MATEMATIKA EKONOMI

CASE METHODE

EDISI 2

Tiur Malasari Siregar S.Pd, M.Si
Arnah Ritonga S.Si, M.Si
Dr. Dede Ruslan M.Si
Novita Indah S.Pd, M.Pd

Buku Matematika Ekonomi Case Methode Edisi Dua

Penulis:

Tiur Malasari Siregar S.Pd, M.Si
Arnah Ritonga S.Si, M.Si
Dr. Dede Ruslan M.Si
Novita Indah S.Pd, M.Pd

Editor

Julia Ningsih Nasution
Ratna Ardita Sari
Ade Wahyuni Siregar

ISBN : 978-623-5951-13-3

Medan. Juli 2022

Penerbit Lembaga Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat (LPPM) UNIMED
Jalan Willem Iskandar Psr.
V, Medan Telp. (061)
6613365, 6613276, 6618754
Fax (061) 6614002 – 6613319
Email: lppm@unimed.ac.id

DAFTAR ISI

KATA PENGATAR

Segala Puji dan Syukur kami panjatkan selalu kepada Tuhan Yang Maha Esa atas Rahmat, Taufiq, dan Hidayah yang sudah diberikan sehingga kami bisa menyelesaikan buku Matematika Ekonomi dengan tepat waktu. Buku matematika case methode edisi dua ini merupakan buku yang di kembangkan dan lebih lengkap dari buku edisi pertama. Pembahasan materi dan soal soal yang di masukkan dalam buku edisi ke dua ini telah berbasis case methode dalam setiap meteri. Banyaknya pengembangan dalam buku ini membuatnya sangat berguna bagi mahasiswa yang sedang mengambil matakuliah matematika ekonomi sebab materi-materi yang disajikan berbasis masalah perekonomian. Buku ini dapat digunakan sebagai bahan ajar pada tingkat sarjana sebagai bahan tambahan bagi mahasiswa yang ingin memperdalam materi matematika ekonomi.

Dengan penuh kesadaran bahwa buku matematika ekonomi ini masih perlu disempurnakan lagi, serta saran dan kritik untuk penyajian serta isinya sangat di perlukan. Kami sadar bahwa penulisan buku ini bukan merupakan buah hasil kerja keras kami sendiri. Ada banyak pihak yang sudah berjasa dalam membantu kami didalam menyelesaikan buku ini, seperti penulisan buku, editing buku, Pembuatan soal dan lain-lain. Maka dari itu, kami mengucapkan banyak terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu memberikan wawasan dan bimbingan kepada kami sebelum maupun ketika menulis buku ini.

Medan, Juli 2022

Tim Penulis

APA ITU MATEMATIKA EKONOMI

A. Apa itu matematika ekonomi?

Kata matematika berasal dari Bahasa Yunani yaitu *mathema* = pengetahuan dan kata kerja *manthanein* = belajar serta *maithema* yang artinya sains, ilmu pengetahuan. Oleh karena itu secara umum matematika ekonomi merupakan penerapan metode matematika untuk menganalisis dan melakukan pendekatan dalam ilmu ekonomi. Kata ekonomi berasal dari Bahasa Yunani klasik $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha$yang artinya mata pelajaran dan sering juga diartikan dengan household management.

Ekonomi merupakan salah satu jenis ilmu sosial dengan penerapannya dalam kehidupan sehari-hari tidak terlepas dari penggunaan konsep pada matematika untuk perhitungan yang relevan dengan pemecahannya. Sehingga matematika dan ilmu ekonomi adalah dua hal yang berhubungan.

Matematika ekonomi adalah ilmu terapan dan teoritis yang bertujuan untuk mendeskripsikan objek ekonomi, proses, dan fenomena yang diformalkan secara matematis. Dalam matematika ekonomi sifat-sifat model dipelajari berdasarkan formalisasi konsep dan gagasan ekonomi. Selain itu, tema keberadaan nilai ekstrem parameter tertentu terbukti, sifat negara keseimbangan, dan lintasan pertumbuhan keseimbangan dipelajari. Matematika ekonomi menggunakan prinsip dan metode matematika untuk menciptakan teori ekonomi dan untuk penelitian ekonomi. Sehingga matematika ekonomi merupakan konsep matematika yang mampu mengekspresikan konsep ekonomi dan permasalahannya serta menemukan pemecahannya.

Perbedaan Matematika Ekonomi dan Matematika Murni

a. Untuk mempelajari matematika ekonomi penguasaan terhadap matematika murni harus dimiliki terlebih dahulu

b. Matematika murni digunakan sebagai dasar untuk mempelajari matematika ekonomi

c. Tidak semua materi dalam matematika murni digunakan dalam matematika ekonomi, yang paling sering digunakan adalah deret, fungsi, kalkulus, dan matriks

d. Penggunaan symbol pada matematika murni umumnya menggunakan variable x, y, dan z yang tidak mempunyai makna khusus, didefinisikan sekedar pada apa yang dibahas. Sedangkan pada matematika ekonomi variable yang digunakan berhubungan dengan istilah pada ekonomi dan memiliki makna secara khusus contoh (P=price), kuantitas (Q=quantity), biaya (C=cost), tabungan (S=saving), dan lain-lainnya.

e. Nilai-nilai variable pada matematika ekonomi diasumsikan non-negatif ataupun harus positif, sedangkan nilai variable pada matematika murni dapat bernilai positif dan negative.

Matematika ekonomi bukan merupakan cabang tersendiri dalam ilmu ekonomi, namun lebih kepada pendekatan yang digunakan untuk analisis ekonomi menggunakan simbol dan dalil matematis yang membantu dalam pembahasan. Penggunaan pendekatan matematis dalam matematika ekonomi mempunyai beberapa keunggulan, yaitu

a. Bahasa yang digunakan lebih ringkas dan tepat karena penggunaan symbol dan istilah matematis
b. Kaya akan dalil-dalil matematis sehingga lebih mempermudah pemakaiannya
c. Mendorong kita membuat asumsi secara jelas sebagai prasyarat dalam menggunakan dalil matematis agar dapat terhindar dari asumsi implisit yang tidak diinginkan
d. Memungkinkan untuk menyelesaikan kasus dengan n variable

B. Mengenal lebih dekat matematika ekonomi

Secara umum semakin semakin kompleks suatu permasalahan yang ada maka semakin kompleks juga alat yang digunakan untuk memecahkannya. Dalam ilmu ekonomi salah satu alat yang digunakan untuk menganalisis permasalahan kompleks tersebut adalah matematika. Model ekonomi yang ditransformasikan ke model matematika akan mengakibatkan perubahan tingkat kesulitan pemecahan masalah. Tingkat kesulitan masalah yang berubah tidak disebabkan oleh ilmu matematika melainkan karena sulit dan kompleksnya gejala penyelesaian masalah ekonomi yang ada. Akibat adanya transformasi tersebut, model ekonomi kualitatif dapat diselesaikan secara kuantitatif.

1) Model-Model Matematika Ekonomi

Model-model matematika merepresentasikan masalah yang menunjukkan hubungan antar simbol atau hubungan matematis. Tujuan dari adanya model matematika pada matematika ekonomi adalah untuk memungkinkan dilakukan proses pengambilan keputusan mengenai situasi nyata dengan menganalisis model yang ada. Nilai kesimpulan dan keputusan berdasarkan model tergantung pada seberapa baiknya model matematika dapat merepresentasikan masalah sesuai kondisi nyata.

Unsur-unsur dalam model matematika ekonomi terdiri dari:

a. Variable, konstanta dan parameter

Variable merupakan sesuatu yang besarnya dapat berubah dan dinyatakan dengan symbol tertentu. Variable yang sering digunakan dalam ekonomi adalah harga, laba, pendapatan, biaya, pendapatan nasional, konsumsi, investasi, impor, dan ekspor. Contohnya harga bisa disimbolkan dengan variable P, laba dengan π, pendapatan dengan R, biaya dengan C, dan penadapatan nasional dengan Y. tetapi Ketika nilai P, R, maupun C sudah ditentukan maka nilai variable tersebut sudah tertentu, seperti P = 4, R = 10, dan C = 20.

Variabel terdiri dari dua macam yaitu variable endogen dan variable eksogen. Variable endogen adalah variable yang nilai penyelesaiannya dicari melalui model ekonomi (diperoleh dari dalam), sedangkan variable eksogen adalah variable yang berasal dari luar model ekonomi yang ada contohnya melalui data yang disajikan. Misalnya dalam analisis penentuan harga beras (P), variable P merupakan variable endogen, namun karena merupakan harga konsumsi perorangan maka P merupakan variable eksogen.

Konstanta merupakan lawan dari variable yaitu besaran yang tidak bisa berubah. Biasanya variable akan muncul dengan kombinasi angka didepannya, seperti 0,8P atau 1,5R sehingga angka tersebutlah yang disebut dengan konstanta.

Parameter atau disebut juga konstanta yang variable merupakan bilangan konstanta tertentu yang belum ditentukan nilainya, contohnya aP. Secara umum konstanta parametrik disimbolkan dengan a, b, c atau α, β, γ tetapi symbol lain juga diperbolehkan asalkan berbeda dengan variable yang ada. Konstanta parametrik atau parameter merupakan variable eksogen karena diperlakukan sebagai tertentu dalam model ekonomi.

b. Persamaan dan identitas

Ada 3 (tiga) macam persamaan dalam ilmu ekonomi:

1. Persamaan definisi (definitional equation)

Persamaan definisi membentuk identitas antara dua pernyataan dengan arti yang sama persis dengan tanda yang biasa digunakan adalah $\equiv$ namun ada juga yang menggunakan tanda =. Contohnya persamaan laba, total laba adalah selisih antara total pendapatan dan total biaya

$$\pi \equiv R - C$$

a. Persamaan perilaku (behavioral equation)

Persamaan perilaku menunjukkan perilaku yang merupakan tanggapan dari suatu variable dengan variable lainnya. Persamaan ini dapat membahas perilaku yang menyangkut manusia maupun perilaku yang tidak menyangkut manusia. Contohnya pola konsumsi secara keseluruhan dalam hubungannya dengan pendapatan nasional (perilaku menyangkut manusia) dan bagaimana total biaya terhadap perubahan output (perilaku tidak menyangkut manusia). Namun, sebelum menulis persamaan perilaku asumsi-asumsi dari variable yang ada harus dijelaskan terlebih dahulu.

b. Persamaan bersyarat (conditional equation)

Persamaan bersyarat merupakan persamaan yang memiliki syarat yang harus dipenuhi. Contohnya adalah persamaan yang melibatkan konsep ekuilibrium yang masing-masing membahas ekuilibrium model pasar dan ekuilibrium model pendapatan nasional, yaitu

$Q_d = Q_s$ (jumlah yang diminta = jumlah yang ditawar)

$S = I$ (tabungan yang diharapkan = investasi yang diharapkan)

2) Model-Model Ekonomi

Model-model ekonomi merupakan abstraksi terhadap hubungan ekonomi untuk menyelesaikan masalah ekonomi yang kompleks. Model ekonomi dibentuk untuk mempelajari tingkah laku variable ekonomi yang berhubungan dengan kegiatan ekonomi, seperti kegiatan produksi, konsumsi, dan distribusi barang maupun jasa. Bentuk-bentuk model ekonomi terdiri dari:

a. Fungsi Matematis

Seperti halnya dalam ilmu matematika dimana soal cerita dapat dibentuk kedalam fungsi yang terdiri dari beberapa variable dan bentuk persamaan, begitu juga dengan pada matematika ekonomi. Namun, fungsi matematis dalam ekonomi menggunakan variable yang berhubungan dengan istilah ekonomi yang digunakan.

Contoh:

$$\pi = TR - TC$$

Dengan π merupakan variable keuntungan, TR adalah total pendapatan, dan TC adalah total biaya yang dikeluarkan

b. Model Tabel

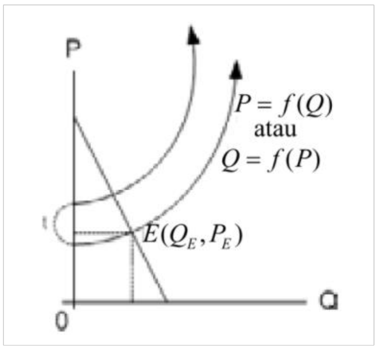
Dalam ilmu ekonomi, untuk menggambarkan hubungan tingkah laku tidak hanya cukup dengan fungsi matematis saja namun terkadang diperlukan juga digambarkan dalam ilustrasi tabel. Sebagai contoh

Input/Output	1	2	…j	n	Permintaan akhir	Output total
1	m_{11}	m_{12}	m_{1j}	m_{1n}	b_1	X_1
2	m_{21}	m_{22}	m_{2j}	m_{2n}	b_2	X_2
$\vdots$i	m_{i1}	m_{i2}	m_{ij}	m_{in}	b_i	X_i
n	m_{n1}	m_{n2}	m_{nj}	m_{nn}	b_n	X_n
N. tambahan	(Y_1)	(Y_2)	(Y_j)	(Y_n)	$b_n + 1$	$X_n + 1$
T. keluaran	(X_1)	(X_2)	(X_j)	(X_n)	$X_n + 1$	X

Berdasarkan tabel diatas, m_{ij} menyatakan output dari sektor i yang digunakan sebagai output pada sektor j. Sedangkan b_i menunjukkan permintaan akhir pada sektor i. x_i menunjukkan nilai tambah pada sektor j yang juga merupakan output total pada sektor j.

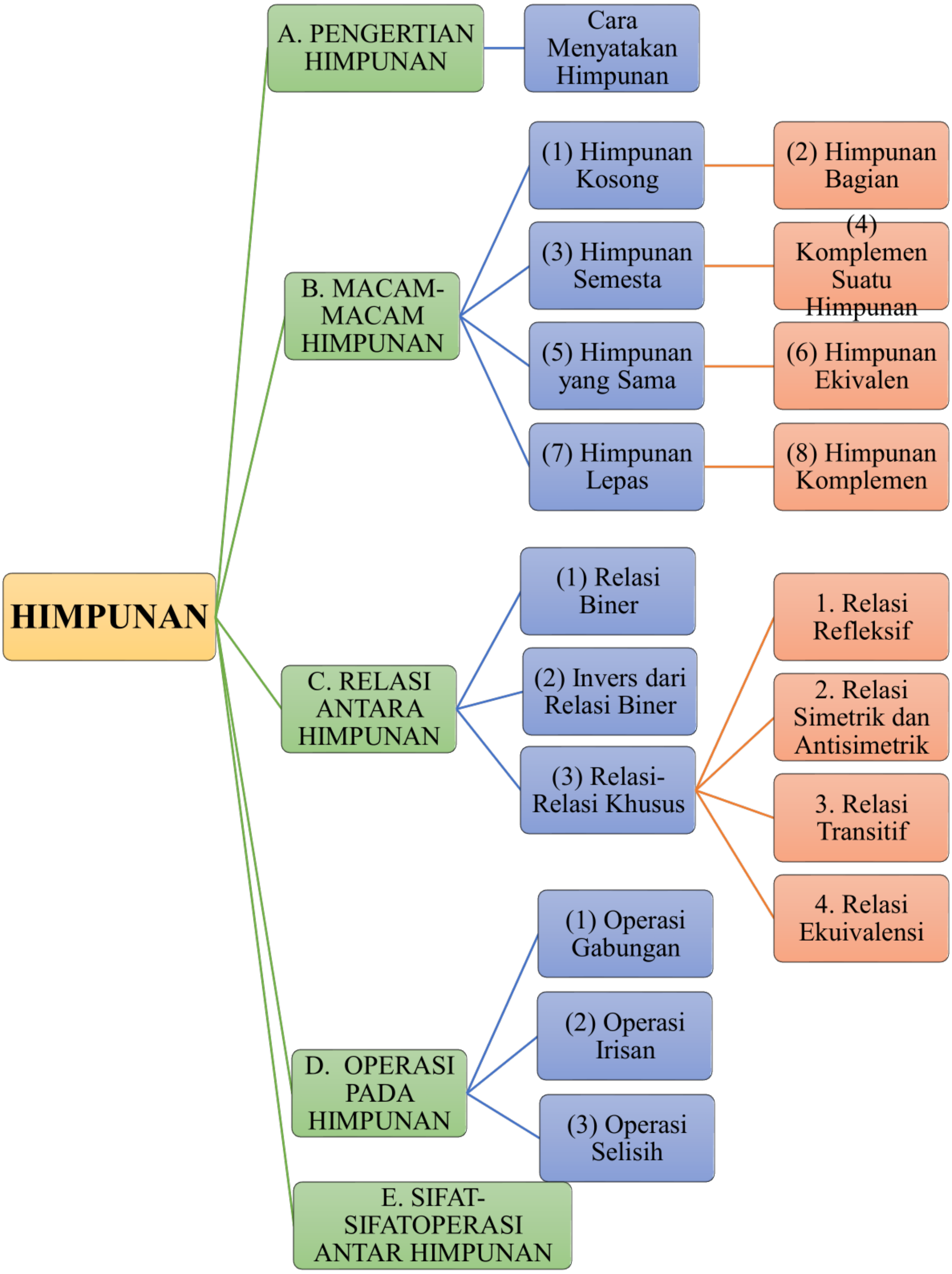
c. Model Grafik

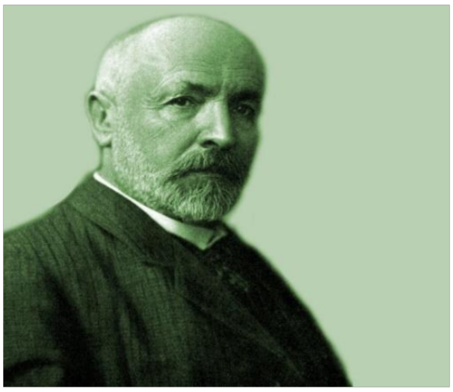
Selain bentuk fungsi matematis dan tabel, grafik juga digunakan sebagai salah satu ilustrasi yang menunjukkan hubungan tingkah laku ekonomi. Contohnya adalah grafik yang menyatakan hubungan antara $Q_d = Q_s$



Gambar 1. Grafik Keseimbangan Pasar 1

BAB I
HIMPUNAN





Georg Cantor (1845 -1918 M)

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (3 Maret [OS 19 Februari] 1845 - 6 Januari 1918) adalah seorang ahli matematika Jerman. Dia menciptakan teori himpunan, yang telah menjadi teori fundamental dalam matematika. Penyanyi menetapkan pentingnya korespondensi satu-ke-satu antara anggota dua himpunan, menetapkan himpunan tak hingga dan teratur, dan membuktikan bahwa bilangan real lebih banyak daripada bilangan asli. Faktanya, metode Cantor untuk membuktikan teorema ini menyiratkan adanya "ketidakterbatasan yang tak terbatas". Dia mendefinisikan bilangan pokok dan urut dan aritmatika mereka. Karya Cantor sangat menarik secara filosofis, sebuah fakta yang sangat disadarinya.

Teori Cantor tentang bilangan transfinite pada awalnya dianggap sangat berlawanan dengan intuisi - bahkan mengejutkan - bahwa ia menghadapi perlawanan dari orang-orang sezaman matematika seperti Leopold Kronecker dan Henri Poincaré dan kemudian dari Hermann Weyl dan LEJ Brouwer, sementara Ludwig Wittgenstein mengajukan keberatan filosofis. Penyanyi, seorang Lutheran yang taat, percaya bahwa teori itu telah dikomunikasikan kepadanya oleh Tuhan. Beberapa teolog Kristen (terutama neo-Skolastik) melihat karya Cantor sebagai tantangan terhadap keunikan ketidakterbatasan absolut dalam kodrat Tuhan pada satu kesempatan menyamakan teori bilangan transfinite dengan panteisme sebuah proposisi yang ditolak dengan keras oleh Cantor.

Keberatan terhadap karya Cantor kadang-kadang sengit: Oposisi publik dan serangan pribadi Leopold Kronecker termasuk menggambarkan Cantor sebagai "penipu ilmiah", "pemberontak" dan "koruptor pemuda". Kronecker keberatan dengan bukti Cantor bahwa bilangan aljabar dapat dihitung, dan bahwa bilangan transendental tidak dapat dihitung, hasilnya sekarang dimasukkan dalam kurikulum matematika standar. Menulis beberapa dekade setelah kematian Cantor, Wittgenstein menyesalkan bahwa matematika "ditunggangi melalui dan melalui idiom merusak teori himpunan", yang ia anggap sebagai "omong kosong" yang "menggelikan" dan "salah". Serangan depresi berulang dari penyanyi dari tahun 1884 hingga akhir hidupnya telah disalahkan pada sikap bermusuhan dari banyak orang sezamannya, meskipun beberapa telah

A. PENGERTIAN HIMPUNAN

Gambar 1 Susunan barang di mini market

Pada saat hendak berbelanja di mini market, kita akan melihat susunan barang yang sejenis ditempatkan pada tempat yang sama. Pastinya tindakan tersebut memiliki tujuan tertentu, yaitu agar mempermudah pembeli mencari barang.

Ilustrasi tersebut menggambarkan bagaimana himpunan terdapat dalam kehidupan sehari-hari. Gerorg Cantor dianggap sebagai Bapak teori himpunan. Secara sederhana himpunan diartikan sebagai sekumpulan obyek (konkret maupun abstrak) yang mempunyai kesamaan sifat tertentu. Himpunan merupakan kumpulan benda-benda atau objek-objek yang didefinisikan dengan jelas. Istilah didefinisikan dengan jelas mengandung makna obyek tersebut secara jelas dapat ditentukan sebagai suatu anggota himpunan yang dimaksud atau tidak. Anggota atau elemen adalah benda-benda atau objek-objek yang termasuk dalam sebuah himpunan.

Contoh yang merupakan himpunan:

- Himpunan anak yang berusia 12 tahun
- Himpunan bilangan asli genap

Contoh yang bukan merupakan himpunan:

- Himpunan anak-anak malas
- Himpunan wanita-wanita cantik

Himpunan biasanya dilambangkan dengan huruf besar, misalnya A,B,C, dst. Obyek-obyek yang merupakan anggota dari suatu himpunan disebut anggota atau elemen dari himpunan itu, dan dilambangkan dengan huruf kecil, misalnya a,b,c,dst. Suatu elemen yang merupakan anggota dari suatu himpunan dinyatakan dengan notasi $\in$ (epsilon). Sedangkan untuk menyatakan bukan anggota dari suatu himpunan dinyatakan dengan $\notin$. Notasi $a \in A$ menunjukkan bahwa a adalah elemen dari himpunan A dan notasi $a \notin A$ menunjukkan bahwa a bukan merupakan elemen dari himpunan A. Karena himpunan-himpunan bilangan seringkali dipakai dalam matematika, maka himpunan-himpunan itu biasanya disajikan dengan lambang tertentu sebagai berikut:

$\mathbb{N}$ adalah himpunan semua bilangan asli (bilangan bulat positif)

$\mathbb{Z}$ adalah himpunan semua bilangan bulat

$\mathbb{Q}$ adalah himpunan semua bilangan rasional

$\mathbb{R}$ adalah himpunan semua bilangan Real

$\mathbb{C}$ adalah himpunan semua bilangan kompleks

Cara Menyatakan Himpunan

1. Cara menyatakan suatu himpunan dengan menuliskan satu per satu lambang anggota-anggotanya di antara tanda kurung kurawal. Cara ini biasanya dipakai untuk himpunan-himpunan yang diskret.

   Contoh:

   A = {a,b,c,d,e}

   B = {Jakarta, Tokyo, Melbourne, Amsterdam, Kairo, Boston}

   $\mathbb{N}$ = {1,2,3,4,5,….}

2. Dengan cara menyatakan syarat yang harus dipenuhi oleh elemen – elemen himpunan semesta untuk menjadi anggota himpunan itu (syarat itu disebut dengan *syarat keanggotaan* dari himpunan yang bersangkutan).

   Contoh :

   A = $\{x|x$ adalah salah satu dari lima huruf pertama dalam abjad$\}$

   D = $\{x|x$ adalah mahasiswa program studi matematika USD$\}$

   $\mathbb{Z}$ = $\{x|x$ adalah bilangan bilangan bulat$\}$

   $\mathbb{N}$ = $\{x|x \in \mathbb{Z} \wedge x > 0\}$

3. Dengan cara menyebutkan syarat anggota-anggotanya, disebut juga cara Deskripsi.

Contoh:

Ambil bilangan asli kurang dari 5

A = bilangan asli kurang dari 5

4. Himpunan juga dapat di sajikan secara grafis (Diagram Venn), Penyajian himpunan dengan diagram Venn ditemukan oleh seorang ahli matematika Inggris bernama John Venn tahun 1881. Himpunan semesta digambarkan dengan segiempat dan himpunan lainnya dengan lingkaran di dalam segiempat tersebut.

B. MACAM-MACAM HIMPUNAN

(1) Himpunan Kosong

Himpunan kosong dapat terjadi jika suatu himpunan sama sekali tidak memuat anggota, misalnya himpunan bilangan real yang kuadratnya adalah bilangan negatif. Himpunan kosong dilambangkan dengan $\emptyset$ atau { }.Suatu himpunan yang hanya memuat satu elemen disebut *himpunan elemen tunggal* (singleton). Misalnya himpunan A = {1} adalah suatu himpunan elemen tunggal.

