi Laplace, perlu diketahui terlebih dahulu sifat-sifat dari transformasi Laplace, sifat-sifat inversnya dan beberapa fungsi yang terlibat dalam transformasi Laplace.

Mengacu pada permasalahan di atas maka dalam penulisan ini akan dibahas solusi persamaan diferensial yang koefisiennya berupa variabel dengan menggunakan metode transformasi Laplace. Transformasi Laplace adalah operasi matematika yang dapat mentransformasikan persamaan diferensial yang koefisiennya berupa variabel menjadi persamaan diferensial biasa. Kemudian mentransformasikan balik untuk memperoleh penyelesaian dari persamaan diferensial parsial tersebut.

Selain penggunaannya dalam menyelesaikan solusi dari persamaan diferensial yang koefisiennya berupa variabel, penggunaan metode transformasi Laplace juga dapat digunakan untuk memecahkan persamaan rangkaian listrik yang berbentuk persamaan diferensial. Keunggulan lain yang diperoleh dari pemakaian transformasi Laplace dalam menyelesaiakan solusi dari persamaan diferensial adalah metode transformasi Laplace dapat dengan singkat menentukan solusi dari persamaan diferensial sehingga lebih mempersingkat pengerjaan dalam menentukan solusi dari persamaan diferensial tersebut.

Sudirham (2012:85) mengemukakan bahwa:

> "Untuk mencari solusi dari persamaan rangkaian harus mencari terlebih dahulu persamaan rangkaian di kawasan *t* sebelum perhitungan-perhitungan di kawasan *s* dilakukan. Dengan menggunakan transformasi Laplace pada rangkaian ini, maka perhitungan langsung bekerja di kawasan *s*, artinya persamaan rangkaian langsung dicari di kawasan *s* tanpa mencari persamaan rangkaian di kawasan *t* lebih dahulu. Sebagaimana telah diketahui, elemen dalam analisis rangkaian listrik adalah model dari piranti yang dinyatakan dengan karakteristik *i*-*v*-nya. Jika analisis dilakukan di kawasan *s* dimana $v(t)$ dan $i(t)$ ditransformasikan menjadi $\boldsymbol{V}(s)$ dan $\boldsymbol{I}(s)$, maka pernyataan elemenpun harus dinyatakan di kawasan *s*."

Mengacu pada deskripsi di atas maka dalam penulisan ini akan dibahas solusi/penyelesaian persamaan diferensial yang dengan menggunakan metode transformasi Laplace dan penggunaan transformasi Laplace untuk mencari solusi dari suatu persamaan rangkaian listrik LED seri.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian di atas, maka permasalahan yang timbul adalah "Bagaimana penyelesaian persamaan diferensial dalam kasus rangkaian listrik LED seri menggunakan metode transformasi Laplace untuk mendapatkan solusi secara singkat dari persamaan diferensial?"

1.3 Batasan Permasalahan

Untuk membatasi ruang lingkup penulisan skripsi ini, diberikan batasan-batasan, yaitu menyelesaikan masalah dalam menentukan solusi persamaan diferensial pada kasus rangkaian listrik LED seri menggunakan metode transformasi Laplace.

1.4 Tujuan Penelitian

Penulisan skripsi ini bertujuan untuk menyelesaikan persamaan diferensial dalam rangkaian listrik LED seri dengan mengunakan transformasi Laplace.

1.5 Manfaat Penelitian

Berdasarkan uraian di atas diperoleh manfaat, yaitu sebagai bahan rujukan dan membantu mahasiswa dalam memahami selesaian persamaan diferensial dengan menggunakan metode transformasi Laplace khususnya dalam kasus rangkaian listrik LED seri agar lebih mempersingkat solusi yang dihasilkan dari persamaan diferensial apabila diselesaikan menggunakan metode transformasi Laplace.