Contoh :

1. A = $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \ \wedge x < 0\} = \emptyset$
2. B = $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \wedge x \leq 0\} = \{0\}$

(2) Himpunan Bagian

Suatu himpunan A dalam semesta X dikatakan merupakan *himpunan bagian (sub himpunan)* dari himpunan B, dituliskan dengan notasi : $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ Syarat suatu himpunan dikatakan sebagai himpunan bagian ialah jika dan hanya jika :

1. Setiap anggota himpunan A merupakan anggota himpunan B, dinotasikan seperti : $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \Leftrightarrow (\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X})\mathbf{x} \in \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{B}.$
2. Paling tidak ada satu buah anggota himpunan B yang bukan merupakan anggota himpunan A.

(3) Himpunan Semesta

Himpunan semesta atau semesta pembicaraan yaitu himpunan yang memuat semua anggota ataupun objek himpunan yang dibicarakan. Himpunan semesta (semesta pembicaraan) umumnya dilambangkan dengan S atau U.

Contoh:

Kalau kita membahas mengenai 1, ½, -2, -½,… maka semesta pembicaraan kita yaitu bilangan real. Jadi himpunan semesta yang dimaksud adalah R. Apakah hanya R saja? Jawabannya tidak. Tergantung kita mau membatasi pembicaraanya. Pada contoh di atas bisa saja dikatakan semestanya adalah C (himpunan bilangan kompleks). Namun kita tidak boleh mengambil Z (himpunan bilangan bulat) sebagai semesta pembicaraan.

(4) Komplemen suatu himpunan

Jika S himpunan semesta dan A suatu himpunan yang terkandung dalam S, maka yang dimaksud dengan komplemen dari A adalah anggota himpunan S yang bukan anggota himpunan A. Notasi komplemen A adalah A^C atau A'.

Contoh :

1. A = {1, 2, 3}
   S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
   maka, A^C = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
2. P = {1, 3, 5}
   S = {1, 3, 5, 7, 9, 11}
   maka, P^C = {7, 9, 11}

(5) Himpunan yang sama

Dua himpunan A dan B disebut sama, jika setiap anggota A adalah juga anggota B dan sebaliknya setiap anggota B juga merupakan anggota dari A. Notasinya A = B.

Contoh :

1. A = {1, 2, 3, 4 }
   B = {4, 3, 2, 1}

maka, A = B

2. P = {a, b, c}

   Q = {a, b, c, d}

   maka, $P \neq Q$

(6) Himpunan ekivalen (Setara)

Himpunan A dikatakan ekivalen dengan himpunan B, jika jumlah anggota himpunan A sama dengan jumlah anggota himpunan B maka $A \sim B$, jika n(A) = n(B).

Contoh :	maka:
A = { a, b, c }	n (A) = 3
B = { apel, pir, alpukat }	n (B) = 3
C = { 1, 3, 5 }	n (C) = 3
	Jadi A ~ B ~ C

(7) Himpunan Lepas

Himpunan lepas adalah suatu himpunan yang anggotanya tidak ada yang sama.

Contoh :

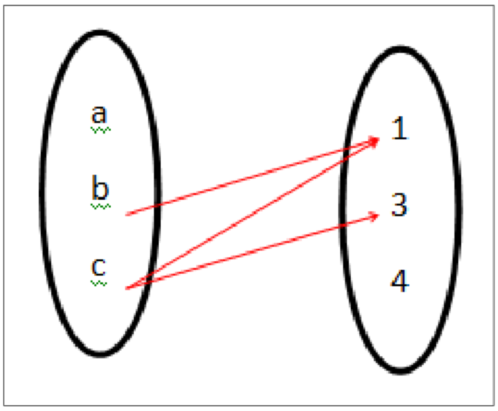
C = {1, 3, 5, 7}

D = {2, 4, 6}

Maka himpunan C dan himpunan D saling lepas. Catatan : Dua himpunan yang tidak kosong dikatakan saling lepas jika kedua himpunan itu tidak mempunyai satu pun anggota yang sama

C. RELASI ANTARA HIMPUNAN

Pada umumnya relasi terjadi antara elemen-elemen dalam satu himpunan dengan elemen-elemen dalam himpunan lainnya.Misalnya diketahui dua buah himpunan bilangan X = { 1,2,3} dan Y = {2,3,4}, dan relasi "lebih besar atau sama dengan", antara elemen- elemen dalam himpunan X dengan elemen-elemen dalam himpunan Y. Ada beberapa cara untuk menyatakan relasi semacam itu. Cara pertama ialah dengan menggunakan *diagram panah*, dimana elemen di X yang berelasi dengan elemen di Y di hubungkan dengan suatu anak panah (ruas garis berarah), sebagai berikut :



Gambar 2 Diagram Panah

(1) Relasi Biner

Secara Matematis, *relasi biner* R antara elemen – elemen dalam himpunan X dengan elemen elemen dalam himpunan Y di definisikan sebagai himpunan bagian dari darab Cartesius X < Y, yaitu : $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{X}\ \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{Y}$. Relasi R antara elemen-elemen dalam himpunan X dengan elemen – elemen dalam himpunan Y seringkali juga disebut *relasi R darri Himpunan X ke himpunan Y*. Jika elemen $x \in X$ berelasi dengan $y \in Y$, maka hal itu dinyatakan dengan lambang : $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{R}$ Atau kadang – kadang dengan lambang : $\boldsymbol{xRy}$. Sebaliknya, jika elemen $x \in X$ tidak berelasi R dengan elemen $y \in Y$ maka hal itu dinyatakan dengan lambang : $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \notin \boldsymbol{R}$

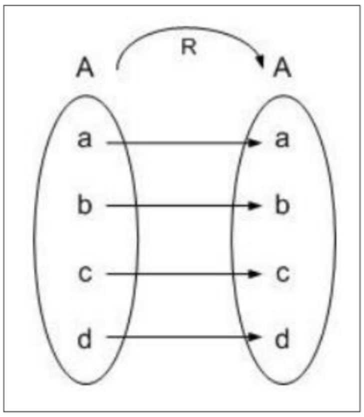
(2) Invers dari Relasi Biner

Karena relasi itu pada dasarnya adalah himpunan, maka operasi-operasi (komplemen, gabungan, irisan, selisih) dan konsep-konsep lainnya (himpunan bagian, kesamaan, dan lain-lain) pada himpunan juga dapat diterapkan pada relasi. Bila R adalah relasi biner antara elemen-elemen dalam himpunan X dengan elemen-elemen dalam himpunan Y(relasi dari himpunan X ke himpunan Y) maka *invers* dari relasi R, di notasikan dengan R^{-1} adalah relasi antara elemen-elemen dalam himpunan y dengan elemen-elemen dalam himpunan X (relasi dari himpunan Y ke himpunan X) dengan (x, y) $\in R^{-1}$ aksen bila dan hanya bila (y, x) $\in R$ jadi : $\boldsymbol{R}^{-1} = \{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) | \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{R}\}$

(3) Relasi – Relasi Khusus

1. RELASI REFLEKSIF

Misalkan $R \subseteq X \times X$ adalah suatu relasi pada himpunan X. Relasi R itu dikatakan refleksif bila dan hanya bila **:** $(x, x) \in R$**.** Untuk setiap $x \in X$. Dengan kata lain, relasi R pada himpunan X bersifat refleksif jika setiap elemen dalam X berelasi R dengan dirinya sendiri. R disebut relasi refleksif, jika setiap A berlaku (a,a)R. Dengan kata lain, R disebut relasi refleksif jika tiap-tiap anggota pada A berelasi dengan dirinya sendiri.



Gambar 3 Diagram Venn Relasi Refleksif

Sifat refleksif memberi beberapa ciri khas dalam penyajian suatu relasi, yaitu :

- Relasi yang bersifat refleksif mempunyai matriks yang unsur diagonal utamanya semua bernilai 1, atau mii = 1, untuk i = 1, 2, …, n.
- Relasi yang bersifat refleksif jika disajikan dalam bentuk graf berarah maka pada graf tersebut senantiasa ditemukanloop setiap simpulnya.

Contoh :

Misalkan A = {1, 2, 3, 4}, dan relasi R adalah relasi "≤ " yang didefinisikan pada himpunan A, maka :

R = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)}

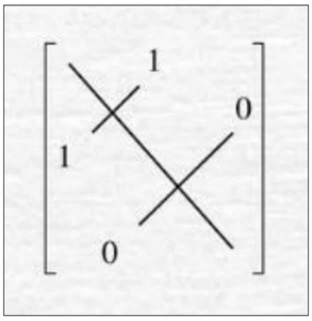
Terlihat bahwa (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) merupakan unsur dari R. Dengan demikian R dinamakan bersifat refleksif.

2. RELASI SIMETRIK DAN ANTISIMETRIK

Relasi R pada himpunan X dikatakan *simetrik* jika dan hanya jika $(x, y) \in R, \text{maka } (y, x) \in R$. Untuk setiap x dan y $\in X$. Dengan kata lain, relasi R pada himpunan X bersifat simetrik apabila untuk setiap x dan y $\in X$, jika x berelasi R dengan y, maka y berelasi R dengan x. Relasi R pada himpunan X dikatakan antisimetrik bila dan hanya bila Jika $(x, y) \in R, dan\ (y, x) \in R, maka\ x = y$. Dengan kata lain, relasi R pada himpunan X bersifat antisimetrik apabila untuk setiap x dan y $\in X$, jika x berelasi R dengan y, y berelasi R dengan x, maka x = y.

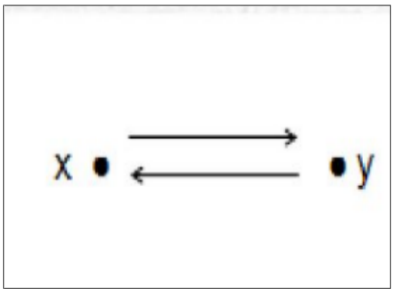
Sifat simetri dan anti simetri memberikan beberapa ciri khas dalam penyajian berbentuk matriks maupun graf, yaitu :

- Relasi yang bersifat simetri mempunyai matriks yang unsur-unsur di bawah diagonal utama merupakan pencerminan dari elemen-unsurdi atas diagonal utama, atau mij = mji = 1, untuk i = 1, 2, …, n dan j = 1, 2, …, n adalah :



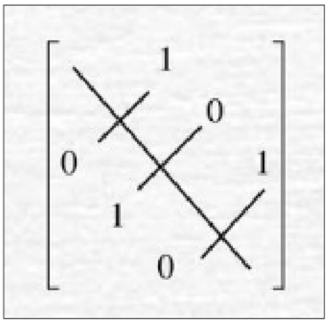
Gambar 4 Matriks relasi simetri

- Relasi yang bersifat simetri, jika disajikan dalam bentuk graf berarah mempunyai ciri bahwa jika ada busur dari x ke y, maka juga ada busur dari y ke x.



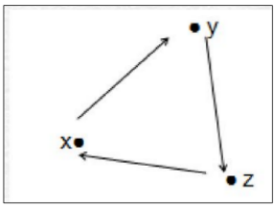
Gambar 5 *Graf Relasi Simetri*

- Relasi yang bersifat anti simetri mempunyai matriks yang unsur mempunyai sifat yaitu jika mij = 1 dengan i ≠ j, maka mji = 0. Dengan kata lain, matriks dari relasi anti simetri adalah jika salah satu dari mij = 0 atau mji = 0 bila i ≠ j :



Gambar 6 Matriks relasi asimetri

- Sedangkan graf berarah dari relasi yang bersifat anti simetri mempunyai ciri bahwa tidak akan pernah ada dua busur dalam arah berlawanan antara dua simpul berbeda.



Gambar 7 Graf Relasi Antisimetri

Contoh :

Misalkan R suatu relasi pada himpunan bilangan asli yang didefinisikan “y habis dibagi oleh x”, maka R merupakan relasi anti simetrik, sebab jika b habis dibagi a dan a habis dibagi b, maka a = b.

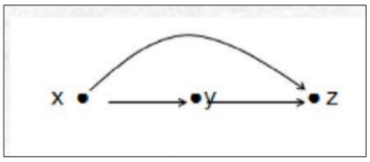
Misalkan A = {1, 2, 3} dan R1= {(1,1), (2,1), (2,2), (2,3), (3,2)}, maka R1 bukan relasi anti simetrik, sebab (2,3)R1dan (3,2)R1.

3. RELASI TRANSITIF

Relasi R pada himpunan X dikatakan bersifat transitif bila dan hanya bila $(x, y) \in R, dan\ (y, z) \in R, maka\ (x, z) = R$. Dengan kata lain, relasi R pada himpunan X bersifat transitif apabila untuk setiap x, y, dan $z \in X$, jika x berelasi R dengan y dan y berelasi R dengan z, maka x berelasi R dengan z. Suatu relasi R pada himpunan A dinamakan bersifat transitif jika (a, b) ∈ R dan (b, c) ∈ R, maka (a, c) ∈ R, untuk a, b,c ∈ A.

Sifat transitif memberikan beberapa ciri khas dalam penyajian suatu relasi, yaitu : sifat transitif pada graf berarah ditunjukkan oleh :

- Jika ada busur dari x ke y dan busur dari y ke z, maka juga terdapat busur berarah dari a ke z.



Gambar 8 ***Graf Relasi Transitif***

- Pada saat menyajikan suatu relasi transitif dalam bentuk matriks, relasi transitif tidak mempunyai ciri khusus pada matriks representasinya.

Contoh :

Misalkan A = { 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, dan relasi R didefinisikan oleh : a R b jika dan hanya jikan a membagi b, dimana a, b ∈ A,

Jawab :

Dengan memperhatikan definisi relasi R pada himpunan A, maka :

R = {(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 3), (3, 6), (3, 9), (4, 4), (4, 8)}

Ketika (2, 4) ∈ R dan (4, 8) ∈ R terlihat bahwa (2, 8) ∈ R.

Dengan demikian R bersifat transitif.

D. OPERASI PADA HIMPUNAN

Operasi himpunan adalah aturan untuk menghasilkan himpunan dari satu atau lebih himpunan yang diketahui.Operasi dengan satu himpunan disebut operasi *uner*, sedangkan operasi dengan dua himpunan disebut dengan operasi *biner. Komplemen* dari himpunan A dalam semesta X, dengan notasi A', adalah himpunan semua anggota semesta yang bukan anggota himpunan A, yaitu $\boldsymbol{A' = \{x \in X \mid x \notin A\}}$**.** Sebagai contoh, jika A adalah himpunan semua orang laki – laki dalam semesta himounan semua manusia, maka A' adalah himpunan semua orang perempuan. Kalau B adalah himpunan semua bilangan bulat positif dalam semesta himpunan semua bilangan bulat, maka B' adalah himpunan semua bilangan bulat negatif atau nol.

(1) Operasi Gabungan (Union) dua buah himpunan A dan B, dengan notasi $\boldsymbol{A \cup B}$. Adalah himpunan semesta elemen dalam semesta yang merupakan anggota himpunan A atau anggota himpunan B, yaitu: $\boldsymbol{A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}}$**.**

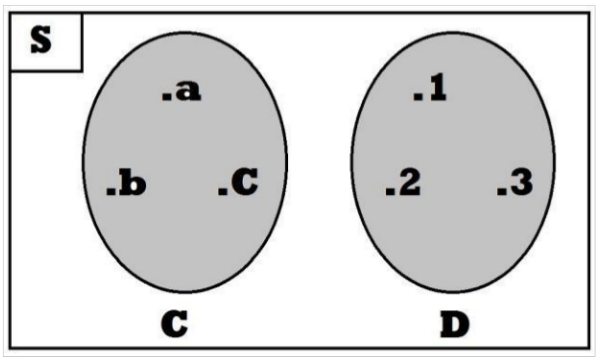
Contoh :

1. C = {a, b, c}

   D = {1, 2, 3}

   Maka C ∪ D = { 1, 2, 3, a, b, c }

   Diagram venn-nya:



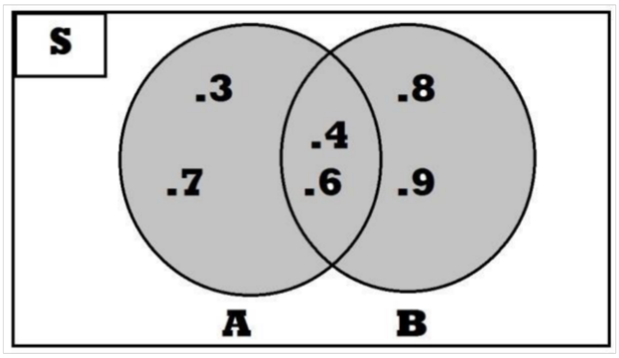
2. A = {3, 4, 5, 6}

   B = {4, 6, 8, 9}

   Maka A ∪ B = { 3, 4, 6, 7, 8, 9}

   Gambar 9 Diagram venn operasi gabungan saling lepas

   Diagram venn-nya:



Gambar 10 Diagram venn operasi gabungan berhimpit

(2) Operasi Irisan (Interseksi) dua buah himpunan A dan B, dengan notasi $\boldsymbol{A \cap B}$, adalah himpunan semua elemen dalam semesta yang merupakan anggota himpunan A dan sekaligus anggota himpunan B, yaitu : $\boldsymbol{A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}}$. Bila $A \cap B = \emptyset$, maka A dan B disebut dua buah himpunan yang *saling lepas atau saling asing.* Misalnya, himpunan A dan komplemennya adalah saling asing, sebab $\boldsymbol{A \cap A' = \{x | x \in A \vee x \in A'\} = \{x | x \in A \wedge\ x \notin A\} = 0.}$

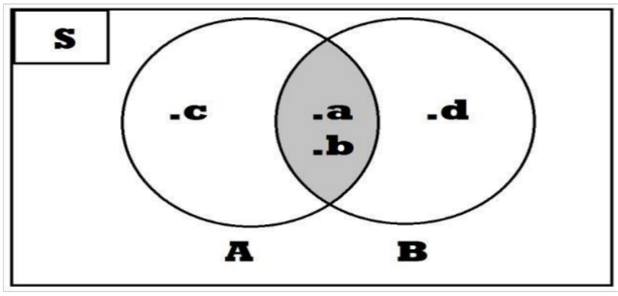
Contoh :

1. A = { a, b, c }

   B = { a, b, d }

   Maka A ∩ B = { a, b }

   Diagram venn-nya:



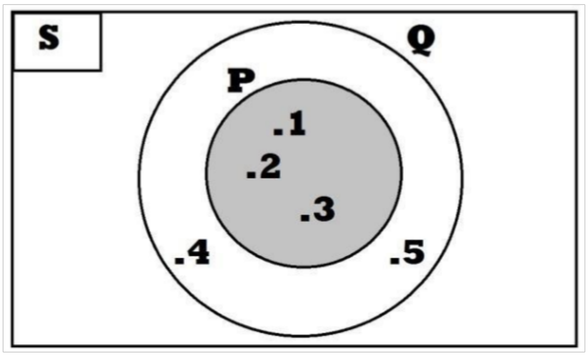
Gambar 11 Diagram ven Operasi irisan berhimpitan

2. P = {1, 2, 3 }

   Q = { 1, 2, 3, 4, 5 }

   Maka P ∩ Q = { 1, 2, 3 }

   Diagram venn-nya:



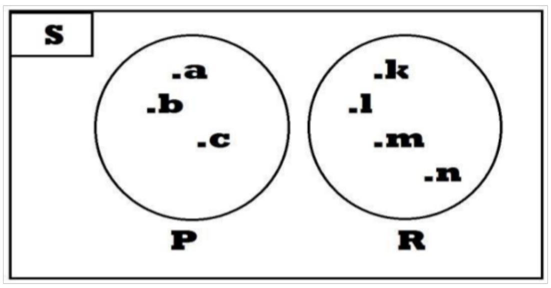
Gambar 12 Diagram venn operasi irisan

3. P = { a, b, c }

   R = { k, l, m, n }

   Maka P ∩ R = ∅ atau { }

   Diagram venn-nya:



Gambar 13 Diagram venn operasi irisan yang terpisah

(3) Operasi Selisih dua buah himpunan A dan B, dengan notasi $\boldsymbol{A - B}$, adalah himpunan semua elemen dalam semesta yang meruakan anggota himpunan A dan bukan anggota B, yaitu $\boldsymbol{A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}}$. Pada umumnya, A – B tidak sama dengan B – A.

Perhatikan bahwa :

$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$= \{x | x \in A \wedge x \notin B'\}$$

$$= A \cap B'$$

Dan

$$A' = \{x | x \in X \wedge x \notin A\}$$

$$= X - A$$

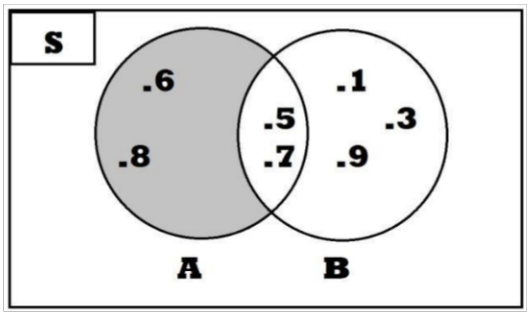
Contoh :

1. A = { 5, 6, 7, 8 }

   B = { 1, 3, 5, 7, 9 }

   Maka, A – B = { 6, 8 }

   Diagram venn-nya:



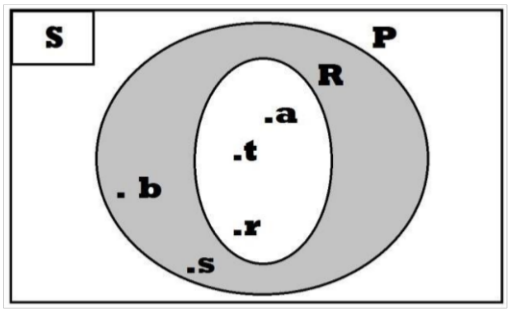
Gambar 14 Diagram venn operasi selisih A - B

2. P = { a, b, t, r, s }

   R = { a, t, r }

   Maka P – R = { b, s }

Diagram venn-nya:



Gambar 15 Diagram venn operasi selisih P-R

- **Selisih simetrik** dua buah himpunan A dan B, dengan notasi $A \ominus B$, adalah himpunan semua elemen dalam semesta yang merupakan anggota himpunan A – B atau himpunan B – A, yaitu $A \ominus B = (A - B) \cup (B - A)$.
- **Darab cartesius** dua buah himpunan A dan B, dengan notasi AxB, adalah himpunan semua pasangan terurut (x, y) dengan $x \in A\ dan\ y \in B$, yaitu : $AxB = \{(x, y) | x \in A \land \mathrm{y} \in \mathrm{B}\}$.

E. SIFAT-SIFAT OPERASI ANTAR HIMPUNAN

Terdapat sepuluh hukum-hukum dalam pengoperasian himpunan yang satu dengan yang lainnya, tabel dibawah ini merupakan hukum-hukum pengoperasian himpunan, yaitu:

1. *Hukum Identitas* $A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$	2. *Hukum null/dominasi* $A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cup U = U$
3. *Hukum Komplemen* $A \cup \bar{A} = U$ $A \cap \bar{A} = \emptyset$	4. *Hukum Idempoten* $A \cup A = A$ $A \cap A = A$

5. *Hukum Involusi* $(\bar{\bar{A}}) = A$	**6. *Hukum Penyerapan (absorpsi)*** $A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
7. *Hukum Komutatif* $A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$	**8. *Hukum Asosiatif*** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
9. *Hukum Distributif* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	**10. *Hukum De Morgan*** $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
11. *Hukum 0/1* ***(atau hukum komplemen 2)*** $\bar{\emptyset} = U$ $\bar{U} = \emptyset$	

Gambar 16 Hukum-hukum dalam operasi himpunan

EVALUASI

1. Dari 50 orang yang berada dikantor pajak, 30rang membayar pajak sepeda motor 30 membayar pajak mobil dan 30 membayar pajak rumah. Sebanyak 15 orang membayar pajak sepeda motor dan mobil .Sebanyak 15 orang membayar pajak sepeda motor dan rumah, Sebanyak 15 orang membayar pajak mobil dan rumah . Berapa banyak orang yang membayar pajak ketiga-ketiganya dan narasikan dalam terapan ekonominya.

a. 5 b. 3

c,4 d. 6

e. 7

2. Sebuah aplikasi digital memiliki 1500 investor pengguna yang memiliki produk investasi berupa Kripto, Emas, dan Saham. Seluruh pengguna memiliki investasi di Emas, 1100 orang pada Kripto dan 900 orang pada Saham. 50% investor Kripto juga memiliki dana pada Saham. Berapakah yang hanya investasi pada Emas dan dan narasikan dalam terapan ekonominya.

a. 1440

b.1450

c. 1500

d.1600

e.1650

3. Sebuah perusahaan yang terdiri dari 40 pekerja, kemudian bos perusahaan tersebut mendata kendaraan pekerjanya. diperoleh data 30 pekerja memiliki mobil, dan 25 pekerja memiliki sepeda motor. Jika 10 pekerja tidak memiliki mobil maupun sepeda motor, maka berapa banyak pekerja yang memiliki mobil dan sepeda motor dan narasikan dalam terapan ekonominya.

A. 5 pekerja

B. 10 pekerja

C. 15 pekerja

D. 25 pekerja

4. Pada bazar pasar murah terdapat 45 stan pedagang, setiap pedagang hanya menjual dua jenis barang. Terdapat 27 pedagang yang menjual bahan masakan dapur dan 26 pedagang menjual macam–macam busana. Sementara pedagang yang tidak menjual keduanya ada 5 orang. Berapa banyaknya pedagang yang menjual bahan masakan dapur, bermacam- macam busana dan narasikan dalam terapan ekonominya.

A. 12

B. 13

C. 14

D. 15

E. 16

5. Dari sejumlah anak diteliti tentang permainan kegemarannya. Hasil yang tercatat adal 18 anak gemar bermain sepakbola, 14 anak gemar bermain bola voli, 6 orang anak gemar bermain sepakbola dan bola voli. Jika 5 orang anak tidak gemar sepakbola maupun bola voli, maka banyak anak yang diteliti adalah dan narasikan dalam terapan ekonominya.

a. 31 orang

b. 41 orang

c. 37 orang

d. 43 orang

(UN’ 07 no.11 Paket A)

6. Dalam suatu survey mengenai 120 ibu rumah tangga ditanyai dipusat perbelanjaan tertentu. Bahwa ternyata 80 ibu rumah tangga memakai deterjenrinso dan 68 ibu rumah tangga memakai deterjen so-klin dan 62 ibu rumah tangga memakai kedua-duanya. Berapakah jumlah ibu rumah tangga yang di survey itu yang tidak satu pun dari deterjen itu dan narasikan dalam terapan ekonominya.

A.80 D. 86

B.82 E. 88

C.84

ESSAY

1. Survei yang di lakukan PT(ABC) mengenai kebiasaan mahasiswa dalam mengakses informasi sbb: 400 orang mengakses informasi melalui koran, 560 orang mengakses informasi melalui TV, 340 orang mengakses informasi melalui internet, 205 orang mengakses informasi melalui koran dan TV, 175 orang mengakses informasi melalui TV dan Internet, 160 orang mengakses informasi melalui koran dan internet, 155 orang mengakses informasi melalui ketiganya.

pertanyaan:

a. jika total mahasiswa perguruan tinggi 1100 berapa orang yang tidak mengakses dari ketiga nya?
b. berapa orang yang tidak mengakses informasi melalui 2 media saja?
c. berapa orang yang mengakses informasi melalui satu media saja?

Pembahasan:

Total mahasiswa n(S) = 1100

Koran n(K) = 400

TV n(TV) = 560

2. Perhitungan Pendapatan Nasional dapat dilakukan dengan 3 pendekatan, yaitu pendekatan Produksi, pendekatan Pengeluaran, dan pendekatan Pendapatan. Buatlah himpunan dari variabel yang dibutuhkan dari masing-masing pendekatan tersebut dan narasikan dalam terapan ekonominya.

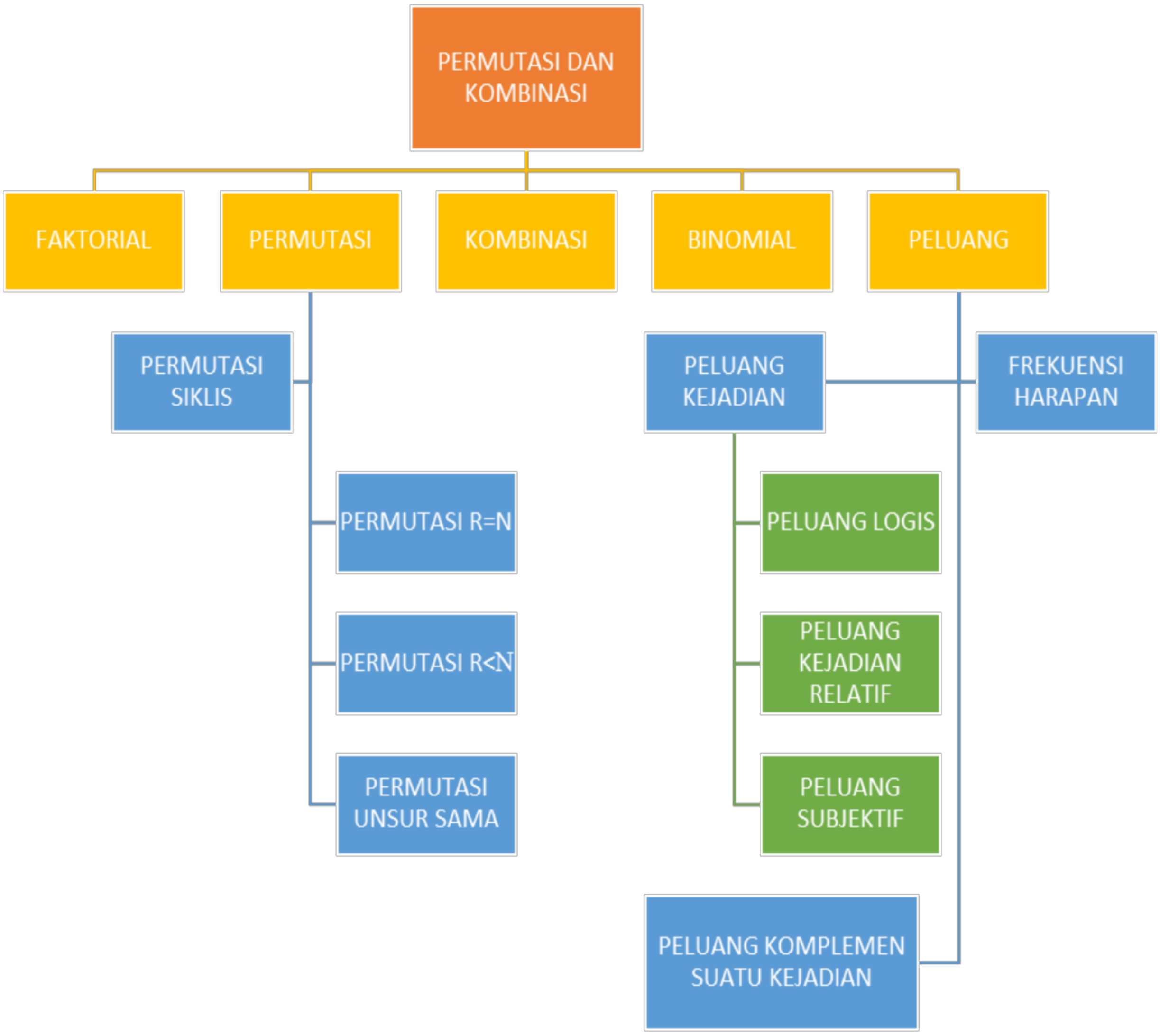
3. Dari 200 orang investor Reksa Dana, diperoleh bahwa 150 orang memiliki dana di Pasar Uang, 70 orang memiliki dana di Obligasi, dan 90 orang memiliki dana di Saham. Jika ada 50 orang yang memiliki dana di Pasar Uang dan Obligasi sekaligus, serta tidak ada orang yang memiliki dana di Pasar Uang dan Saham sekaligus. Berapa orang yang hanya memiliki dana di Pasar Uang, orang yang hanya memiliki dana di

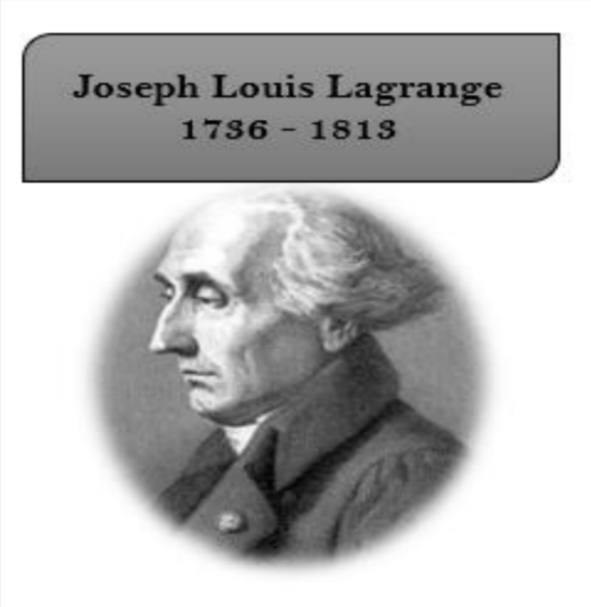
Obligasi, dan orang yang hanya memiliki dana di Saham dan narasikan dalam terapan ekonominya.

4. Sebuah aplikasi digital memiliki 1500 investor pengguna yang memiliki produk investasi berupaKripto, Emas, dan Saham. Seluruh pengguna memiliki investasi di Emas, 1100 orang pada Kripto dan 900 orang pada Saham. 50% investor Kripto juga memiliki dana pada Saham. Berapakah yang hanya investasi pada Emas dan narasikan dalam terapan ekonominya.

BAB II

PERMUTASI DAN KOMBINASI





BIOGRAFI TOKOH

Joseph-Louis de Lagrange (25 Januari 1736 – 10 April 1813) adalah seorang matematikawan dan astronom Prancis-Italia yang membuat sumbangan penting pada mekanika klasik, angkasa dan teori bilangan. Dilahirkan di Turin, ia adalah campuran Italia dan Prancis. Ayahnya ialah orang kaya, tetapi suka menghambur-hamburkan kekayaannya. Belakangan dalam hidupnya, Lagrange menyebutnya sebagai bencana yang menguntungkan karena, "Jika saya mewarisi kekayaan mungkin saya tidak akan mempertaruhkan nasib saya dengan matematika."

Berpaling pada matematika dengan membaca sebuah esai tentang kalkulus, dengan cepat ia menguasai subyek tersebut. Pada usia 19, ia memulai karyanya-mungkin yang terbesar, Mécanique analitique, meski tak diterbitkan sampai ia berusia 52. Karena tiadanya diagram yang lengkap, komposisi terpadu, William Rowan Hamilton menyebut bukunya sebagai "sajak ilmiah".

Pada saat Lagrange mengirim beberapa hasil karyanya kepada Leonhard Euler, Euler sadar akan kecemerlangan Lagrange dan menunda menerbitkan sejumlah karyanya sendiri yang berkaitan agar Lagrange-lah yang bisa menerbitkannya pertama kali-contoh langka tentang sifat seorang akademikus yang tak mementingkan diri sendiri.

Kariernya masyhur; pada usia 20 ia adalah matematikawan istana pada Raja Prusia Friedrich yang Agung di Berlin dan kemudian guru besar di École normale di Paris. Selama Revolusi Prancis, ia adalah favorit Marie Antoinette dan kemudian Napoleon. Di Paris, ia membantu menyempurnakan sistem metrik tentang berat dan ukuran.

A. Faktorial

Faktorial merupakan hasil kali bilangan asli berurutan dari 1 sampai dengan n. Notasi factorial yang digunakan adalah (!) dibaca factorial.

Contoh:

3! Dibaca 3 faktorial maksudnya $3 \times 2 \times 1$

5! Dibaca 5 faktorial maksudnya $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

Secara umum dipahami bahwa

$$(n+1)! = (n+1)n!, \text{ untuk } n \geq 1$$

$$\text{dan } n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

Untuk n = 0, konsep factorial seperti disebutkan diatas tidak berlaku karena tidak memenuhi konsep 31ersama31e, namun karena dalam perhitungan sering ditemui, dan selalu benar jika 0! = 1, agar tidak menjadi 31ersama, kemudian didefinisikan bahwa

$$\boxed{0! = 1}$$

B. Permutasi

Permutasi adalah susunan yang berbeda yang dapat dibentuk dari n unsur atau 31ersama31 unsur. Dalam permutasi harus diperhatikan bahwa AB dan BA adalah dua unsur yang berbeda ($AB \neq BA$). Permutasi r unsur yang diambil dari n unsur dilambangkan dengan

$$\boxed{{}_{n}P_r \text{ atau } P_r^n}$$

a. Untuk r < n, maka

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Contoh:

$$P_4^6 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 360$$

b. Untuk r = n, maka

$$P_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Contoh:

$$P_4^4 = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{0!} = 24$$

Karena 0! = 1

c. Permutasi dengan beberapa unsur yang sama

Kita akan langsung mengamati contoh, misalkan kata PAPA akan disusun menjadi beberapa kata yang berbeda. Kata-kata yang didapatkan adalah PAPA, PAAP, PPAA, APPA, APAP, AAPP ada 6 kata. Pada kata PAPA terdapat dua huruf yang sama, yaitu P dua buah dan A dua buah, sehingga banyaknya permutasi dari kata PAPA adalah

$$6 = 3! = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = 6$$

Jadi, rumus untuk mencari permutasi dengan beberapa unsur yang sama adalah

$$\boxed{P_{k,l,m}^{n} = \frac{n!}{k!\,l!\,m!}}$$

dengan k, l, dan m adalah jumlah unsur yang sama.

Contoh:

Berapa banyak susunan huruf berbeda yang dapat disusun dari huruf-huruf pada kata TORONTO?

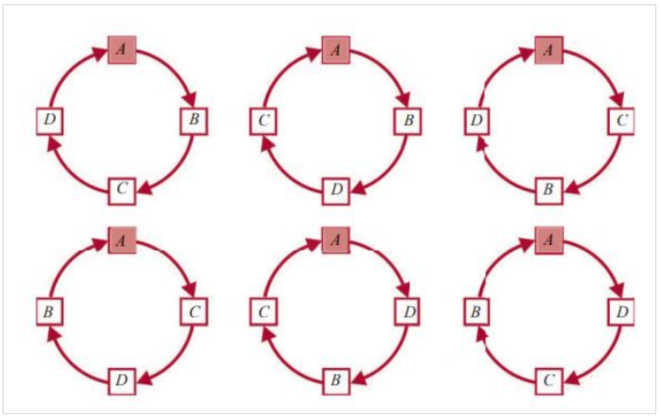
Penyelesaian:

Pada kata TORONTO terdapat T dua huruf dan O tiga huruf, sehingga

$$P = \frac{7!}{2!\,3!} = 420$$

C. Permutasi Siklis

Permutasi siklis merupakan permutasi yang dibuat dengan 33ersama33 unsur secara melingkar, sebagai contoh susunan orang yang duduk pada meja bundar. Pada permutasi siklis 1 unsur digunakan sebagai acuan dan unsur lainnya akan ditempatkan dengan (n-1)! Cara. Akan diilustrasikan ABCD disusun pada bentuk lingkaran sehingga menjadi



Huruf A akan dijadikan acuan sehingga 3 huruf lainnya akan ditempatkan dengan 3! Yaitu 6 cara. Berdasarkan contoh tersebut dapat diketahui cara untuk mencari permutasi siklis yaitu misalkan tersedia n unsur yang berbeda Permutasi siklis dari n unsur itu ditulis dengan notasi $P_{siklis}(n)$ dan dirumuskan dengan

$$\boxed{P_{siklis}(n) \ = (n-1)!}$$

Contoh:

Seorang pedagang gantungan kunci meletakkan dagangannya seperti pada Gambar Berapa banyak cara pedagang itu meletakkan dagangannya?

Penyelesaian:

Cara pedagang itu meletakkan 4 macam dagangannya yang berupa gantungan kunci adalah permutasi siklis dari 4 unsur sehingga

$P_{siklis}(4) = (4-1)! = 3! = 6$

Jadi, banyak cara pedagang itu meletakkan dagangannya ada 6 cara.

D. Kombinasi

Kombinasi menyatakan banyaknya letak penyusunan objek tanpa memperhatikan letak/urutannya. Maksudnya, dalam kombinasi AB merupakan unsur yang sama dengan BA sehingga dihitung satu unsur ($AB = BA$). Banyaknya kombinasi r unsur dari n unsur dinyatakan dengan nC_r atau C_r^n atau $\binom{n}{r}$ dan dirumuskan dengan:

$$\boxed{C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}}$$

Contoh:

diketahui $C_2^n = 4n$, tentukan nilai n

Penyelesaian:

$$C_2^n = \frac{n!}{(n-2)!\,2!}$$

$$4n = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!\,2!}$$

$$4n = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$8n = n^2 - n$$

$$n^2 - 9n = 0$$

$$n(n-9) = 0$$

Oleh karena nilai $n \geq r$ maka n yang memenuhi adalah 9

Ada beberapa jenis dari kombinasi, yaitu

a. **Kombinasi ada 2 yaitu :**

1. Kombinasi pengulangan

Jika urutan tidak diperhatikan dan objek bisa dipilih lebih dari sekali, maka jumlah kombinasi yang ada adalah:

$$\frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-r)!} = \binom{n+r-1}{r}$$

$$= \binom{n+r-1}{n-1}$$

Di mana n adalah jumlah objek yang bisa dipilih dan r adalah jumlah yang harus dipilih. Sebagai contoh jika kamu pergi ke sebuah toko donat. Toko donut itu menyediakan 10 jenis donat berbeda. Kamu ingin membeli tiga donat. Maka kombinasi yang dihasilkan adalah $\frac{(10+3-1)!}{3!(10-1)!} = 220$ kombinasi.

2. Kombinasi Tanpa Pengulangan

   Ketika urutan tidak diperhatikan akan tetapi setiap objek yang ada hanya bisa dipilih sekali maka jumlah kombinasi yang ada adalah:

$$\frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

   Di mana n adalah jumlah objek yang bisa dipilih dan r adalah jumlah yang harus dipilih.

   Sebagai contoh, kamu mempunyai 5 pensil warna dengan warna yang berbeda yaitu; merah, kuning, hijau, biru dan ungu. Kamu ingin membawanya ke sekolah. Tapi kamu hanya boleh membawa dua pensil warna. Ada berapa banyak cara untuk mengkombinasikan pensil warna yang ada? Dengan menggunakan rumus di atas maka ada $\frac{5!}{(5-2)!(2)!} = 10$ kombinasi.

b. Kombinasi sebanyak r dari n objek yang berbeda

DEFINISI :

Suatu himpunan yang terdiri dari r objek dan yang mungkin dipilih dari suatu himpunan yang terdiri dari n objek yang berbeda tanpa memerhatikan urutan pemilihannya dinamakan kombinasi dari n objek yang berbeda dan yang diambil sekaligus sebanyak r objek dengan ketentuan $0 < r < n$. Kombinasi demikian dinyatakan dengan notasi

$$\left(\frac{n}{r}\right)$$

TEOREMA :

Kombinasi sebanyak r dari n objek yang berbeda. Jumlah kombinasi dari n objek yang berbeda dan yang dipilih sekaligus sebanyak r ialah :

$$\left(\frac{n}{r}\right) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

E. Binomial

Pada binomial Newton akan digunakan konsep dari kombinasi. Misalkan x dan y adalah peubah-peubah bilangan real yang bukan nol. Bentuk $(x+y)$ disebut suku dua atau bentuk binomial dalam x dan y. Jika n bilangan asli, bentuk $(x+y)$ dipangkatkan n dapat ditulis $(x+y)^n$. Untuk beberapa nilai n yang kecil, kita sudah mengenal penjabaran dari bentuk $(x+y)^n$. Misalnya,

untuk $n = 1$ maka $(x+y)^1 = x + y$;

untuk $n = 2$ maka $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$;

untuk $n = 3$ maka $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 6xy + 3xy^2 + y^3$.

Akan kita amati ekspansi dari $(x+y)^n$ untuk $n = 1$ sampai $n = 3$, terdapat beberapa hal yaitu

a. Banyak suku pada ekspansi di ruas kanan adalah satu lebih banyak daripada pangkat (eksponen) n. Hal ini memberi gambaran ekspansi $(x+y)^n$ akan mengandung $(n+1)$ suku.

b. Suku pertama dari $(x+y)^n$ adalah x^n dan suku terakhir adalah y^n.

c. Hasil ekspansi pada ruas kanan jika dibaca dari kiri ke kanan, eksponen (pangkat) dari x berkurang 1, sedangkan eksponen dari y bertambah 1.

d. Jumlah eksponen x dan y untuk suku apa saja selalu sama dengan eksponen n.

Berdasarkan pengamatan tersebut dirumuskan penjabaran Binomial dalam notasi kombinasi, yaitu

Misalkan x dan y adalah variable, dan n adalah bilangan bulat positif, maka:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{(n-1)} y^1 + \binom{n}{2} x^{(n-2)} y^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^{(n-n)} y^n$$

atau dapat pula ditulis

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} y^r$$

Contoh:

Ekspansikan bentuk $(x^2+2y)^5$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}(x^2+2y)^5 &= \binom{5}{0}(x^2)^5(2y)^0 + \binom{5}{1}(x^2)^4(2y)^1 + \binom{5}{2}(x^2)^3(2y)^2 \\ &\quad + \binom{5}{3}(x^2)^2(2y)^3 + \binom{5}{4}(x^2)^1(2y)^4 + \binom{5}{5}(x^2)^0(2y)^5 \\ &= x^{10} + 10x^8y + 40x^6y^2 + 80x^4y^3 + 80x^2y^4 + 32y^5\end{aligned}$$

Selanjutnya, kita dapat menentukan suku dan koefisien Binomial. Suku ke k dari hasil penjabaran ekspansi Binomial dapat ditentukan dengan:

$$\boxed{\binom{n}{k-1} = x^{n-(k-1)} y^{(k-1)}}$$

Contoh:

Tentukan 37ersama-3 dari $(2x-3y)^5$ dan tentukan nilai koefisiennya!

Penyelesaian:

Karena yang ditanyakan adalah 37ersama-3 maka $k=3$

$$\begin{aligned}\binom{5}{3-1} &= (2x)^{5-(3-1)}(-3y)^{(3-1)} \\ &= 10(8x^3)(9y^2)\end{aligned}$$

$$= 720x^3y^2$$

F. Peluang Kejadian

Teori peluang memberikan cara pengukuran kuantitatif tentang kemungkinan atau tingkat kepastian tentang terjadinya suatu peristiwa. Peluang suatu kejadian itu paling tinggi 1 atau pasti terjadi dan paling rendah adalah 0 atau tidak mungkin/mustahil terjadi, sehingga kisaran nilai peluang yaitu $0 \leq P(A) \leq 1$.

1. Pengertian Percobaan, Ruang Sampel, dan Kejadian

    - Percobaan, merupakan proses yang dilakukan sehingga diperoleh suatu pengukuran, perhitungan, atau pengamatan.
    - Ruang sampel, himpunan semua hasil yang mungkin dari percobaan yang dilakukan, dilambangkan dengan S. Sedangkan banyaknya ruang sampel dilambangkan dengan n(S).
    - Kejadian, merupakan himpunan bagian dari ruang sampel.

2. Peluang suatu Kejadian

    Pada kejadian sederhana, peluang dapat diturunkan secara logis, melalui pengamatan empiris, maupun secara subjektif.

    a. Peluang Secara Logis

    Peluang logis sebenarnya didasarkan pada pertimbangan logika semata bukan berdasarkan pada percobaan, namun demikian hasil ini dapat diuji melalui suatu percobaan. Sebagai contoh, terdapat 10 bola hitam dan 10 bola putih dalam suatu keranjang. Maka kemungkinan terpilihnya bola hitam akan sama dengan bola putih. Sehingga didapatkan suatu definisi yaitu:

    Peluang logis dari sebuah peristiwa adalah rasio antara jumlah peristiwa yang bisa terjadi dengan jumlah semua hasil yang bisa

    terjadi, dimana hasil ini dapat diturunkan dari sebuah eksperimen. Atau secara notasi

$$P(peristiwa) = \left(\frac{jumlah\ cara\ terjadi\ suatu\ peristiwa}{jumlah\ cara\ terjadinya\ semua\ hasil}\right)$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Peluang logis memiliki kelemahan dimana saat dilakukan pelemparan dadu maka telah diasumsikan bahwa dadu tersebut setimbang sehingga semua sisi mempunyai kesempatan yang sama untuk muncul. Akan tetapi pada kenyataannya hal tersebut tidak bisa dicapai, tidak semua dadu setimbang dengan semua sisi yang memiliki kesempatan yang sama untuk muncul.

Contoh:

Berapa peluang pengambilan sebuah kartu As dari sebuah kartu bridge?

Penyelesaian:

$n(S) = 52$

$n(A) = 4$

Maka,

$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

b. Peluang Secara Frekuensi Relatif

Misalkan S adalah suatu ruang sampel, dan E adalah suatu kejadian, $n(E)$ adalah frekuensi munculnya kejadian E. jika percobaan diulang sebanyak n kali, peluang kejadian E adalah:

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(E)}{n}$$

Contoh:

Misalkan sebuah dadu dilemparkan sebanyak 1.000 kali. Dengan hasil lemparan:

x	1	2	3	4	5	6
frekuensi	166	169	165	167	169	164

Maka, peluang masing-masing sisi sebuah dadu yang aka dilemparkan kemudian adalah

Penyelesaian:

x	1	2	3	4	5	6
P(X=x)	166/1000	169/1000	165/1000	167/1000	169/1000	164/1000

c. Perumusan Secara Subjektif

Peristiwa pada peluang tidak semuanya tentang percobaan yang dilakukan secara berulang-ulang. Terdapat peristiwa yang hanya dilakukan sekali, missal berapa peluang produk X akan terjual laku di pasaran, Berapa peluang direktur perusahaan air mineral mau berkompromi dengan serikat buruh perusahannya yang menuntut kenaikan gaji. Hal tersebut Kembali pada pemikiran rasional dari subjek suatu kejadian tersebut.

Definisi: peluang subjektif adalah sebuah bilangan antara 0 dan 1 yang digunakan seseorang untuk menyatakan perasaan ketidakpastian tentang terjadinya peristiwa tertentu. Peluang 0 berarti peristiwa tersebut tidak mungkin terjadi, sedangkan peluang 1 menyatakan bahwa peristiwa tersebut pasti terjadi.

G. Frekuensi Harapan

Frekuensi harapan suatu kejadian ialah frekuensi yang diharapkan terjadinya kejadian tersebut selama n percobaan tersebut. Frekuensi harapan dirumuskan sebagai berikut

$$\boxed{F(h) = n \times P(A)}$$

dengan

n : banyak percobaan

P(A) : Peluang terjadinya kejadian A

Contoh:

Di sebuah negara diketahui bahwa peluang orang dewasa yang terkena serangan jantung adalah 0,07 dan peluang terkena penyakit liver adalah 0,17. Jika sebanyak 25.000 orang dewasa di negara tersebut diperiksa, berapa orang dewasa terkena penyakit serangan jantung dan berapa orang yang terkena penyakit liver?

Penyelesaian:

F_h(orang terkena serangan jantung)= $25.000 \times 0{,}07 = 1.750$

F_h(orang terkena penyakit liver)= $25.000 \times 0{,}17 = 4.250$

H. Peluang Komplemen Suatu Kejadian

Peluang komplemen suatu kejadian merupakan peluang suatu kejadian yang berlawanan dengan suatu kejadian yang ada. Misalkan, suatu kejadian A merupakan himpunan dari semua kejadian yang bukan A. Komplemen dari kejadian A ditulis dengan A^c.

Suatu kejadian dan komplemennya selalu berjumlah 1 artinya, suatu kejadian bisa saja terjadi atau tidak akan terjadi, sehingga dapat dirumuskan :

$P(A) + P(A^c) = 1$

$P(A^c) = 1 – P(A)$

Ket : P(A) = Peluang kejadian

$P(A^c)$ = Peluang komplemen suatu kejadian A

Contoh :

Pada pelemparan 3 mata uang logam yang dilakukan dengan tempo waktu yang sama, tentukan berapa peluang munculnya paling sedikit 1 angka dari pelemparan uang logam itu?

Penyelesaian:

CARA BIASA

S = {AAA, AAG, AGA, GAA, AGG, GAG, GGA, GGG}, sehingga $n(S) = 8$. Andai kejadian muncul paling sedikit satu angka yaitu A.

A = {AAA, AAG, AGA, GAA, AGG, GAG, GGA}, maka $n(A) = 7$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{7}{8}$$

CARA KOMPLEMEN

S = {AAA, AAG, AGA, GAA, AGG, GAG, GGA, GGG}, maka $n(S) = 8$

Misalkan kejadian munculnya paling sedikit satu angka yaitu A.

AC = {GGG}, jadi $n(AC) = 1$

$$P(AC) = \frac{n(AC)}{n(S)} = \frac{1}{8}$$

$$P(A) = 1 - P(Ac) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

UJI KOMPETENSI

A. Pilihan Ganda

1. Dalam pengolahan lahan pertanian yang maksimal tersedia 8 lahan padi, 7 lahan jagung, dan 6 lahan cabai yang tersedia. Akan tetapi diperlukan 6 lahan untuk padi, 3 lahan untuk jagung serta 4 lahan untuk cabai. Maka berapa banyakkah cara untuk memilih lahan-lahan tersebut dan narasikan dalam ekonominya

   a. 14.700 c. 12.500
   b.1 4.900 d. 13.300

2. Jika terdapat 7 insantsi BUMN yang sedang dalam pertimbangan untuk melakukan buyback saham. Sesuai dengan anggaran yang dapat dikeluarkan dikatahui bahwa hanya 4 perusahaan saja yang dapat diberikan akomodasi, maka banyaknya cara yang dapat dilakukan untuk memilih 4 perusahaan dari 7 perusahaan tersebutdan narasikan dalam ekonominya

   a. 37 c. 57
   b. 74 d. 35

3. Di pasar ikan terdapat 12 toko ikan gurami, 8 toko ikan tuna, dan 6 toko penjual udang. Maka banyaknya cara yang dapat dilakukan untuk membeli gurami di 5 toko, tuna di 4 toko, dan udang di 2 tokodan narasikan dalam ekonominya

   a. 887.000

   b. 880.900

   c. 790.045

   d. 887.040

4. Sebuah perusahaan yang bergerak di bidang konstruksi memiliki 4 orang ahli statistik. Salah satu kegiatan dari perusahaan tersebut adalah melakukan survei kualitas bangunan yang pernah dikerjakannya. Jumlah ahli statistik yang

dibutuhkan untuk kegiatan survei adalah 2 orang. Berapa cara menentukan 2 dari empat 4 orang ahli statistik yang dibutuhkan dan narasikan dalam ekonominya.

a. 8 cara   c. 6 cara

b. 10 cara   d. 5 cara

5. Seorang peternak akan membeli hewan ternak untuk dipelihara. Dia akan membeli 3 ekor sapi, 4 ekor domba, dan 5 ekor kambing. Seorang pedagang mempunyai 6 ekor sapi, ekor domba, dan 8 ekor kambing. Banyak cara yang dapat dilakukan untuk memilih hewan ternak yang akan dibeli dan narasikan dalam ekonominya.

   a. 9000 cara   c. 300 cara

   b. 16.800 cara   d. 120 cara

6. Diketahui bahwa akan diadakan rapat untuk membahas kemiskinan yang terjadi di daerah papua. Dengan masalah tersebut jokowi akan mengadakan rapat yang beranggotakan 6 orang anggota, yaitu wakil presiden, direktur, sekretaris, manager pemasaran, menteri keuangan, dan gubernur papua. Tentukan berapa banyak cara mereka dapat duduk secara berlainan jika gubernur, direktur saling berdekatan dan narasikan dalam ekonominya.

   a. 120 cara   c. 230 cara

   b. 240 cara   d. 180 cara

Essay Test

1. Sebuah Toko menjual tas dan sepatu dengan 4 tas berwarna putih, 2 tas berwarna hitam, 4 sepatu berwarna putih, dan 5 sepatu berwarna hitam. Rina ingin membeli sebuah tas dan sebuah sepatu dari Toko tersebut, berapakah peluang Rina membeli tas berwarna putih dan sepatu berwarna hitam dan narasikan dalam ekonominya

2. Sebuah Toko buku menjual 6 novel yang telah terjual 700 buku. Terjualnya novel A sebanyak 140 kali dan terjualnya novel C sebanyak 156 kali. Tentukan frekuensi relatif dan narasikan dalam ekonominya
   a. terjualnya novel A
   b. terjualnya novel C

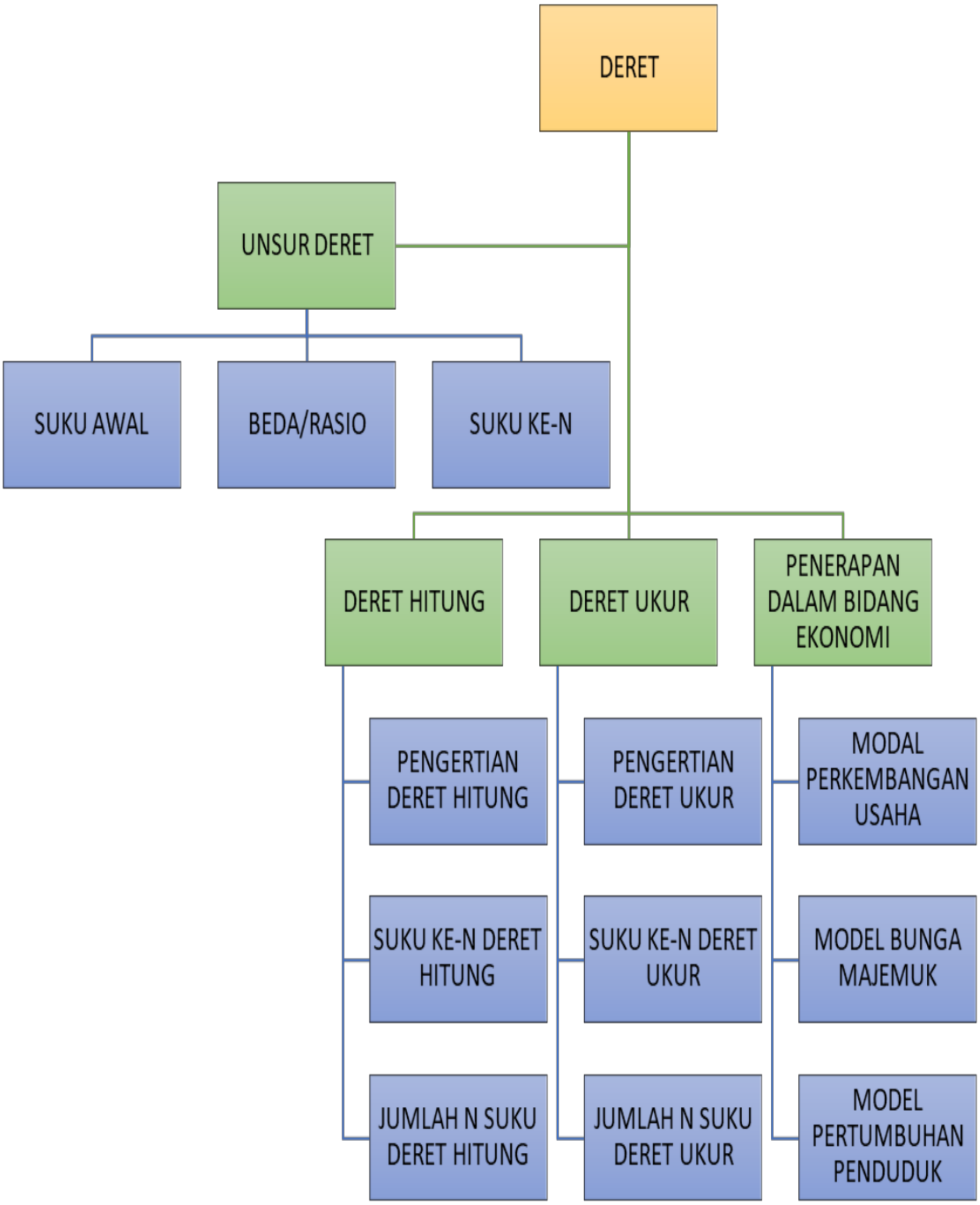
3. Suatu pertemuan rapat bisnis kelapa sawit diikuti oleh 9 peserta yang akan duduk mengelilingi meja bundar. Felix, Meilvi, dan Valen ikut dalam pertemuan itu. Tentukan banyak susunan tempat duduk dan narasikandalamekonominya
   1. Jika semua peserta bebas memilih tempat duduk.
   2. Felix, Meilvi, dan Valen duduk berdampingan.
   3. Felix, Meilvi, dan Valen tidak boleh ketiganya duduk berdampingan.

4. Seorang Petani diharuskan menanam 8 dari 10 tanaman yaitu tanaman kangkung, bayam, kubis, cabai, daun bawang, kacang panjang, bawang merah , bawang putih, singkong, dan buah naga. Tetapi bayam, kubis, cabai, daun bawang, dan kacang panjang wajib ditanam. Berapakah banyak pilihan yang dapat diambil oleh Petani dan narasikan dalam ekonominya.

5. Pada suatu rapat pedagang bakso yang diadakan di kantor kementerian ekonomi. Sedang dibahas masalah daging sapi yang melonjak tinggi yang mengakibatkan kesulitan dalam menentukan harga. Para pedagang duduk melingkar 45ersama dengan presiden dan wakil presiden pada meja bundar. Jika presiden dan wakil presiden harus duduk berdampingan dan perwakilan pedagang yang hadir ada 4 orang, berapa kemungkinan cara duduk yang terjadidan narasikandalamekonominya

BAB III

DERET



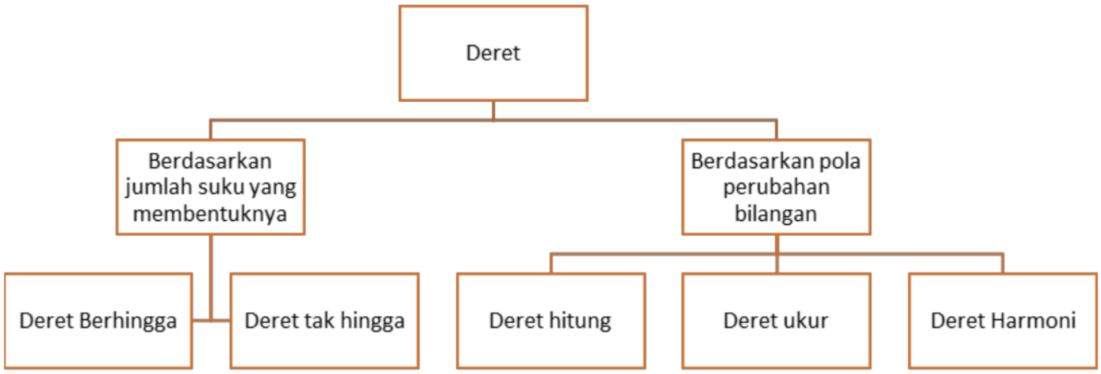
LEONARDO DA PISA

(1175 – 1250)

Leonardo da Pisa atau Leonardo Pisano atau Fibonacci (1175-1250), matematikawan Italia penemu Deret Bilangan Fibonacci (memberikan jawaban atau alasan dari pola yang ada di alam). Tahun 1202 Pisano juga menerbitkan buku Liber Abaci, dalam bukunya mengenalkan kepraktisan sistem penulisan dan perhitungan bilangan Arab (aljabar) ke dunia Eropa.

Melihat sistem bilangan Arab lebih sederhana dan efisien dibandingkan bilangan Romawi, Fibonacci kemudian berkelana ke penjuru daerah Mediterania untuk belajar kepada matematikawan Arab yang terkenal mada masa itu, dan baru pulang kembali sekitar tahun 1200-an. Pada 1202, di usia 27, ia menuliskan apa yang telah dipelajari dalam buku Liber Abaci, atau Buku Perhitungan. Buku ini menunjukkan kepraktisan sistem bilangan Arab dengan cara menerapkannya ke dalam pembukuan dagang, konversi berbagai ukuran dan berat, perhitungan bunga, pertukaran uang dan berbagai aplikasi lainnya. Buku ini disambut baik oleh kaum terpelajar Eropa, dan menghasilkan dampak yang penting kepada pemikiran Eropa, meski penggunaannya baru menyebarluas setelah ditemukannya percetakan sekitar tiga abad berikutnya. (Contohnya, peta dunia Ptolemaus tahun 1482 dicetak oleh Lienhart Holle di Ulm.)

Leonardo pernah menjadi tamu Kaisar Frederick II, yang juga gemar sains dan matematika. Tahun 1240 Republik Pisa memberi penghormatan kepada Leonardo, dengan memberikannya gaji.



Gambar 17

Deret hingga adalah penjumlahan barisan dengan sukunya tertentu, sedangkan deret tak hingga merupakan penjumlahan barisan yang tak terbatas. Deret hitung merupakan jumlah suku-suku barisan aritmatika, deret ukur merupakan jumlah suku-suku barisan geometri, dan deret harmoni merupakan jumlah suku-suku barisan harmoni. Deret hitung sering disebut juga deret aritmatika, dan deret ukur sering disebut deret geometri. Bentuk umum dari deret adalah:

$$Sn = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_{n-1} + U_n$$

A. Deret Hitung

1. Pengertian Deret Hitung

Deret hitung atau disebut juga deret aritmatika adalah penjumlahan dari setiap suku pada barisan aritmatika. Bilangan yang membedakan suku-suku pada deret hitung dinamakan pembeda yang merupakan selisih antara nilai dua suku yang berurutan.

Contoh:

8, 13, 18, 23, 28, 33, … (pembedanya adalah 5)

87, 80, 73, 66, 59, … (pembedanya adalah -7)

2. Suku ke-n dari Deret Hitung

Apabila a adalah suku pertama suatu baris (U_n) dan b adalah beda antara dua suku yang berurutan maka sesuai dengan pengertian deret hitung, diperoleh:

$$Sn = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_{n-1} + U_n$$

$$Sn = a + (a + b) + (a + 2b) + \cdots + (a + (n - 2)b) + (a + (n - 1)b)$$

$$Sn = a + (n - 1)b + a + (n - 2)b + a + (n - 3)b + \cdots + (a + b) + a$$

\+

$$2Sn = 2a + (n - 2)b + 2a + (n - 1)b + \cdots + 2a + (n - 2)b + 2a + (n - 2)b$$

$$2Sn = n \times [2a + (n - 1)b]$$

$$Sn = \frac{n}{2} \times [2a + (n - 1)b]$$

$$Sn = \frac{n}{2} \times [2a + (n - 1)b]$$

Karena $a + (n - 1)b = U_n$ maka

$$Sn = \frac{n}{2}(a + U_n)$$

Contoh soal:

Saat diterima bekerja di perusahaan air mineral, Muti membuat kesepakatan dengan pimpinan perusahaan, yaitu ia akan mendapat gaji pertama Rp1.800.000,00 dan akan mengalami kenaikan Rp50.000,00 setiap dua bulan. Jika ia mulai bekerja pada bulan Juli 2004, berapakah gaji yang diterimanya pada bulan Desember 2005?

Penyelesaian:

Gaji Muti mengikuti pola barisan aritmatika dengan suku pertama a = Rp1.800.000,00 dan beda b = Rp50.000,00

Juli-Agustus 2004 = U_1

September-Oktober 2004 = U_2

November-Desember 2004 = U_3

November-Desember 2004 = U_9

$U_9 = a + 8b$

$U_9 = 1.800.000 + 8 \times 50.000$

$U_9 = 2.200.000$

Maka, gaji yang akan diterima Muti pada bulan Desember 2005 adalah Rp2.200.000,00

3. Jumlah n Suku

Jumlah sebuah deret hitung sampai dengan suku tertentu tak lain adalah jumlah nilai suku-sukunya, sejak suku pertama (S_1 atau a) sampai dengan suku ke-n (S_n) yang bersangkutan.

$$J_n = \sum_{i=1}^{n} S_i = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$$

$$J_4 = \sum_{i=1}^{4} S_i = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

$$J_4 = \sum_{i=1}^{4} S_i = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$$

Berdasarkan rumus $Sn = a + (n-1)\,b$, maka masing-masing S dapat diuraikan:

$$J4 = a + (a+b) + (a+2b) + (a+3b) = 4a + 6b$$

$$J5 = a + (a+b) + (a+2b) + (a+3b) + (a+4b) = 5a + 10b$$

Kemudian masing-masing J dapat ditulis ulang dalam bentuk :

$$J_4 = 4a + 6b = 4a + \frac{4}{2}(4-1)b$$

$$J_5 = 5a + 10b = 5a + \frac{5}{2}(5-1)b$$

$$J_n = na + \frac{n}{2}(n-1)b$$

$$J_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)b\}$$

$$J_n = \frac{n}{2}\{a + S_n\}$$

Berdasarkan hal tersebut maka ada empat cara untuk menghitung jumlah n suku dari deret ukur, yaitu:

1. $J_n = \sum_{i=1}^{n} S_i$
2. $J_n = na + \frac{n}{2}(n-1)b$
3. $J_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)b\}$
4. $J_n = \frac{n}{2}\{a + S_n\}$

Contoh soal:

Jika suku pertama dari suatu deret ukur adalah 5 dengan pengganda 5. Maka, berapakah jumlah dari deret tersebut sampai dengan suku ke-12?

Penyelesaian:

Berdasarkan soal tersebut diperoleh nilai a = 5 dan b = 5

Sehingga

$$J_{12} = \frac{12}{2}(2.5 + (12 - 1)5)$$

$$J_{12} = 6(10 + 55)$$

$$J_{12} = 6(65)$$

$$J_{12} = 390$$

B. Deret Ukur

1. Pengertian Deret Ukur

Deret ukur atau disebut juga deret geometri adalah jumlah suku dari barisan geometri. Jika suku-suku barisan geometri $a, ar, ar^2, \dots, ar^{n-1}$ dijumlahkan maka diperolehlah deret ukur. Bilangan yang membedakan suku-suku pada deret ukur dinamakan rasio atau pengganda, hasil bagi nilaii suatu suku dengan suku didepannya.

Contoh:

5, 10, 15, 20, 25, … (memiliki pengganda 5)

8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, … (memiliki pengganda $\frac{1}{2}$)

2. Suku ke-n Dari Deret Ukur

Apabila a adalah suku pertama suatu baris (U_1) dan r adalah rasio antara dua suku yang berurutan maka sesuai dengan pengertian deret ukur, diperoleh:

$$Sn = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n$$

$$Sn = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

$$Sn.r = \quad ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

$$\overline{\hspace{10cm}} \; -$$

$$Sn - Sn.r = a + 0 + 0 + \cdots + 0 - ar^n$$

$$Sn - Sn.r = a - ar^n$$

$$Sn(1 - r) = a(1 - ar^n)$$

Jadi,

- Untuk r < 1, $Sn = \frac{a(1-ar^n)}{1-r}$
- Untuk r > 1, $Sn = \frac{a(ar^n-1)}{r-1}$

Contoh soal:

Pertambahan penduduk pada kota Medan tiap tahun mengikuti aturan barisan geometri. Pada tahun 1996 pertambahannya sebanyak 6 orang, di tahun 1998 sebanyak 54 orang. Berapakah banyak pertambahan penduduk pada tahun 2001?

Penyelesaian:

- Tahun 1996 = $a = 6$
- Tahun 1998 = $S_3 = 54$

$S_3 = ar^2$

$54 = 6.r^2$

$r^2 = 9$

$r = 3$

- Tahun 2001 = S_6

$S_6 = ar^5$

$S_6 = 6.3^5$

$S_6 = 1.458$

Maka jumlah perrtumbuhan penduduk pada tahun 2001 sebanyak 1.458 orang

3. Jumlah n Suku Dari Deret Ukur

Jumlah sebuah deret ukur sampai suku tertentu adalah jumlah nilai sukunya sejak suku pertama sampai suku ke-n yang bersangkutan.

$$J_n = \sum_{i=1}^{n} S_i = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$$

Berdasarkan rumus $S_n = ap^{n-1}$, maka masing-masing S dapat diuraikan:

$J_n = a + ap + ap^2 + ap^3 + \cdots + ap^{n-2} + ap^{n-1}$ (pers. 1)

$pJ_n = ap + ap^2 + ap^3 + ap^4 + \cdots + ap^{n-1} + ap^n$ (pers. 2)

Maka selisih dari kedua persamaan diatas adalah

$J_n - pJ_n = a - ap^n$

$J_n(1 - p) = a(1 - p^n)$

$J_n = \frac{a(1-p^n)}{1-p}$ jika |p| < 1 dan $J_n = \frac{a(p^n-1)}{p-1}$ jika |p| > 1

Contoh soal:

Jika suku pertama dari suatu deret ukur adalah 5 dengan pengganda 2. Maka, berapakah jumlah dari deret tersebut sampai dengan suku ke-10?

Penyelesaian:

Berdasarkan soal tersebut diperoleh nilai a = 5 dan r = 2

Sehingga

$$J_{10} = \frac{5(2^{10} - 1)}{2 - 1}$$

$$J_{10} = 5(1024 - 1)$$

$$J_{10} = 5(1023)$$

$$J_{10} = 5115$$

C. Penerapan Deret Hitung dan Deret Ukur Dalam Ekonomi

Prinsip deret banyak diterapkan untuk menelaah perilaku bisnis dan ekonomi baik secara langsung maupun tidak langsung. Prinsip deret hitung diterapkan dalam menganalisis perilaku perkembangan, kemudian deret ukur digunakan untuk menganalisis perilaku pertumbuhan. Apabila perkembangan dan pertumbuhan suatu gejala berpola seperti perubahan nilai suku sebuah deret, baik deret hitung maupun deret ukur, maka teori deret yang digunakan untuk menganalisisnya adalah teori deret yang relevan.

1. Modal Perkembangan Usaha

   Pada perkembangan usaha terdapat variable yang ada yaitu produksi, biaya, pendapatan, penggunaan tenaga kerja, dan penanaman modal. Apabila perkembangan masing-masing variable berpola seperti deret hitung, maka prinsip deret hitung dapat digunakan untuk menganalisis perkembangan variable tersebut. Maksudnya adalah variable yang bersangkutan bertambah secara konstan dari suatu waktu ke waktu berikutnya.

Contoh soal:

Besarnya penerimaan PT Maju Jaya dari hasil penjualan produknya adalah Rp360.000.000,00 pada tahun kelima dan Rp600.000.000,00 pada tahun ketujuh. Apabila perkembangan penerimaan penjualan tersebut berpola seperti deret hitung, berapa perkembangan penerimaannya pada tahun pertama dan pada tahun ke berapa penerimaannya sebesar Rp440.000.000,00?

Penyelesaian:

$S_7 = a + 6b \ \rightarrow \ 600 = a + 6b \ldots (1)$

$S_5 = a + 4b \ \rightarrow \ 360 = a + 4b \ldots (2)$

Dengan mengeliminasi persamaan (1) dan (2) didapatkan b =80

Kemudian, nilai b dimasukkan ke persamaan (1)

$600 = a + 6b$

$600 = a + 480$

$a = 120$

Sehingga didapatkan besar pendapatan pada tahun pertama adalah Rp120.000.000,00

Setelah itu, nilai a dan b yang sudah didapatkan digunakan untuk mencari tahun keberapakah besar pendapatan Rp440.000.000,00

$Sn = a + (n - 1)b$

$440 = 120 + (n - 1)80$

$320 = (n - 1)80$

$n - 1 = 4$

$n = 5$

Maka, pendapatan sebesar Rp440.000.000,00 terjadi pada tahun kelima

2. Model Bunga Majemuk

Model Bunga majemuk merupakan penerapan deret ukur dalam kasus Investasi. Dengan model ini bisa dihitung pengembalian kredit dimasa akan datang berdasarkan tingkat bunganya. Modal Pokok sebesar *P* dibungakan secara majemuk dengan suku bunga per tahun setingkat *i,* maka jumlah akumulatif modal tersebut di masa datang setelah *n* tahun (F_n) dapat di hitung sebagai berikut:

Setelah 1 tahun : $F1 = P + P.i = P(1+i)$

Setelah 2 tahun : $F2 = P\,(1+i)\; + \;P\,(1+i)\; = \;P\,(1\; + \;i\,)^2$

Setelah 3 tahun : $F3 = P(1+i\,)^2 + P(1+i)^2\,i\; = \;P\,(1\; + \;i\,)^3$

Dengan demikian, jumlah masa datang dari jumlah sekarang adalah:

$$\boxed{F_n = P\,(1\; + \;i\,)^n}$$

dengan:

P = Jumlah sekarang

I = tingkat bunga per tahun

n = jumlah tahun

Contoh soal:

Tabungan seorang mahasiswa di sebuah Bank swasta akan menjadi sebesar Rp532.400,00 tiga tahun yang akan dating. Jika tingkat bunga bank tersebut berlaku 10% pertahun, berapa tabungan mahasiswa tersebut pada tahun ini?

Penyelesaian:

F = 532.400

n = 3

i = 10% = 0,1

maka

$$P = \frac{1}{(1+i)^n} . F$$

$$P = \frac{1}{(1+0{,}1)^3} . 532.400$$

$$P = 400.000$$

Jadi besarnya tabungan mahasiswa tersebut pada tahun ini adalah Rp400.000,00

3. Model Pertumbuhan Penduduk

Konsep deret ukur terdapat pada penafsiran jumlah penduduk. Sebagaimana yang disebutkan oleh Malthus bahwa penduduk dunia tumbuh mengikuti pola deret ukur. Pola pertumbuhan penduduk secara matematis dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\boxed{P_t = P_1 R^{t-1}}$$

dengan $R = 1 + r$

Dengan:

P_1: Jumlah pada tahun pertama

P_t: jumlah pada tahun ke-t

r: Persentase pertumbuhan penduduk per tahun

t: Indeks waktu (tahun)

Contoh soal:

Jumlah penduduk pada suatu kota pada tahu 1991 adalah satu juta jiwa, dengan tingkat pertumbuhan 4% per tahun. Hitunglah jumlah penduduk kota tersebut pada tahun 2006 jika pertumbuhan penduduk menurun menjadi 2,5% berapa jumlahnya sebelas tahun kemudian?

Penyelesaian:

$P_1 = 1$ juta

$r = 0{,}04$

R = 1,04

Pertumbuhan penduduk pada tahun 2006

$P_{16} = 1\ juta\ (1{,}04)^{15}$

$P_{16} = 1\ juta(1{,}800943)$

$P_{16} = 1.800.943$ jiwa

Kemudian dihitung pertumbuhan penduduk pada sebelas tahun kemudian dengan data

$P_1 = 1.800.943$

$r = 0{,}025$

$R = 1{,}025$

$P_{11} = 1.800.943\ (1{,}025)^{10}$

$P_{11} = 1.800.943\ (1{,}0625955)$

$P_{11} = 2.305.359$ jiwa

UJI KOMPETENSI

Pilihan Berganda

1. Perusahaan souvenir " Anugrah Jaya" mampu menghasilkan 100 suvenir pada bulan pertama produksinya. Seiring berjalannya waktu, perusahaan tersebut mampu menambah produksinya sebanyak 50 unit setiap bulan melalui penambahan karyawan dan peningkatan produktivitas. Jika perkembangan produksi dianggap konstan, tentukan total produksi 10 bulan pertama
   a. 9.000
   b. 10.000
   c. 11.000
   d. 12.000
   e. 13.000

2. Jumlah penduduk pada suatu Kota pada tahun 1991 adalah dua juta jiwa dengan tingkat pertumbuhan 2% pertahun. Hitunglah jumlah penduduk Kota tersebut pada tahun 2005 jika pertumbuhan penduduk menurun menjadi 1.5%, berapakah jumlah penduduk 11 tahun kemudian?
   a. Rp. 1.311.478
   b. Rp. 1.319.478
   c. Rp. 1.419.478
   d. Rp. 1.531.308
   e. Rp. 1.530.308

3. Pak Somad menabungkan uang sebesar Rp. 5.000.000,00 di suatu Bank dengan tingkat bunga 12% per tahun. Berapakah jumlah uang Pak Somad 5 tahun yang akan datang?
   a. Rp. 9.811.700
   b. Rp. 8.912.700
   c. Rp. 8.811.700
   d. Rp. 7.900.700

   e. Rp. 5.500.000

4. Jumlah penduduk pada suatu Kota pada tahun 1991 adalah dua juta jiwa dengan tingkat pertumbuhan 2% pertahun. Hitunglah jumlah penduduk Kota tersebut pada tahun 2005 jika pertumbuhan penduduk menurun menjadi 1.5%, berapakah jumlah penduduk 11 tahun kemudian?
   a. Rp. 1.311.478
   b. Rp. 1.319.478
   c. Rp. 1.419.478
   d. Rp. 1.531.308
   e. Rp. 1.530.308
5. Seorang pemetik kebun memetik jeruknya setiap hari, dan mencatat banyaknya jeruk yang dipetik. Ternyata banyaknya jeruk yang dipetik pada hari ke-n memenuhi rumus Un = 50 + 25n. Jumlah jeruk yang telah dipetik selama 10 hari yang pertama adalah
   a. 2.000 buah
   b. 1.950 buah
   c. 1.900 buah
   d. 1.875 buah
   e. 1.825 buah
6. Produksi pupuk organik menghasilkan 100 ton pupuk pada bulan pertama, setiap bulannya menaikan produksinya secara tetap 5 ton. Jumlah pupuk yang diproduksi selama 1 tahun adalah .....
   a. 1.200 ton
   b. 1.260 ton
   c. 1.500 ton
   d. 1.530 ton
   e. 1.560 ton

7. Gaji Pak Burhan pada tahun ke-4 dan tahun ke-10 berturut-turut adalah Rp200.000 dan Rp230.000. Gaji pak Burhan mengalami kenaikan dengan sejumlah uang yang tetap. Gajinya pada tahun ke-15 adalah…
   a. Rp245.000

   b. Rp250.000

   c. Rp255.000

   d. Rp260.000

   e. Rp265.000

8. Setelah 12 tahun modal pakRamlanmenjadi Rp13.375.625,26 dengan bunga majemuk sebesar 15%/ tahun. Modal mula-mula yang dimiliki pak Ramlan sebesar…
   a. Rp2.500.000

   b. Rp2.750.000

   c. Rp2.765.000

   d. Rp3.005.000

   e. Rp3.250.000

9. Banyak penduduk di kota Medan setiap tahun meningkat sekitar 1% dari banyak penduduk tahun sebelumnya. Berdasarkan sensus penduduk pada tahun 2009 penduduk berjumlah 100.000 orang. Banyak penduduk di tahun 2014 adalah…
   a. 100.100 orang

   b. 200.000 orang

   c. 181.025 orang

   d. 165.625 orang

   e. 105.101 orang

10. Seorang mahasiswa menabung di bank sebesar Rp5.000.000 dengan bunga majemuk 6% per tahun yang dibayarkan tiapbulan. Setelah 1 tahun ia mengambil semua uangnya. Nilai akhir uang mahasiswa tersebut adalah…

A. Rp5.118.243

B. Rp5.108.103

C. Rp5.308.389

D. Rp5.488.406

E. Rp5.508.001

Essay

1. PT.Kesindo Jaya Medan merupakan perusahaan distributor minuman berupa lasegar.Pada bulan Januari perusahaan menjual 20.000 lasegar.Karena permintaan terus menerus meningkat diiringi dengan penambahan tenaga kerja, setiap bulannya perusahaan mampu menambah jumlah penjualan sebanyak 700 buah.Jika pertambahan jumlah penjualan lasegar tersebut setiap bulannya adalah tetap,Berapa banyak lasegar yang berhasil dijual dari bulan pertama (Januari) sampai bulan ke-8 dan jelaskandalambidangekonominya.

2. Besarnya penerimaan PT.Musi Mas dari hasil produksi minyak sawit Rp.720 M pada tahun kelima dan Rp.980 M pada tahun ketujuh.Apabila perkembangan tersebut seperti deret hitung,berapa perkembangan penerimanya per tahun?Berapa besar penerimaannya pada tahun pertama dan pada tahun keberapa penerimaannya sebesar Rp.460 M?

3. Jika Diketahui penduduk suatu kota berjumlah 1 juta jiwa pada tahun 1991.Tingkat pertumbuhannya 4% per tahun.Hitunglah jumlah penduduk kota tersebut pada tahun 2005.Jika mulai tahun 2005 pertumbuhannya menurun menjadi 2,5 %,berapakah jumlahnya 11 tahun kemudian?

4. iNPen merupakan perusahaan manufaktur yang memproduksi alat tulis berupa pulpen. Pada bulan Januari perusahaan menghasilkan 100.000 buah pulpen. Karena permintaan terus menerus meningkat diiringi dengan penambahan

tenaga kerja dan modal kerja, setiap bulannya perusahaan mampu menambah jumlah produksi sebanyak 5000 buah. Jika pertambahan jumlah produksi tersebut setiap bulannya adalah tetap, berapakah jumlah produksi pada bulan ke-9 di tahun yang sama? Dan berapa banyak pulpen yang telah dihasilkan dari bulan pertama (Januari) sampai bulan ke-10?

5. Seorang pemetik kebun memetik jeruknya setiap hari, dan mencatat banyaknya jeruk yang dipetik. Ternyata banyaknya jeruk yang dipetik pada hari ke-n memenuhi rumus Un = 100 + 50n. Jumlah jeruk yang telah dipetik selama 20 hari yang pertama adalah

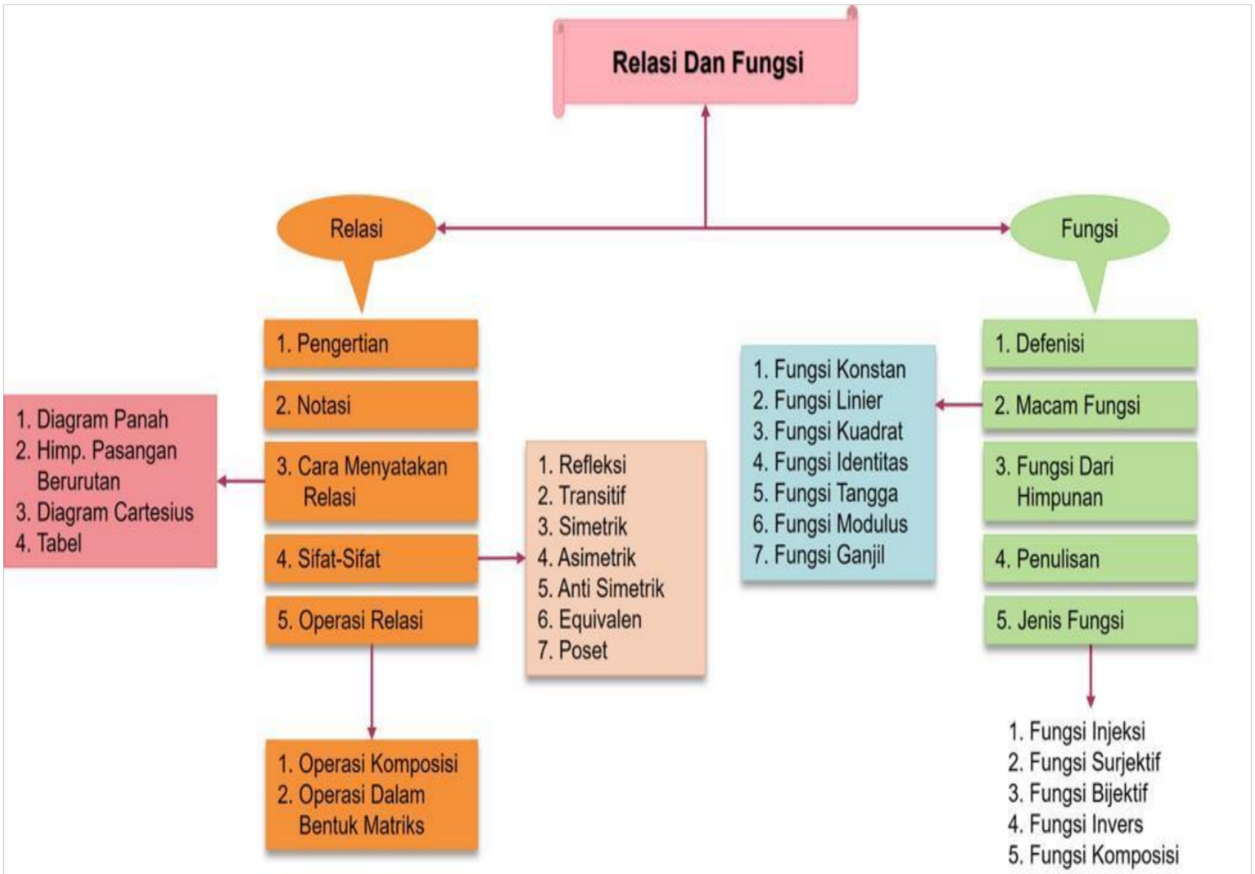
6. XYZ merupakan perusahaan manufaktur yang memproduksi alat tulis berupa pulpen. Pada bulan Januari perusahaan menghasilkan 10.000 buah pulpen. Karena permintaan terus menerus meningkat diiringi dengan penambahan tenaga kerja dan modal kerja, setiap bulannya perusahaan mampu menambah jumlah produksi sebanyak 500 buah. Jika pertambahan jumlah produksi tersebut setiap bulannya adalah tetap, berapakah jumlah produksi pada bulan ke-7 di tahun yang sama? Dan berapa banyak pulpen yang telah dihasilkan dari bulan pertama (Januari) sampai bulan ke-8?

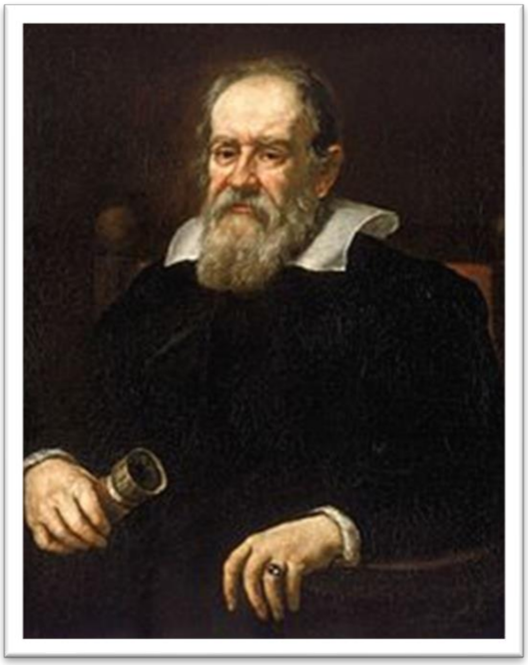
7. Keuntungan seorang pedagang bertambah setiap bulan dengan jumlah yang sama. Bila keuntungan sampai bulan keempat 30ribu rupiah, dan sampai bulan kedelapan 172ribu rupiah, maka keuntungan sampai bulan ke-18 adalah .

8. PT Kaldu Sari Nabati menghasilkan 2400 botol minuman pada bulan pertama produksinya. Dikarenakan kelemahan dalam bersaing dengan perusahaan lain, produksi berkurang sebanyak 500 buah setiap bulan. Jika penurunan produksi berlangsung konstan, berapa botol minuman yang dihasilkan pada bulan ke empat? Berapa botol minuman yang telah dihasilkan sampai dengan bulan tersebut ?

BAB IV

RELASI DAN FUNGSI





GALILEO

(1564 – 1642)

Galileo dipandang sebagai salah seorang pakar awal tentang Fungsi. Karyanya juga menunjukkan bahwa beliau orang yang mula-mula mengangkat konsep pemetaan antar himpunan. Pada tahun 1638, beliau mempelajari masalah tentang dua lingkaran yang konsentris (memiliki pusat yang sama) dengan pusat di O. Diameter lingkaran pertama dua kali lebih panjang dari diameter lingkaran kedua.

Secara kasat mata, banyaknya titik pada lingkaran pertama mestinya lebih banyak bahkan mungkin dua kali lebih banyak dari banyaknya titik pada lingkaran kedua. Tapi, dia mampu membuat pemetaan atau fungsi yang menunjukkan bahwa banyaknya titik pada kedua lingkaran itu sama.

A. RELASI

Dalam matematika modern, Relasi dan Fungsi digunakan untuk menunjukkan hubungan setiap elemen Domain dengan setiap elemen Range yang membentuk pasangan bilangan berurut.

Hubungan himpunan X = {x1, x2, x3, x4} dan Y = {y1, y2, y3, y4} akan merupakan Relasi dengan X sebagai Domain dan Y sebagai Range, yang ditulis sebagai R: X → Y. Jika setiap x $\in$ X dapat dipetakan ke setiap y $\in$ Y.

Hubungan himpunan X = {x1, x2, x3, x4} dan Y = {y1, y2, y3, y4} akan merupakan Fungsi dengan X sebagai Domain dan Y sebagai Range, yang ditulis sebagai F: X → Y. Jika dan hanya jika satu x $\in$ X dapat dipetakan ke satu y $\in$ Y.

1. Pengertian Relasi

Dalam kehidupan sehari-hari kita mengenal kata (istilah) relasi atau hubungan. Misalnya relasi (hubungan) "bersaudara dengan", Ali bersaudara dengan Ani. Dalam hal ini kita berbicara tentang relasi antar anggota himpunan manusia. Contoh lain relasi dalam himpunan manusia adalah "kawan", misalnya Darsono kawan Sriwiyati, Ratin kawan Suningo. Kedua relasi di atas adalah relasi pada suatu himpunan yaitu himpunan manusia. Ada juga relasi antar dua himpunan yang berbeda. Misalnya relasi "gemar" antara himpunan pelajar dengan himpunan cabang olahraga: Amin gemar sepakbola, Titik gemar berenang, Dian gemar voli.

Secara umum, relasi adalah himpunan semua pasangan berurutan (a, b) dengan a $\in$ A dan b $\in$ B disebut himpunan perkalian A dan B atau produk kartesius A dan B ditulis dengan notasi A x B dan didefinisikan sebagai berikut :

$$\mathbf{A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}}$$

Relasi dapat dinyatakan dengan pasangan terurut, yaitu untuk relasi bersaudara di atas kita peroleh himpunan pasangan terurut: {(Ali, Ani)}, untuk relasi kawan: {Darsono, Sriwiyati), (Ratin, Suningo)}, untuk relasi gemar: {(Amin, Sepakbola), (Titik, Renang), dan

(Dian, Voli)}. Relasi pada suatu himpunan atau relasi antar dua himpunan dapat pula ditunjukkan dengan diagram.Perhatikan contoh di bawah ini.

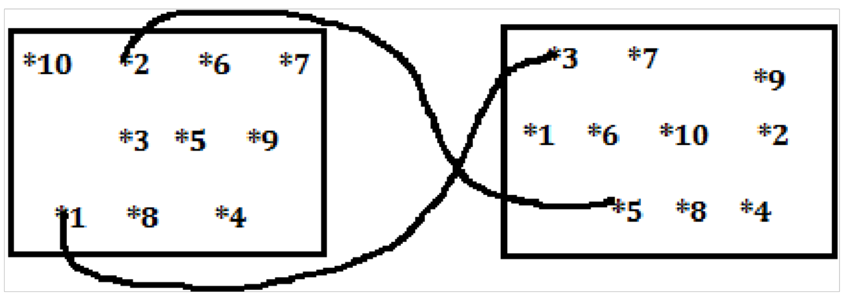
Suatu relasi R terdiri dari:

(1) Sebuah himpunan A
(2) Sebuah himpunan B
(3) Suatu kalimat terbuka P(x, y) dimana P(a, b) adalah benar atau salah untuk sebarang pasangan terurut (a, b) yang termasuk dalam A $\times$ B.

Contoh :

- Relasi "sahabat" pada H, dan H himpunan anak kelas 2 SMP Sukaria yang terdiri dari siswa dengan nomor urut 1 sampai dengan 10.

  R = Relasi pada H



  Yang bersahabat pada kelas ini hanya 1 dengan 3 dan 2 dengan 5, yang lain hanya teman biasa saja. Relasi ini dapat dinyatakan dengan himpunan pasangan terurut:

  R = {(1, 3), (3, 1), (2, 5), (5, 2)}

- Relasi "Suka" antara A himpunan terdiri 5 anak bersaudara Adi, Ani, Andi, Ati, dan Anto dengan B himpunan minuman yang terdiri dari teh, kopi, es campur, coca-cola, es cream, susu segar. R = {(Adi, Teh), (Ani, Es cream), (Andi, Kopi), (Ati, Cola), (Anto, Susu segar)}.

  Ternyata R $\subset$ A x B

- Dalam matematika kita jumpai banyak sekali relasi misalnya relasi 2 kali dari himpunan C = {2, 3, 4, 5} ke D = {1, 4, 6, 7, 8}.

  R = {(2, 4), (3, 6), (4, 8)}

Ternyata R ⊂ C x D

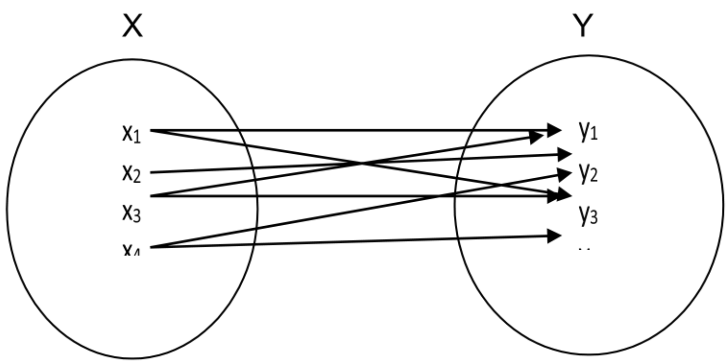
- Dalam himpunan P = {2, 3, 6, 8} kita mempunyai relasi “kurang dari” dan dinyatakan dalam himpunan pasangan terurut berikut.

  R = {(2, 3), (2, 6), (2, 8), (3, 6), (3, 8), (6, 8)}

  Ternyata R ⊂ P x P

Antara elemen-elemen dari dua buah himpunan seringkali terdapat suatu relasi atau hubungan tertentu. *Relasi* menurut bahasa berarti *hubungan.* Dalam matematika, *relasi* atau *hubungan* menyatakan hubungan antara anggota suatu himpunan dengan anggota himpunan yang lain.

Contoh dari relasi :



Contoh Gambar Dari Relasi

R: X → Y menghasilkan himpunan pasangan berurut :

A = {(x1,y1), (x1,y3), (x2,y2), (x3,y1), (x3,y3), (x4,y2), (x4,y4)}

Dalam pembahasan matematika ekonomi, hubungan antara variabel-variabel ekonomi dinyatakan sebagai suatu fungsi, misalnya hubungan antara jumlah permintaan sejenis barang (Qd) dan harganya (P) → Qd = f(P), hubungan antara pengeluaran konsumsi (C) dan pendapatan (Y) → C = f(Y), hubungan total cost (TC) dan jumlah produksi (Q) → TC = f(Q).

Selanjutnya relasi dari himpunan *A* ke himpunan *B*, artinya memetakan setiap anggota pada himpunan *A* (x ∈ *A*) dengan anggota pada himpunan *B* (y ∈ B). Relasi antara himpunan *A* dan himpunan *B juga* merupakan himpunan, yaitu himpunan yang berisi pasangan berurutan yang mengikuti aturan tertentu, contoh (x,y) ∈ *R*. Relasi biner

R antara himpunan A dan B merupakan himpunan bagian dari *cartesian product* $A \times B$ atau $R \subseteq (A \times B)$.

Contoh:

a. Terdapat empat siswa menyatakan mata pelajaran kesukaannya sebagai berikut:
Ardi menyukai Bahasa Indonesia, Rini dan Indri menyukai Matematika, dan Mirza menyukai IPA.
Dari pernyataan di atas terdapat dua himpunan yaitu:

A = himpunan siswa
= {Ardi, Indri, Mirza, Rini}

B = himpunan mata pelajaran
= {Bahasa Indonesia, Matematika, IPA}

Relasi antara anggota himpunan A ke himpunan B yang mungkin adalah *menyukai, menggemari, menyenangi,* dsb.

b. Diberikan dua himpunan:

E = {1, 2, 3, 4, 5}
F = {0, 2, 4, 6}

Dari dua himpunan tersebut didapat :
1 dikawankan dengan 2, 4, dan 6
2 dikawankan dengan 4 dan 6
3 dikawankan dengan 6
4 dikawankan dengan 6
5 dikawankan dengan 6

Relasi antara anggota himpunan E ke anggota himpunan F yang mungkin adalah kurang dari. Dan sebaliknya, relasi antara anggota himpunan F ke anggota himpunan E yang mungkin adalah lebih dari. Dari dua contoh di atas, himpunan A dan E disebut daerah asal (domain), dan himpunan B dan F disebut daerah kawan (kodomain). Sementara itu menyukai dan kurang dari disebut relasi. Himpunan semua anggota kodomain disebut range atau daerah hasil.

2. Notasi dalam Relasi

Relasi antara dua buah objek dinyatakan dengan himpunan pasangan ber urutan (x,y) ∈ R

- Contoh: relasi F adalah relasi ayah dengan anaknya, maka:
  F = {(x,y)|x adalah ayah dari y}
  xRy dapat dibaca: x memiliki hubungan R dengan y

3. Cara Menyatakan Relasi

Relasi antara himpunan A dan B dapat dinyatakan dengan beberapa cara penyajian sebagai berikut:

Contoh :

A = {1, 2, 3, 4, 5}

B = {0, 2, 4, 6}

1 dikawankan dengan 2, 4, dan 6

2 dikawankan dengan 4 dan 6

3 dikawankan dengan 4 dan 6

4 dikawankan dengan 6

5 dikawankan dengan 6

a. Diagram Panah

Himpunan A sebagai domain (daerah asal) diletakkan di sebelah kiri, dan himpunan B sebagai kodomain (kodomain) diletakkan di sebelah kanannya. Relasi antara himpunan A dan B ditunjukkan dengan arah panah. Seperti gambar di bawah ini!

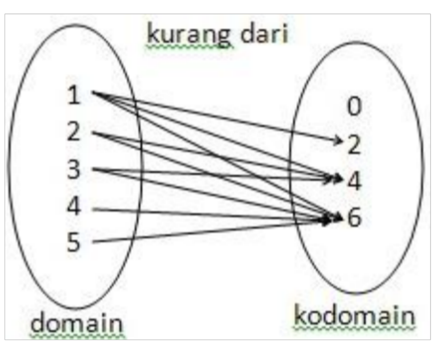


Diagram Panah Dari Himpunan A dan Himpunan B

b. Himpunan Pasangan Berurutan

Jika x elemen A dan y elemen B, maka relasi dari A ke B dapat dinyatakan dengan pasangan berurutan (x, y). Dari diagram panah di atas dapat dituliskan himpunan pasangan berurutannya sebagai berikut: {(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 4), (2, 6), (3, 4), (3, 6), (4, 6), (5, 6)}.

c. Diagram Kartesius

Pada koordinat cartesius daerah asal (domain) diletakkan pada sumbu X (sumbu mendatar) dan daerah kawan (kodomain) diletakkan pada sumbu Y (sumbu tegak). Sedangkan daerah hasilnya merupakan titik (noktah) koordinat pada diagram cartesius. Dari relasi di atas, dapat ditunjukkan diagram cartesiusnya seperti di bawah ini!

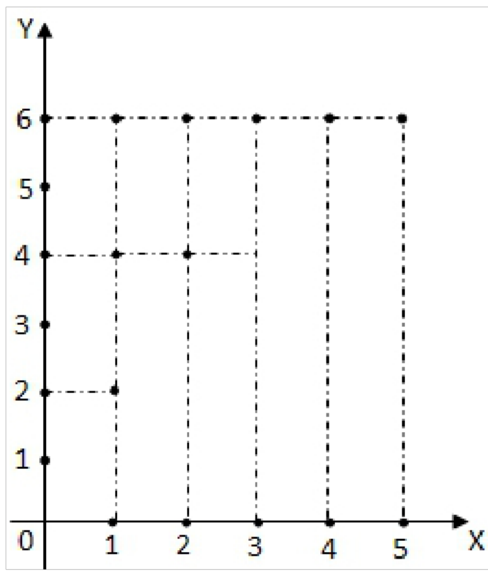


Diagram Cartesius

d. Tabel

Dari contoh diatas, dapat dibuat tabel seperti dibawah ini :

A	**B**
1	2
1	4
1	6
2	4
2	6
3	4
3	6
4	6
5	6

e. Matriks

Baris = domain

Kolom = kodomain

A \ B	**0**	**2**	**4**	**6**
1	1	1	1	1
2	0	0	1	1
3	0	0	1	1
4	0	0	0	1
5	0	0	0	1

Bentuk matrik :

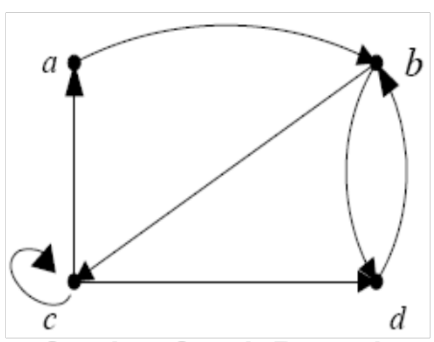
$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

f. Graph Berarah

- ♦ Hanya untuk merepresentasikan relasi pada satu himpunan (bukan antara dua himpuanan).
- ♦ Tiap unsur himpunan dinyatakan dengan sebuah **titik** (disebut juga **simpul atau *vertex***).
- ♦ Tiap pasangan terurut dinyatakan dengan **busur** (***arc***).
- ♦ Jika (a, b) ∈ R, maka sebuah busur **dibuat dari simpul *a* ke simpul *b*.**
- ♦ Simpul a disebut **simpul asal (*initial vertex*)**
- ♦ Simpul b disebut **simpul tujuan (*terminal vertex*)**
- ♦ Pasangan terurut (a, a) dinyatakan dengan busur dari simpul a ke simpul a sendiri. Busur semacam itu disebut ***loop***.

Contoh :

Misalkan R = {(a, b), (b, c), (b, d), (c, c) (c, a), (c, d), (d, b)} adalah relasi pada himpunan {a, b, c, d}.



Gambar Graph Berarah

4. Sifat-sifat Relasi

a. Refleksif

Suatu relasi disebut refleksi jika dan hanya jika ia merelasikan suatu unsur dengan dirinya sendiri. Relasi pada himpunan disebut refleksif jika ia merelasikan himpunan itu dengan himpunan itu sendiri. Ketiga relasi ⊂, =, dan ~ merupakan relasi refleksif karena untuk sembarang himpunan A berlaku :

A ⊂ A, A = A, dan A ~ A

Suatu relasi R pada himpunan A adalah refleksif jika dan hanya jika (a, a) ∈ R untuk setiap a ∈ A.

Misalkan $R = (A, A, P\ (x, y))$ adalah suatu relasi dalam sebuah himpunan *A*, yaitu, misalkan *R* sebuah subhimpunan dari $A \times A$. Maka *R* disebut *relasi refleksif* jika, untuk setiap $a \in A$,

$$\boldsymbol{(a, a) \in R}$$

Contoh :

Relasi "sejenis kelamin dengan" pada himpunan manusia adalah relasi refleksif, karena setiap orang sejenis kelamin dengan dirinya sendiri. Demikian pula relasi "sama dengan" pada himpunan bilangan, karena setiap bilangan, karena setiap bilangan sama dengan bilangan itu sendiri. Sedangkan relasi "ayah dari" pada himpunan manusia bukan relasi refleksif karena seseorang itu bukan ayah dari dirinya sendiri.

- Misalkan $V = \{1,2,3,4\}$ dan $R = \{(1,1), (2,4), (3,3), (4,1), (4,4)\}$. Maka R bukanlah suatu relasi refleksif karena (2, 2) tidak termasuk dalam *R*. Perhatikan bahwa semua pasangan terurut (a, a) haruslah termasuk dalam *R* agar *R* menjadi refleksif.
- Bilamana suatu relasi *R* dalam himpunan *Atidaklah* refleksif?

  Pemecahan:

  R tidak refleksif jika ada sekurang-kurangnya satu elemen $a\ \varepsilon\ A$ sehingga $(a, a) \in R$
- Misalkan $W = \{1,2,3,4\}$ dan $R = \{(1,1), (1,3), (2,2), (3,1), (4,4)\}$. Apakah R refleksif?

  Pemecahan :

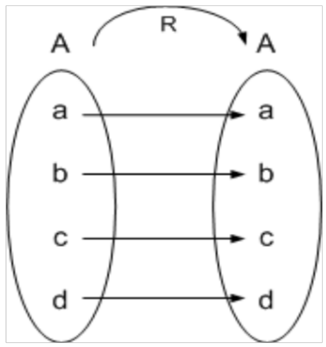
  R tidak refleksif karena $3 \in W$ dan $(3, 3) \in R$

- Misalkan *A* sebarang himpunan dan *D* adalah "garis diagonal" dari $A \times A$, yaitu, *D* adalah himpunan dari semua pasangan (a, a) dimana $a \in A$. Hubungan apakah yang terdapat antara sebarang relasi refleksif *R* dalam *A* dan *D*?

  Pemecahan :

  Setiap relasi refleksif *R* dalam *A* haruslah mengandung "garis diagonal". Dengan kata lain, *D* adalah subhimpunan dari *R* jika *R* adalah refleksif.

  Sebuah relasi dikatakan *refleksif* jika sedikitnya: x ∈ A, *x*R*x*



b. Transitif

Relasi transitif disebut juga dengan relasi berangkai.Suatu relasi antara dua himpunan disebut transitif jika dan hanya jika himpunan pertama berelasi dengan himpunan ketiga mengakibatkan himpunan pertama berelasi dengan himpunan ketiga. Suatu relasi R pada himpunan A adalah transitif jika dan hanya jika setiap (a, b) ∈ R dan setiap (b, c) ∈ R maka (a, c) ∈ R untuk setiap a, b, c ∈ A.

Suatu relasi R dalam sebuah himpunan A adalah *relasi transitif* jika

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{R} \text{ dan } (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \in \boldsymbol{R} \text{ maka } (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) \in \boldsymbol{R}$$

Ketiga relasi ⊂, =, dan ~ merupakan relasi transitif, sebab

i) $A \subset B, B \subset C \rightarrow A \subset C$

ii) $A = B, B = C \rightarrow A = C$

iii) $A \sim B, B \sim C \rightarrow A \sim C$

Dengan kata lain, jika a berhubungan dengan b dan b berhubungan dengan c, maka a berhubungan dengan c. Dalam himpunan bilangan relasi “sama dengan” (=) adalah transitif sebab jika a = b dan b = c maka a = c. sedangkan relasi “ayah dari” dan “dua kali dari” bukan relasi transitif.

Contoh :

- Relasi “saudara kandung dari” pada himpunan manusia adalah relasi transitif sebab jika Ali saudara kandung dari Siti dan Siti saudara kandung dari Tuti tentulah Ali saudara kandung dari Tuti.
- Misalkan A adalah himpunan dari penduduk bumi. Misalkan *R* suatu relasi dalam *A* yang didefinisikan oleh kalimat terbuka “*x* mencintai *y*”. Jika *a* mencintai *b* dan *b* mencintai *c* belum tentu berarti bahwa *a* mencintai *c*. Oleh sebab itu, *R* bukanlah suatu relasi transitif.
- Misalkan $W = \{a, b, c\}$, dan misalkan $R = \{(a, b), (c, b), (b, a), (c, a)\}$. Maka R bukanlah suatu relasi transitif karena $(c, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$ tetapi $(c, a) \in R$.

c. Simetrik

Suatu relasi antara dua himpunan disebut simetrik jika dan hanya jika himpunan pertama berelasi dengan himpunan kedua mengakibatkan himpunan kedua berelasi pula dengan himpunan pertama.

Relasi = dan ~ adalah relasi simetrik sebab

i) A = B → B = A

ii) A ~ B → B ~ A

Sedangkan relasi ⊂ bukan relasi simetrik sebab

iii) A ⊂ B ↛ B ⊂ A

Suatu relasi R pada himpunan A adalah simetrik jika dan hanya jika (a, b) ∈ R maka (b, a) ∈ R untuk setiap a, b ∈ A.

Misalkan *R* sebuah subhimpunan dari $A \times A$, yaitu *R* adalah suatu relasi dalam *A*. Maka *R* disebut suatu *relasi simetris* jika,

$$(a, b) \in R \text{ maka berarti } (b, a) \in R$$

Yaitu, jika a berhubungan dengan b maka b juga berhubungan dengan a.

Contoh :

- Relasi "saudara dari" adalah relasi simetrik pada himpunan manusia, karena jika Ali saudara dari Siti tentulah Siti saudara dari Ali. Demikian pula relasi "tegak lurus pada" pada himpunan garis dalam geometri adalah relasi simetrik, karena jika m tegak lurus pada n tentulan n tegak lurus pada m. sedangkan relasi "ayah dari" bukan relasi simetrik karena jika Didi ayah dari Mini tentulah Mini bukan ayah dari Didi. Pada himpunan relasi "kurang dari" bukan relasi simetrik sebab 2 kurang dari 3 tetapi 3 tidak kurang dari 2.
- Misalkan $S = \{1,2,3,4\}$, dan misalkan

  $$R = \{(1,3), (4,2), (2,4), (2,3), (3,1)\}$$

  Maka R bukanlah suatu relasi simetris karena

  $$(2,3) \in R \text{ tetapi } (3,2) \in R$$

  Bilamana suatu relasi *R* dalam himpunan *Atidaklah* simetris?

  Pemecahan :

  R tidaklah simetris jika terdapat elemen-elemen $a \in A, b \in A$ sehingga

  $$(a, b) \in R, (b, a) \in R$$

  Perhatikan bahwa $a \neq b$, karena bila tidak demikian $(a, b) \in R$.

  - Misalkan $V = \{1,2,3,4\}$ dan $R = \{(1,2), (3,4), (2,1), (3,3)\}$ Apakah R simetris?

    Pemecahan :

    R tidaklah simetris, karena $3 \in V, 4 \in V, (3,4) \in R \; dan \; (4,3) \in R$

d. Asimetrik

Relasi asimetrik adalah kebalikan dari relasi simetrik. Artinya (a,b) ∈ R, (b,a) ∉ R

Contohnya: R = {(a,b), (a,c), (c,d)}.

e. Anti Simetrik

Suatu relasi antar himpunan A dengan himpunan B disebut anti simetrik jika dan hanya jika A berelasi dengan B dan B berelasi dengan A mengakibatkan B dan B berelasi dengan A mengakibatkan A = B.

Relasi $\subset$ adalah anti simetrik, sebab

A $\subset$ B dan B $\subset$ A $\rightarrow$ A = B

Sedangkan relasi ~ bukan relasi anti simetrik sebab

A ~ B dan B ~ A $\nrightarrow$ A = B

Suatu relasi R disebut relasi anti simetrik jika (a, b) $\in$ R dan (b, a) $\in$ R maka a = b. dengan kata lain; Jika a, b A, a $\neq$ b, maka (a, b) $\in$ R atau (b, a) $\in$ R, tetapi tidak kedua-duanya.

Suatu relasi R dalam sebuah himpunan A, yaitu sebuah subhimpunan dari $A \times A$, disebut suatu *relasi antisimetris* jika

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{R} \textbf{ dan } (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \in \boldsymbol{R} \textbf{ maka berarti } \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$$

Dengan kata lain, jika $a \neq b$ maka mungkin a berhubungan dengan b dan mungkin b berhubungan dengan a, tetapi tidak pernah kedua-duanya.

Contoh :

- Misalkan R suatu relasi dalam himpunan bilangan asli yang didefinisikan "y habis dibagi oleh x", maka R termasuk relasi anti simetrik karena jika b habis dibagi a dan a habis dibagi b, maka a = b.
- Misalkan A = {1, 2, 3} dan Rl = {(1, 1), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2)}, maka Rl bukan relasi anti simetrik, sebab (2, 3) $\in$ Rl dan (3, 2) $\in$ Rl pula.
- Misalkan N adalah bilangan-bilangan asli dan misalkan R adalah relasi dalam N yang didefinisikan oleh "y habis dibagi oleh x". MakaR adalah anti-simetris karena b habis dibagi oleh a dan a habis dibagi oleh b berarti $a = b$
- Bilamana suatu relasi *R* dalam himpunan *Atidak* anti-simetris?

Pemecahan :

R tidaklah anti-simetris jika terdapat elemen-elemen $a \epsilon A, b \epsilon A, \ a \ \neq b$ sehingga $(a, b) \epsilon \ R$ dan $(b, a) \epsilon \ R$

- Misalkan $W = \{1,2,3,4\}$ dan $R = \{(1,2), (3,4), (2,2), (3,3), (2,1)\}$. Apakah *R* anti-simetris?

  Pemecahan :

R tidaklah anti-simetris karena $1 \ \in W, 2 \in W, 1 \neq 2, (1,2) \in R \ dan \ (2,1) \in R.$

f. Equivalen

Sebuah relasi R dikatakan equivalen jika memenuhi syarat:

1) Refleksif
2) Simeteris
3) Transitif

g. Partially Order Set (POSET)

Sebuah relasi R dikatakan terurut sebagian (POSET) jika memenuhi syarat:

1) Refleksif
2) Antisimetri
3) Transitif

5. Operasi dalam Relasi

Operasi himpunan seperti irisan, gabungan, selisih, dan penjumlahan (beda setangkup) juga berlaku pada relasi.

Jika R_1 dan R_2 masing-masing merupakan relasi dari himpuna *A* ke himpunan *B*, maka $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, $R_1 - R_2$, dan $R_1 \oplus R_2$ juga adalah relasi dari *A* ke *B*.

Contoh operasi relasi

Misalkan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$.

Relasi $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$

Relasi $R_2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d)\}$

Maka :

$R_1 \cap R_2 = \{(a, a)\}$

$R_1 \cup R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$

$R_1 - R_2 = \{(b, b), (c, c)\}$

$R_2 - R_1 = \{(a, b), (a, c), (a, d)\}$

$R_1 \oplus R_2 = \{(b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$

1. Operasi komposisi

Operasi komposisi merupakan gabungan dari dua buah relasi yang harus memenuhi syarat tertentu, yaitu jika R1 relasi dari A ke A dan R2 relasi dari A ke A, maka relasi komposisi R1 dan R2, dinyatakan oleh R2°R1 berarti relasi R1 diteruskan oleh relasi R2. Syarat tersebut adalah jika (a, b) $\in$ R1 dan (b, c) $\in$ R2, maka (a, c) $\in$ R2°R1.

Contoh operasi komposisi :

Misalkan, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ dan $C = \{s, t, u\}$

Relasi dari *A* ke *B* didefinisikan oleh :

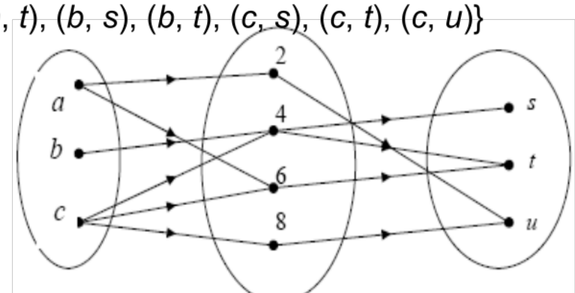
$R = \{(a, 2), (a, 6), (b, 4), (c, 4), (c, 6), (c, 8)\}$

Relasi dari *B* ke *C* didefisikan oleh :

$T = \{(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)\}$

Maka komposisi relasi *R* dan *T* adalah

$T \circ R = \{(a, u), (a, t), (b, s), (b, t), (c, s), (c, t), (c, u)\}$



Gambar operasi komposisi

2. Operasi dalam bentuk matriks

   Misalkan bahwa relasi R_1 dan R_2 pada himpunan *A* dinyatakan oleh matriks

   $$R_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad R_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   Maka

   $$R_1 \cap R_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   $$R_1 \cup R_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

B. FUNGSI

Fungsi f adalah suatu relasi yang menghubungkan setiap anggota x dalam suatu himpunan yang disebut daerah asal (Domain) dengan suatu nilai tunggal f(x) dari suatu himpunan kedua yang disebut daerah kawan (Kodomain). Himpunan nilai yang diperoleh dari relasi tersebut disebut daerah hasil (Range). Untuk memberi nama suatu fungsi dipakai sebuah huruf tunggal seperti f, g, dan huruf lainnya. Maka f(x), yang di baca " f dari x " menunjukkan nilai yang diberikan oleh f kepada x. Misalkan : f(x) = x+ 2, maka f(3) = 3 + 2.

- Fungsi f disebut ***satu satu*** / ***injectif*** ,jika tidak ada elemen himpunan A yang mempunyai bayangan yang sama atau untuk setiap a,b $\in$ A, jika a $\neq$ b maka f(a) $\neq$ f(b).

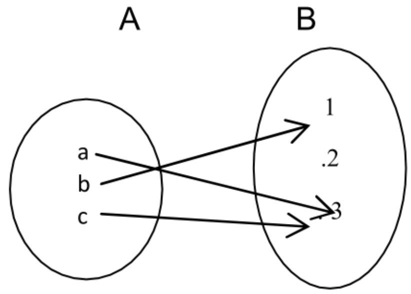
  Contoh: f = {(1,w),(2,u),(3,v)}

- Fungsi f dikatakan ***pada*** / ***onto*** / ***surjektif***, jika setiap anggota himpunan B adalahmerupakan bayangan dari satu atau lebih anggota himpunan A.

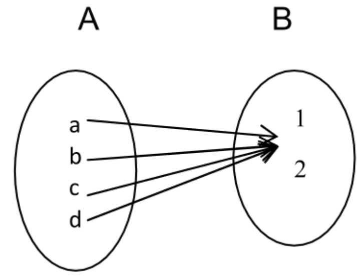
  Contoh: f = {(1,w),(2,u),(3,v)}

- Fungsi f dikatakan ***berkoresponden satu – satu*** / ***bijektif*** jika f adalah fungsi satu satudan pada.

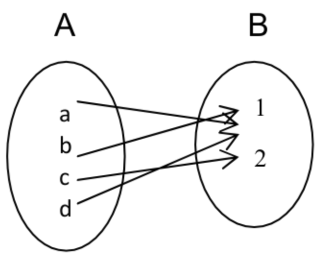
Gambar berikut akan memperlihatkan perbedaan fungsi, fungsi satu – satu, fungsi pada.

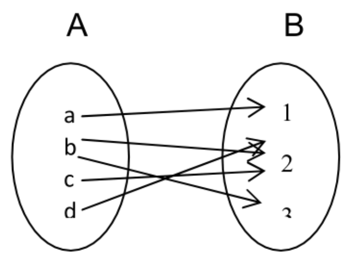


Fungsi satu – satu bukan pada.



Fungsi pada bukan satu – satu

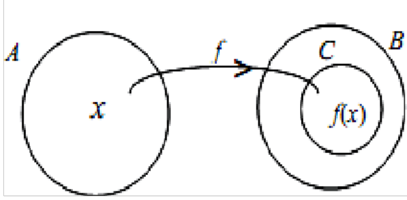




Bukan fungsi satu – satu, bukan pada Bukan Fungsi

1. Definisi Fungsi

Pengertian Fungsi



Suatu relasi dari himpunan A ke himpunan B disebut fungsi dari A ke B jika setiap anggota A dipasangkan dengan tepat satu anggota B.

Jika f adalah suatu fungsi dari A ke B, maka:

- himpunan A disebut domain (daerah asal),
- himpunan B disebut kodomain (daerah kawan) dan himpunan anggota B yang pasangan (himpunan C) disebut range (hasil) fungsi f.

Contoh:

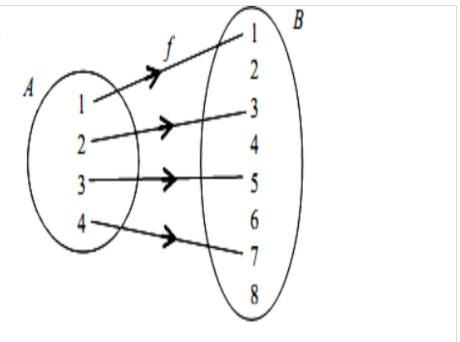
Misal A = {1,2,3}, B = {u,v,w}

1. f = {(1,u),(2,v),(3,w)} adalah fungsi
2. f = {(1,u),(2,u),(3,w)} adalah fungsi.

3. Diketahui $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Suatu fungsi $f : A \to B$ ditentukan oleh $f(x) = 2x - 1$.
   1. Gambarlah fungsi f dengan diagram panah.
   2. Tentukan range fungsi f.
   3. Gambarlah grafik fungsi f.

   Jawab :

a.



b. Dari diagram di atas, terlihat bahwa:

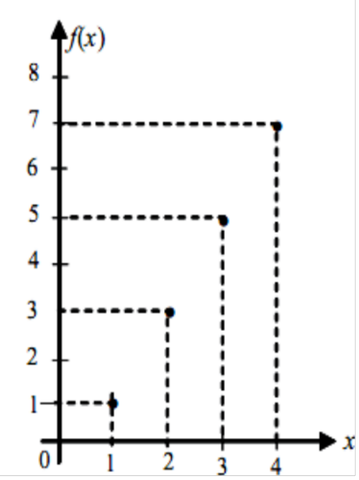
$f(x) = 2x - 1$ | $f(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$

$f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ | $f(4) = 2 \cdot 4 - 1 = 7$

$f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$

Jadi, range fungsi f adalah $\{1, 3, 5, 7\}$.

c. Grafik fungsi



2. Macam-macam fungsi

1. Fungsi Konstan

Suatu fungsi f : A → B ditentukan dengan rumus f(x) disebut fungsi konstan apabila untuk setiap anggota domain fungsi selalu berlaku f(x) = C, dimana C bilangan konstan.

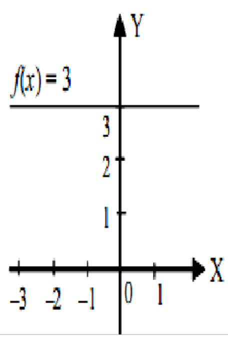
Contoh soal :

Diketahui f : R → R dengan rumus f(x) = 3 dengan daerah domain : {x|- 3 ≤ x < 2}. Tentukan gambar grafiknya.

Penyelesaian

x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	3	3	3	3	3

Grafik:



2. Fungsi Linier

Suatu fungsi f(x) disebut fungsi linear apabila fungsi itu ditentukan oleh f(x) = ax + b. Dimana a ≠ 0, a dan b bilangan konstan dan grafiknya berupa garis lurus.

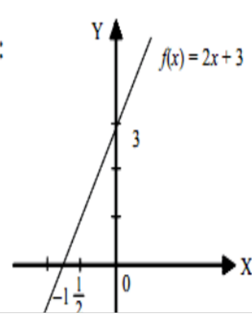
Contoh soal :

Jika diketahui fungsi f(x) = 2x + 3, gambarlah grafiknya.

Penyelesaian

$2x+3$		
x	0	$-1\frac{1}{2}$
$f(x)$	3	0

Grafik:

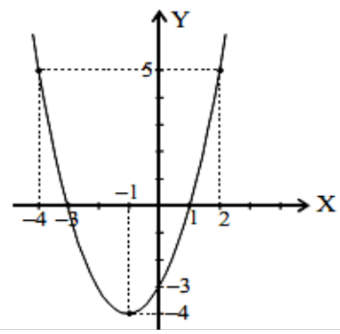


3. Fungsi Kuadrat

Suatu fungsi f(x) disebut fungsi kuadrat apabila fungsi itu ditentukan oleh f(x) = ax^2 + bx + c, dimana a ≠ 0 dan a, b, dan c bilangan konstan dan grafiknya berupa parabola.

Contoh soal :

Perhatikan gambar di bawah ini, fungsi f ditentukan oleh $f(x) = x^2 + 2x - 3$.



Tentukanlah:

a. Domain fungsi f.
b. Nilai minimum fungsi f.
c. Nilai maksimum fungsi f.
d. Range fungsi f.
e. Pembuat nol fungsi f.
f. Koordinat titik balik minimum.

Penyelesaian

a. Domain fungsi f adalah $\{x \mid -4 \le x < 2\}$.
b. Nilai minimum fungsi f adalah -4.
c. Nilai maksimum fungsi f adalah 5.
d. Range fungsi f adalah $\{y \mid -4 \le y \le 5\}$.
e. Pembuat nol fungsi f adalah -3 dan 1.
f. Koordinat titik balik minimum grafik fungsi f adalah $(-1, -4)$.

4. Fungsi Identitas

Suatu fungai f(x) disebut fungsi identitas apabila setiap anggota domain fungsi berlaku f(x) = x atau setiap anggota domain fungsi dipetakan pada dirinya sendiri. Grafik fungsi identitas berupa garis lurus yang melalui titik asal dan semua titik absis maupun ordinatnya sama. Fungsi identitas ditentukan oleh f(x) = x.

Contoh Soal :

Fungsi pada R didefinisikan sebagai f(x) = c untuk setiap x.

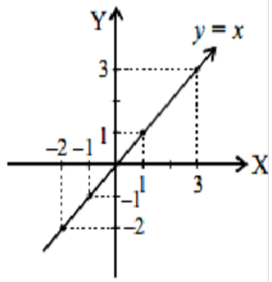
a. Carilah f(-2), f(0), f(1), f(3)

b. Gambarlah grafiknya.

Penyelesaian

a. $f(x) = x$
   $f(-2) = -2$
   $f(0) = 0$
   $f(1) = -1$
   $f(3) = 3$

b. Grafiknya:



5. Fungsi Tangga (Bertingkat)

Suatu fungsi f(x) disebut fungsi tangga apabila grafik fungsi f(x) berbentuk interval-interval yang sejajar.

Contoh soal

Diketahui fungsi: $f(x) = \begin{cases} -1, \text{ jika } x \quad -1 \\ 0, \text{ jika } -1 < x \quad 2 \\ 2, \text{ jika } 2 < x \quad 4 \\ 3, \text{ jika } x > 4 \end{cases}$

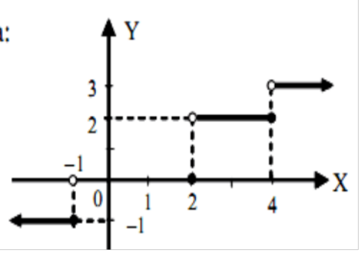
Tentukan interval dari:

a. $f(-2)$
b. $f(0)$
c. $f(3)$
d. $f(5)$
e. gambar grafiknya.

Penyelesaian

a. $f(-2) = -1$
b. $f(0) = 0$
c. $f(3) = 2$
d. $f(5) = 3$

e. grafiknya:



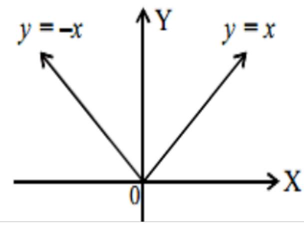
6. Fungsi Modulus

Suatu fungsi f(x) disebut fungsi modulus (mutlak) apabila fungsi ini memetakan setiap bilangan real pada domain fungsi ke unsur harga mutlaknya.

$f : x \rightarrow |x|$ atau $f : x \rightarrow |ax + b|$

$f(x) = |x|$ artinya:

$$|x| \begin{cases} x, \text{ jika } x \geq 0 \\ -x, \text{ jika } x < 0 \end{cases}$$



7. Fungsi Ganjil dan Fungsi Genap

Suatu fungsi fungsi ganjil apabila berlaku :

f(-x) = -f(x) dan disebut fungsi genap apabila berlaku f(-x) = f(x).

Jika f(-x) ≠−f(x) maka fungsi ini tidak genap dan tidak ganjil.

8. Fungsi dari Himpunan

Fungsi adalah bentuk khusus dari relasi. Sebuah relasi dikatakan fungsi jika xRy, untuk **setiap** x anggota A memiliki **tepat satu** pasangan, y, anggota himpunan B. Kita dapat menuliskan $f(a) = b$, jika b merupakan unsur di B yang dikaitkan oleh f untuk suatu a di A. Ini berarti bahwa jika $f(a) = b$ dan $f(a) = c$ maka $b = c$. Jika f adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B, kita dapat menuliskan dalam bentuk : $f : A \rightarrow B$ artinya f memetakan himpunan A ke himpunan B. Nama lain untuk fungsi adalah pemetaan atau transformasi.

9. Penulisan Fungsi

a. Himpunan pasangan terurut.

   Misalkan fungsi kuadrat pada himpunan {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10} maka fungsi itu dapat dituliskan dalam bentuk :

   $f = \{(2, 4), (3, 9)\}$

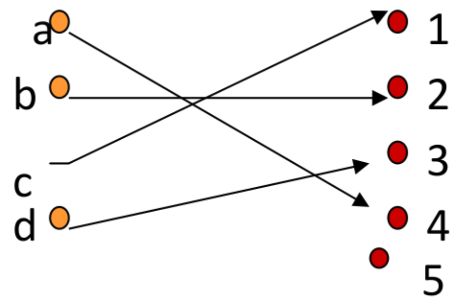
b. Formula pengisian nilai (assignment)

   - $f(x) = x^2 + 10$,
   - $f(x) = 5x$

3. Jenis-jenis Fungsi

1. Fungsi Injektif (satu-satu)

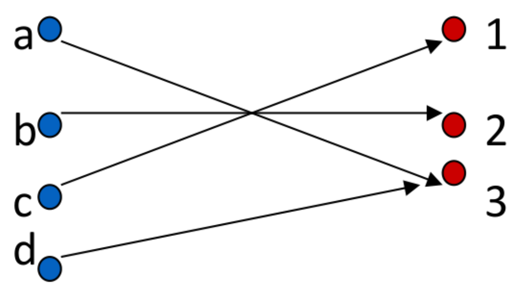
Fungsi f: A → B disebut fungsi satu-satu jika dan hanya jika untuk sembarang a_1 dan a_2 dengan a_1 tidak sama dengan a_2 berlaku $f(a_1)$ tidak sama dengan $f(a_2)$. Dengan kata lain, bila $a_1 = a_2$ maka $f(a_1)$ sama dengan $f(a_2)$.



Gambar Fungsi Injektif (satu-satu)

2. Fungsi Surjektif

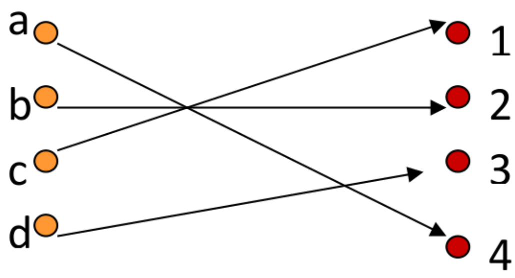
Fungsi f: A → B disebut fungsi kepada jika dan hanya jika untuk sembarang *b* dalam kodomain *B* terdapat paling tidak satu *a* dalam domain *A* sehingga berlaku $f(a) = b$.
Suatu kodomain fungsi surjektif sama dengan *range*-nya (semua kodomain adalah peta dari domain).



Gambar Fungsi Surjektif

3. Fungsi Bijektif

Fungsi f: A → B disebut disebut fungsi bijektif jika dan hanya jika untuk sembarang *b* dalam kodomain *B* terdapat tepat satu *a* dalam domain *A* sehingga $f(a) = b$, dan tidak ada anggota *A* yang tidak terpetakan dalam *B*.
Dengan kata lain, fungsi bijektif adalah **fungsi injektif sekaligus fungsi surjektif.**



Gambar Fungsi Injektif (satu-satu)

4. Fungsi Invers

Fungsi invers adalah fungsi yang diperoleh dengan mempertukarkan domain (kebalikan dari fungsi itu sendiri) dan range fungsi asal, jika fungsi asal merupakan fungsi satu-satu. Jika fungsi asal adalah y = f(x), maka fungsi inversnya adalah x = f-1(y) atau x = f-1[f(x)].

Contoh : Jika diketahui fungsi asal adalah f(x) = 2x -1, maka fungsi inversnya adalah :

y = 2x -1

2x = y +1

x = (y + 1)/2

f-1(y) = (y + 1)/2

f : A → B di mana **f(a) = b**

f^{-1}: B → A di mana **f^{-1}(b) = a**

Catatan: **f** dan **f^{-1}** harus bijective

5. Fungsi Komposisi (Composite Function)

5 x = g(z) maka fungsi komposisinya adalah y = f[g(z)].

Contoh : Jika f(x) = x2 - x -1 dan g(x) = x - 1 maka fungsi komposisi f[g(x)] adalah :

f[g(x)] = [g(x)]2 - [g(x)] -1

= (x - 1)2 - (x - 1) – 1 = x2 -3x + 1

6. Operasi Fungsi

(f $\underline{+}$ g)(x) = f(x) + g(x)

(f . g)(x) = f(x) . g(x)

Komposisi:

(f o g)(x) = f(g(x))

Soal Pilihan Berganda Relasi Dan Fungsi

1. Ayah menabung di Bank dengan tabungan awal Rp500.000,00. Jika ayah rutin menabung setiap bulan dengan besar yang sama dengan tabungan awal, maka jumlah tabungan ayah pada bulan ke-6 adalah dan narasikan dalam bidang ekonominya.

A. Rp3.125.000,00.

B. Rp2.950.000,00.

C. Rp3.000.000,00.

D. Rp2.500.000,00.

2. Fungsi permintaan suatu barang ditunjukkan oleh Q = 19 – P dan penawarannya adalah Q = -8 + P2. Berapakah keseimbangan pasarnya dan narasikan dalam bidang ekonominya.

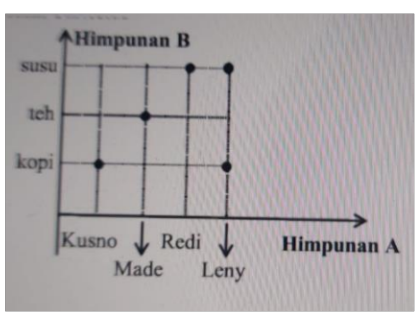
a. Pe = 2 dan Qe = 10

b. Pe = -3 dan Qe = -10

c. Pe = -2 dan Qe = -10

d. Pe = 3 dan Qe = 10

3. Kusno, Made, Redi, dan Lenysedangberkumpul di sebuah cafe yang bernama Cafetaria. Cafe tersebut menjual beberapa jenis minuman yang telah disediakan. Data tersebut disajikan dalam bentuk grafik Cartesius, sebagai berikut:



Berdasarkan grafik tersebut, maka himpunan pasangan berurutannya adalah dan narasikan dalam bidang ekonominya.

a. (Kusno, kopi); (Made, teh); (Redi, susu); (Leny, kopi); (Leny, susu)

b. (Kusno, susu); (Made, teh); (Redi, kopi); (Leny, kopi); (Leny, susu)

c. (Kusno, kopi); (Made, susu); (Redi, susu); (Leny, kopi); (Leny, teh)

d. (Kusno, teh); (Made, teh); (Redi, susu); (Leny, kopi); (Leny, susu)

4. Pada saat harga daging sapi Rp 60.000/kg jumlahdaging yang ditawarkan 5.000 kg. Pada saat harga naik menjadi Rp 80.000/kg. Jumlah daging yang ditawarkan naik menjadi 6.000 kg. Maka fungsi penawarannya adalah dan narasikan dalam bidang ekonominya.

a. Q =P - 8.000

b. Q =P – 3.000

c. Q =P – 2.000

d. Q =P + 2.000

e. Q =P + 8.000

5. Sebuah pabrik sepatu menghasilkan 60 pasang sepatu dengan biaya tetap Rp.8.000 dan biaya variabel total Rp.30.000. kemudian pabrik sepatu itu menambah produksinya menjadi 61 pasang dengan biaya tetap Rp. 8.000 dan biaya variabel total Rp.35.000. berapakah biaya marginalnya dan narasikan dalam bidang ekonominya.

a. Rp3000

b. Rp8000

c. Rp5000

d. Rp11.000

e. Rp13.000

6. Jika fungsi konsumsi C = 95.000 + 0,75Y dalam rupiah, sedangkan C merupakan besarnya konsumsi, Y besarnya pendapatan, maka besarnya konsumsi apabila tabungan sebesar Rpl00.000,00 adalah dan narasikan dalam bidang ekonominya.

a. 780.000

b. 150.000

c. 270.000

d. 350.000

e. 680.000

7. Diketahui C = 3.000 + 0,75y, dimana C = konsumsi dan Y = pendapatan. Apabila pada saat itu diadakan pertambahan investasi sebesar Rp1.000.000,00, Maka pendapatan akan bertambah dengan dan narasikan dalam bidang ekonominya.

a. Rp750.000,00

b. Rp1.050.000,00

c. Rp1.750.000,00

d. Rp4.000.000,00

e. Rp7.500.000,00

8. Saat sebuah produk memiliki harga sebesar 100.000/unit, maka jumlah permintaannnya sebanyak 20 unit. Namun ketika harganya turun menjadi 80.000/unit, jumlah permintaannnya menjadi 40 unit. Tentukanlah fungsi permintaan dari contoh diatas dan narasikan dalam bidang ekonominya.

a. 120.000 + 1.000Q

b. 120.000 - 1.000Q

c. 12.000 + 1.000Qa

d. 120.000 + 100Q

e. 120.000 - 100Q

9. Permintaan uang untuk transanksi dan jaga-jaga dalam perekonomian masyarakat memenuhi fungsi M_1 = 0.25Y dan permintaan uang untuk berspekulasi adalah M_2 = 400 – 500i. Sedangkan jumlah uang beredar M_s tetap yaitu 600. Maka fungsi permintaan uang tersebut adalah dan narasikan dalam bidang ekonominya.

a. y = 800+500 i

b.y = 800+2000 i

c.y = 300+200 i

d.y = 200+200 i

e.y = 400+200 i

10. Import gandum Indonesia dari Australia ditunjukkan dalam imporotonomnya sebesar 25 dan marginal propensity to import nya 0,05. Maka besar nilai importnya jika pendapatan nasional sebesar 600 serta persamaan fungsinya ialah dan narasikan dalam bidang ekonominya.

a. 52 dan M = 25 + 0.05y

b. 59 danM = 25 + 0.05y

c. 55 danM = 25 + 0.05y

d. 56 danM = 25 + 0.05y

e. 61 danM = 25 + 0.05y

Soal Essay Relasi Dan Fungsi

1. Tentukanlah variable terikat, variable bebas dari hubungan ekonomi berikut. Setelah itu nyatakan hubungan antar variable dalam bentuk fungsi umum. Omzet penjualan sebuah perusahaan (s) tergantung dari harga satuan produk (p), insentif (i), pengalaman tenaga pemasaran (e), biaya iklan yang dikeluarkan oleh perusahaan (a) dan narasikan dalam bidang ekonominya.

2. Seorang manager pemasaran memperoleh gaji sebesar Rp100.000.000,00 per tahun ditambah 5% komisi dari total penjualan selama setahun. Gaji yang diterima manager tersebut selama setahun jika total penjualan sebesar Rp5.000.000.000,00 adalah dan narasikan dalam bidang ekonominya.

3. Abang menabung di Bank dengan tabungan awal Rp500.000. jika, abang rutin menabung setiap bulan dengan besar yang sama dengan tabungan awal, maka jumlah tabungan ayah pada bulan ke-6 adalah dan narasikan dalam bidang ekonominya.

4. Diketahui harga obral sejenis barang elektronik adalah 60% dari harga asal ditambah biaya pemeliharaan sebesar Rp50.000,-. Jika harga obral diketahui sebesar Rp950.000,- maka tentukanlah persamaan harga obral barang tersebut, harga asalnya dan narasikan dalam bidang ekonominya.

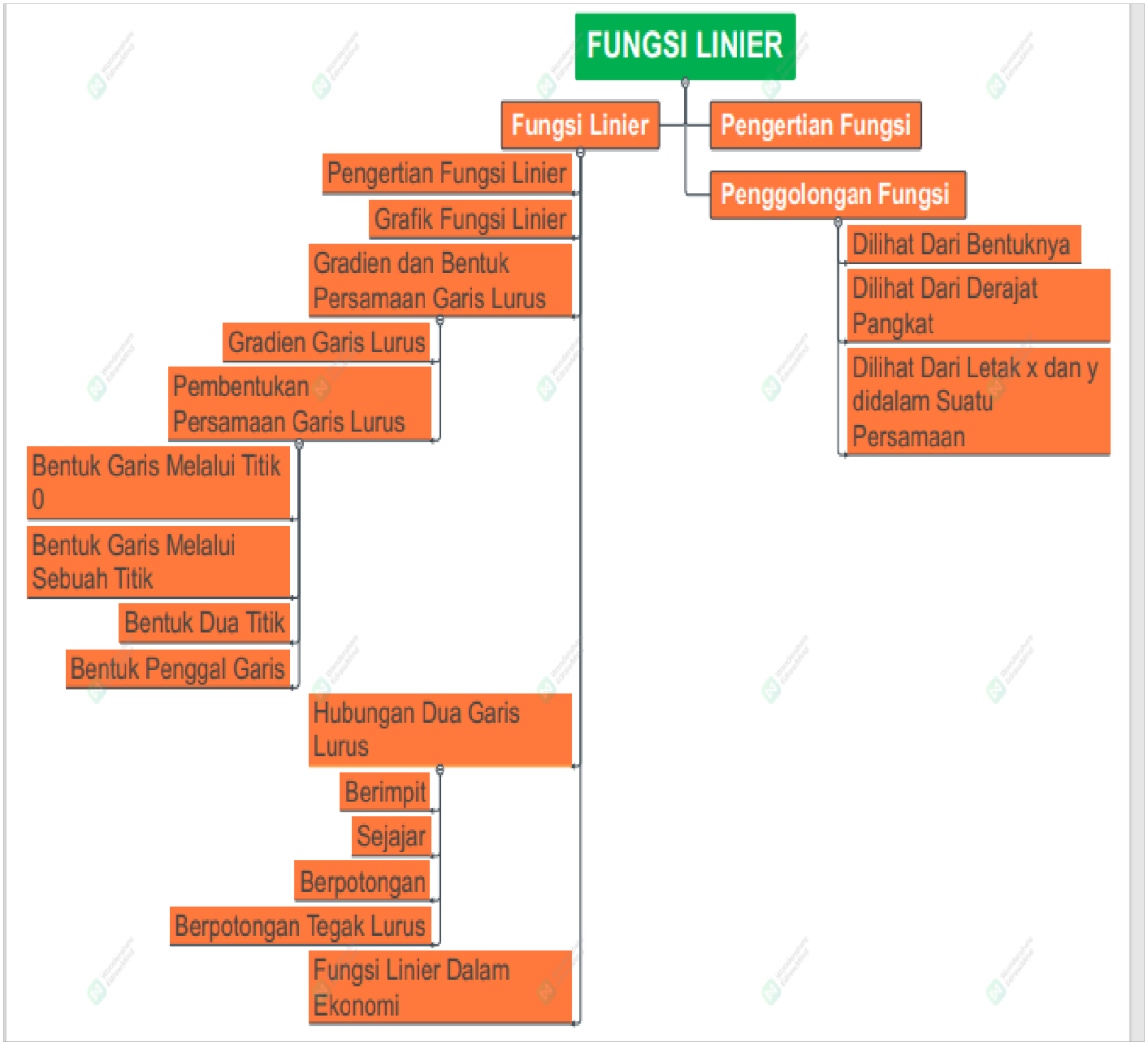
5. Suatu perusahaan angkutan besi beton menentukan biaya angkut berdasarkan persamaan linear C = a + bQdimana C adalah total biaya angkut (Rp) dan Q adalah jumlah barang terangkut (ton). Jika untuk mengangkut 8 ton diperlukan biaya dan narasikan dalam bidang ekonominya.

6. Rp820.000,-. Sedangkan untuk 16 ton besi beton diperlukan biaya Rp1.620.000,- . Maka, tentukanlah persamaan biaya angkut besi beton tersebut dan narasikan dalam bidang ekonominya.

7. Pendapatan pengemudi bus antarkota ditentukan dari besarnya UMR (Upah Minimum Regional) ditambah dengan hasil kali antara jumlah penumpang dan indeks kepuasan pelanggan setiap bulan. Indeks kepuasan pelanggan di suatu bulan senilai dengan 100 kurangnya dari jumlah penumpang selama bulan itu. Diketahui harga jasa pengemudi dinyatakan dengan y, jumlah penumpang dinyatakan dengan x, dan indeks kepuasan pelanggan dinyatakan dengan z, serta besarnya UMR di wilayah tersebut sebesar Rp3.200.000,00. Persamaan pendapatan pengemudi pada bulan tersebut dinyatakan dalam rupiah adalahdan narasikan dalam bidang ekonominya.

BAB V

FUNGSI LINIER



LEONID V. KANTOROVICH (1912 – 1986)

Leonid Vitaliyevich Kantorovich (bahasa Rusia:Леонид Виталиевич Канторович; 19 Januari 1912 – 7 April 1986) menerima Penghargaan Nobel Ekonomi 1975 dengan Tjalling Charles Koopmans "untuk sumbangan mereka pada teori alokasi optimum sumber penghasilan". Kantarovich lahir dan meninggal di Rusia dan melakukan semua karya profesinya di sana. Gebrakan utama pertamanya muncul pada 1938 saat ia memberi nasihat pada Laboratorium Perserikatan Kayu Lapis pemerintahan Uni Soviet. Diminta merancang teknik pendistribusian bahan mentah untuk memaksimalkan hasil produksi, Kantorovich melihat bahwa masalahnya ada pada matematika: untuk memaksimalkan fungsi linear yang menjadi sasaran banyak pembatas. Kini teknik yang dikembangkannya dikenal sebagai pemrograman linear.

A. Pengertian Fungsi

Fungsi adalah hubungan Antara dua variabel atau lebih, masing-masing dari dua buah variabel atau lebih tersebut saling pengaruh mempengaruhi.

Misalnya :

A. Fungsi yang mempunyai dua variabel

$y = f(x)$, dibaca y sama dengan fungsi dari x

$f(x,y) = 0$ dibaca fungsi x dan y sama dengan nol

B. Fungsi yang mempunyai lebih dari dua variabel

$z = f(x, y)$ atau $f(x, y, z) = 0$

Yang dimaksud dengan variabel dalam fungsi tersebut adalah x, y dan z, yang nilainya tidak tetap, tetapi dapat berubah-ubah.

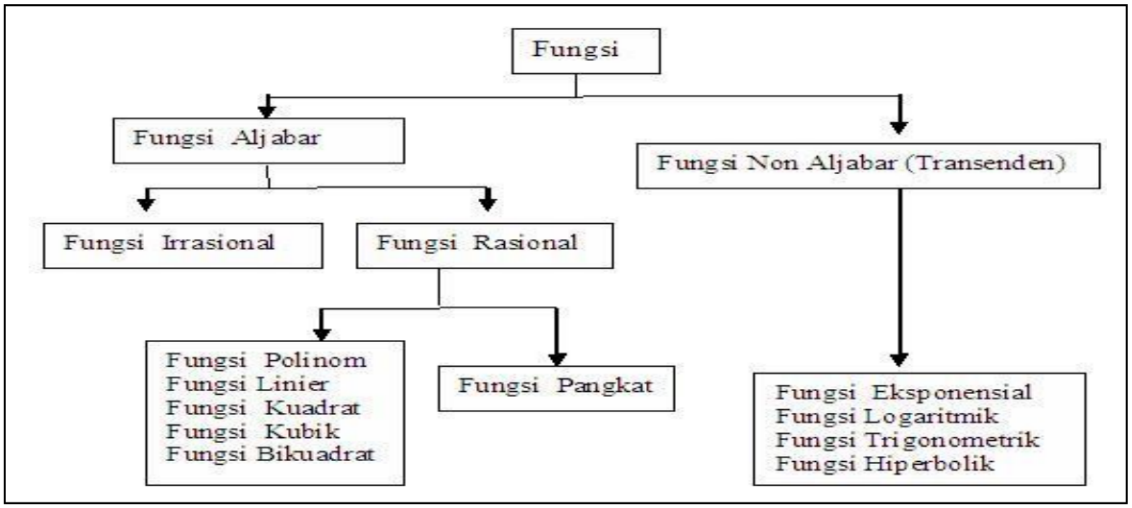
Variabel dapat dibedakan Antara :

a. Variabel bebas atau independen, yaitu variabel yang nilai-nilainya dapat ditentukan secara bebas oleh penganalisis dalam suatu masalah.

b. Variabel tidak bebas atau dependen, yaitu variabel yang nilai-nilainya tergantung dari variabel bebas.

B.Penggolongan Fungsi

Fungsi dapat digolongkan menjadi beberapa macam (tergantung dari sudut pandangnya):



Gambar 2. Peggolongan Fungsi

1.1 **Dilihat dari bentuknya**

a. Fungsi Aljabar : fungsi dimana variabel bebasnya (x) direfleksikan dengan tanda (+),(-) (x),(:), ($\sqrt{}$), dan sebagainya. Fungsi Aljabar digolongkan menjadi :

1) Fungsi rasional

Bentuk umum : y = $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, dimana $a_0, a_1, \ldots, a_n(konstanta)$ n ≥ 0

2) Fungsi Irrasional

Bentuk umum : y = $\frac{a_0+a_0x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_0x+\cdots+b_mx^m}$

b. Fungsi Transeden : fungsi yang bukan merupakan fungsi aljabar

Fungsi transeden dibagi menjadi :

1) Fungsi Exponen : Bentuk umum y = b^x,

1) Fungsi pecahan : misal y = $\frac{1}{x}$

2) Fungsi Logaritma : misal : y = log x + log a,

3) Fungsi Trigonometri : misal : y = sin 2x + cos x,

4) Fungsi cyclometri : misal y = arc cos x, y= arc tan x.

1.2 Dilihat dari derajat pangkat x.

Dibagi menjadi :

1. Fungsi linier/pangkat satu, bila x pangkat satu. Bentuk umum : y = mx+ n, m $\neq 0$
2. Fungsi kuadrat, bila x berpangkat dua. Bentuk umum : y = ax^2 +bx +c , a $\neq 0$
3. Fungsi pangkat tinggi, bila x berpangkat lebih dari tiga. Bentuk umum : y = $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0,\ \ a_n\ \neq\ 0, a_{n-1}, \ldots.\ a_0\ (konstanta), n \geq 3$

1.3 Fungsi dilihat dari letak x dan y didalam suatu persamaan.

a) Fungsi Explisit adalah Fungsi dengan variabel bebas (x) dan variabel (y) terpisah di dua ruas, diberi notasi y = f(x).

Contoh :

y = f(x) = 2x +5	z = f(x, y) = 2x + 3y + 5
y = $x^2 + 5x + 100$	z = f(x, y) = 3x^2 + y

b) Fungsi Implisit adalah Fungsi dengan variabel (x) dan variabel terikat (y) terdapat dalam satu ruas , diberi notasi f(x, y) = 0.

Contoh :

f(x, y) = 0 atau f(x, y) = k	f(x, y, z) = 0 atau f(x, y, z) = k
2x + 3y - 2 = 0	2x + 5y - 3z + 5 = 0
2x +3y = 2	2x + 5y - 3z = 5
2x + 5y + 5 = 0	$2x^2$ + 3y +$3y^2$ + 8 = 0
2x + 5y = 5	$2x^2$ + 3y +$3y^2$

c) Fungsi Kebalikan adalah Fungsi variabel bebasnya (x) dapat dianggap sebagai fungsi dari pada y, diberi notasi x = f(y). contoh : y = 3x, maka fungsi kebalikannya adalah x = $\frac{1}{3}y$

Pada umumnya setiap fungsi Explisit dapat dirubah menjadi fungs Implisit, tetapi tidak seluruhnya fungsi Implisit dapat dirubah ke bentuk fungsi Explisit.

Contoh :

y = 3x + 1 yang merupakan fungsi Explisit diubah ke fungsi Implisit. Dapat ditulis

y – 3x = 1 atau y - 3x - 1 = 0 tetapi pandang fungsi sin (xy) = 3.

C. Fungsi Linier

Fungsi linier adalah suatu fungsi yang variabelnya berpangkat satu atau suatu fungsi yang grafiknya merupakan garis lurus oleh karena itu fungsi linier sering disebut dengan persamaan garis lurus dengan bentuk umumnya sbb :

$$\boxed{\mathbf{y = ax + c}}$$

Dimana :y = variabel terikat

x = variabel bebas

a = gradien/kemiringan/kecondongan

c = konstanta

1. Grafik Fungsi Linier

Grafik dari sebuah fungsi linier akan menghasilkan suatu garis lurus. Grafik suatu fungsi linier dapat dihasilkan dengan cara menghitung koordinat titik-titik yang memenuhi persamaan, kemudian memindahkan kedalam system sumbu silang.

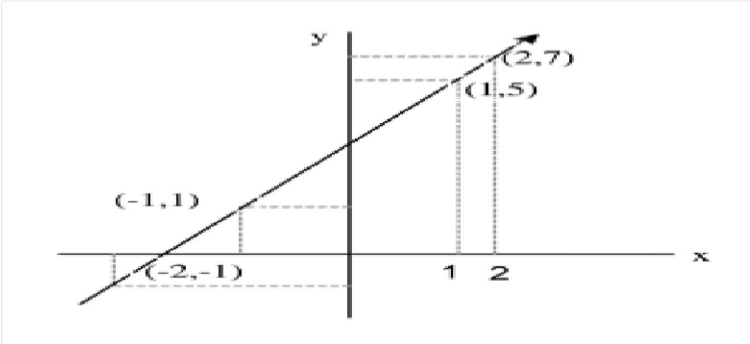
Contoh 3.1 : y = 3 + 2x

Cara 1. **Kurva Tracing proses**

Misalkan harga x dalam fungsi tersebut ditentukan dengan berbagai harga maka akan memberikan harga pada setiap nilai y. Harga-harga ini dapat diperlihatkan dalam table sebagai berikut:

x	3	2	1	0	-1	-2	
y	9	7	5	1	1	-1	dst

Dari perhitungan didapat titik-titik yang mempunyai absis dan ordinat, kemudian pindahkan kedalam sistem sumbu silang.



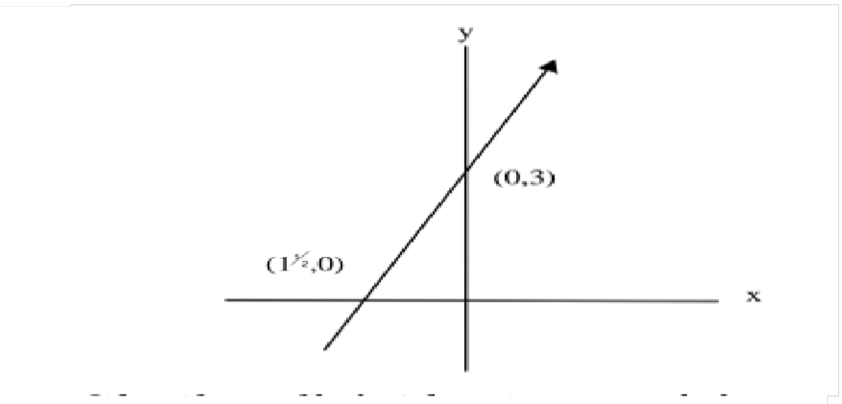
Gambar 3.1.1

Cara 2. Matematis

Pada umumnya untuk menggambarkan grafik fungsi linier cukup ditentukan oleh dua titik. kedua titik yang sering diambil ialah dimana x = 0 dan dimana y = 0. Titik ini disebut titik potong (intercept). Maka fungsi itu memotong sumbu y dan x pada titik dimana :

a. Memotong sumbu y, dimana harga x = 0 maka harga y = 3 → (0,3)

b. Memotong sumbu x, dimana harga y = 0 maka harga x = $-1\frac{1}{2}$ → $(-1\frac{1}{2}, 0)$



Gambar 3.1.2

Sifat-sifat grafik dari fungsi: y ax +b, konstanta a dalam fungsi tersebut sebagai koefisien arah, yaitu bilangan yang akan menentukan keadaan arah garis.

a. Bila a merupakan bilangan positif, maka grafik/gambar fungsi itu akan mengarah ke kanan atas.

b. Bila a merupakan bilangan negative maka grafik/gambar fungsi itu akan mengarah ke kiri atas.

c. Bilangan b menunjukkan titik potong garis tersebut dengan sumbu y, dimana x = 0

2. Gradien dan Pembentukan Persamaan Garis Lurus (Linier)

Ada beberapa cara membentuk persamaan garis lurus (linier) yaitu :

a. Gradien Garis Lurus (Linier)

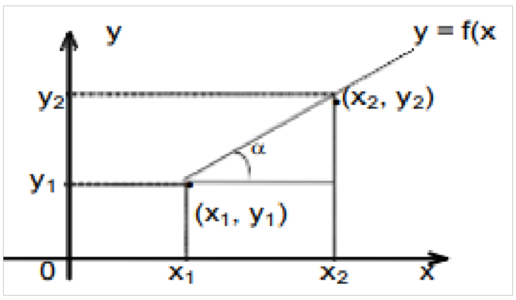
Bila fungsi linier y = f(x) = mx + n di gambar dalam bidang cartesius, maka grafiknya berupa garis lurus, kemiringan garis (yang juga disebut slope garis atau gradien) pada setiap titik yang terletak pada garis lurus tersebut adalah tetap, yaitu sebesar m.

Slope atau gradient garis lurus y = f(x) adalah hasil bagi antara perubahan dalam variabel terikat dengan perubahan dalam variabel bebasnya. Secara geometris, gradient/kemiringan garis lurus adalah sama dengan nilai tangen sudut yang dibentuk oleh garis lurus tersebut dengan sumbu x positif dihitung mulai sumbu x positif berlawanan arah jarm jam. Jadi, gradient garis lurus ini dapat dinyatakan sebagai berikut:

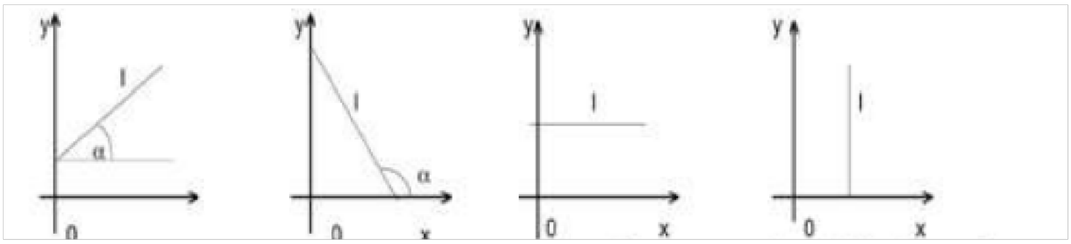
$$m = \frac{perubahan\ dalam\ variabel\ terikat}{perubahan\ dalam\ variabel\ bebas}$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tg}\ \alpha$$

a = gradient/slope/kemiringan garis



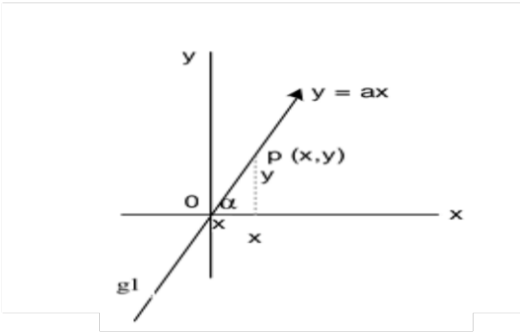
Gradient yang juga disebut angka arah suatu garis lurus dapat memiliki nilai positif (bila $0^\circ < \alpha < 90^\circ$), dapat negative (bila $90^\circ < \alpha < 180^\circ$), dapat nol (bila $\alpha = 0^\circ$) dan dapat juga tak berhingga (bila $\alpha = 90^\circ$). Untuk lebih jelasnya lihat gambar dibawah ini



a positif | a negatif | a nol | a tak berhingga

b. Pembentukan Persamaan Garis Lurus (Linier)

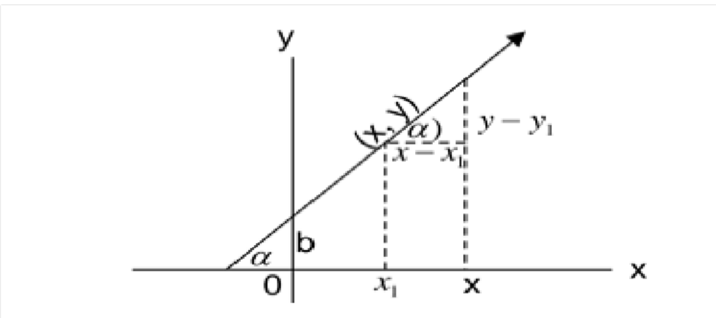
1.Bentuk Garis Melalui Titik Asal 0



Misalkan untuk mencari persamaan garis yang melalui titik asal 0, (garis g;) pada gambar ternyata untuk sembarang titik P(x,y), sehingga menjadi

$\boxed{\mathbf{y = ax}}$ ➔ $\text{tg}\,\alpha = \text{a} = \frac{y}{x}$

2.Bentuk Garis Melalui Sebuah Titik



Koefisien arah suatu garis ditentukan dengan tg $\alpha =$ a dan garis itu menelusuri/melalui sebuah titik (x_1, y_1), maka dari gambar di dapat bahwa

$$\text{tg}\ \alpha = \text{a} = \frac{y-y_1}{x-x_1} \rightarrow y - y_1 = \text{a}\,(x - x_1)$$

Adalah persamaan garis lurus yang melalui sebuah titik

Contoh :

1. Buatlah persamaan garis lurus yang melalui titik (3,-1) dan mempunyai koefisien arah $1/3$.

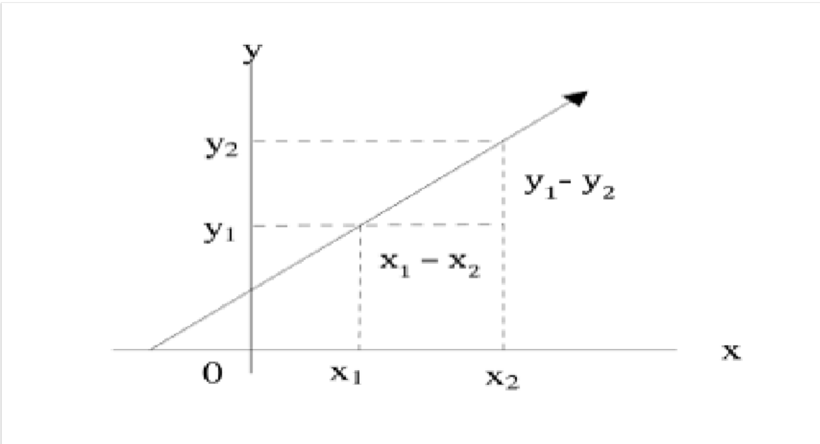
Pemecahan : $(x_1, y_1) = (3, -1)$ dan a $1/3$.

$$y - y_1 = \text{a}\,(x - x_1)$$

$$y + 1 = 1/3\,(x - 3)$$

$$y = 1/3\,x - 2$$ → adalah persamaan garis

3.Bentuk Dua Titik (Dwi-koordinat)



Gambar

Apabila diketahui dua buah titik A dan B dengan koordinat masing masing (x_1, y_1) dan (x_2, y_2),adalah dua titik garis lurus (persamaannya adalah y = ax + b), koefisien arahnya adalah:

tg α = a = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $x_1 \neq x_2$ dimana a = $\frac{y - y_1}{x - x_1}$ → $\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$

atau ↓

persamaan garis lurus melalui 2 buh titik $\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$ →

atau a = $\frac{y - y_1}{x - x_1}$ dimasukkan ke persamaan melalui sebuah titik adalah

$y - y_1 = a(x - x_1)$ → $\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$

Contoh :

1. Bentuklah fungsi/persamaan garis yang melalui titik A(1,2) dan B(3,4)

   Pemecahan :

   - Pertama tentukanlah koefisien arah

     a = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ = $\frac{4 - 2}{3 - 1}$ = 1

   - Maka persamaan garisnya adalah

     $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

     $y - 2 = 1(x - 1)$

     y = x + 1

   Cara lain :

   Dengan substitusi kedua titik A dan B pada bentuk persamaan garisnya :

   y = ax + b

   Persamaan yang melalui titik A(1,2) → 2 = a + b

   Persamaan yang melalui titik B(3,4) → 4 = 3a +b -

-2 = -2a

a = 1 → 2 = a + b

2 = 1 + b

b = 1

jadi persamaan garis tersebut : y = x + 1

Bentuk Penggal garis

Untuk kasus tertentu dimana titik (x_1, y_1)merupakan penggal x yang ditunjukkan oleh $(a$,0) dan titik (x_2, y_2) merupakan penggal y yang ditunjukkan oleh (0,b), maka persamaan garisnya diperoleh dengan memasukkan $x_1 = a$, y_2 = b kedalam persamaan :

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a}(x - a)$$

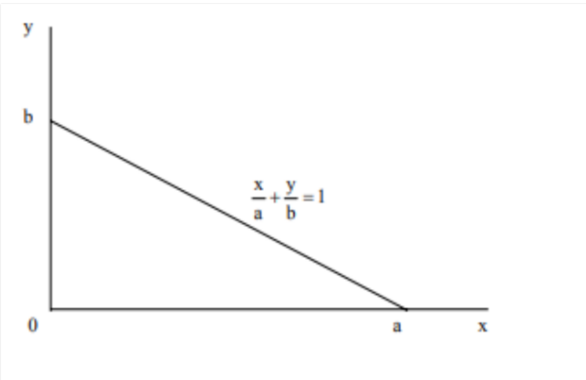
$$y = \frac{bx}{-a} + \frac{ab}{a}$$

$$y = \frac{bx}{-a} + b$$

jika kedua ruas dibagi dengan b, maka

$\frac{y}{b} = \frac{-x}{a} + 1$ atau $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Dan grafiknya adalah sebagai berikut



Contoh :

1. Cari Persamaan garis yang mempunyai penggal (0,5) dan (-4,0), untuk a = - 4 dan b = 5 !

Pemecahan :

- Masukkan nilainya ke

  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

  $\frac{x}{-4} + \frac{y}{5} = 1 \quad \textit{kedua ruas persamaan dikali } 20$

  $-5x + 4y = 20$ atau

  $5x - 4y + 20 = 0$

Jadi persamaan $5x - 4y + 20 = 0$ adalah persamaan yang dicari

D. Hubungan Dua Garis Lurus

Apabila sepasang garis atau dua garis lurus maka dapat terjadi empat bentuk kemungkinan hubungan yaitu berimpit, sejajar, berpotongan, dan berpotongan tegak lurus.

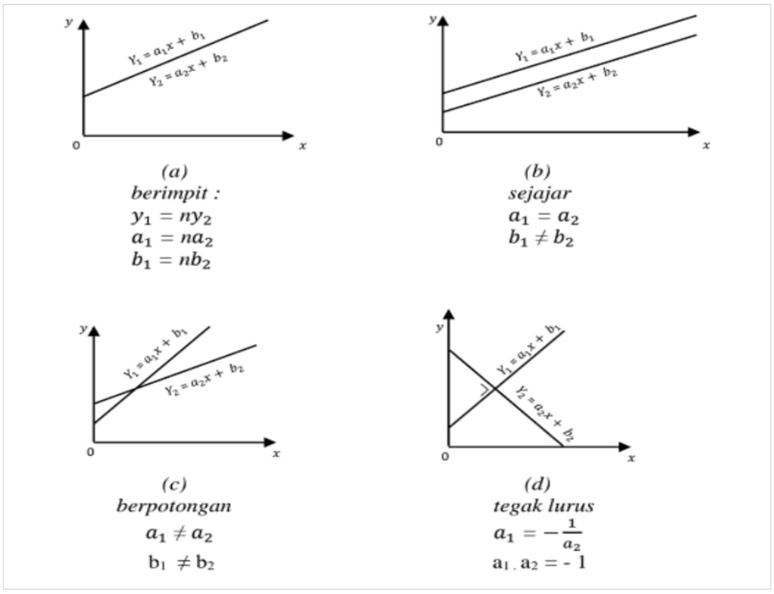
a) Berimpit : dua buah garis lurus akan berimpit apabila persamaan garis yang satu merupakan kelipatan dari persamaan garis yang lain. Dengan demikian, garis ny = n(ax + b) akan berimpit dengan y = ax + b untuk n bilangan positif.

b) Sejajar : dua buah garis lurus akan sejajar apabila lereng garis yang satu sama dengan lereng garis yang lain.

c) Berpotongan : dua buah garis akan berpotongan apabila kemiringan kedua garis tidak sama ($a_1 \neq a_2$).

d) Berpotongan tegak lurus : dua garis lurus akan berpotongan tegak lurus apabila kemiringan kedua garis berbanding terbalik

   ($a_1 = {}^{-1}/_{a_2} \ \ atau \ a_1 a_2 = -1$)



E. Fungsi Linier Dalam Ekonomi

Pengertian mengenai fungsi linier penting dalam ekonomi, baik dalam ekonomi mikro, ekonomi moneter dan bagian dalam teori tersebut.

Contoh- contoh yang dapat dikategorikan disini Antara lain :

1. Dalam ekonomi mikro Antara lain
   a. Fungsi permintaan : misal D Q = 20 – 2p,
   b. Fungsi penawaran : misal S Q = 10 -2p,
   c. Fungsi fungsi marginal : misalkan : MR = 25 – 20 ; MC = 5.p.
2. Dalam ekonomi makro dan moneter Antara lain :
   a. Fungsi konsumsi : misal C = 100 +0,75y
   b. Fungsi Investasi : misal *I* =1350 – 2000*i*
   c. Fungsi permintaan untuk transaksi : misal M_t = 0,25y.2000 *i*
   d. Fungsi Permintaan untuk spekulasi : misal M_s = 1220 - 2000 *i*
   e. Fungsi IM : misal Y = 1350 + 3000 *i*

   Dan masih banyak lagi contoh-contoh penggunaannya.

Aplikasi teori mengenai hubungan antara dua garis dapat dijumpai dalam teori ekonomi, sebagai contoh dalam kita membicarakan keseimbangan pasar, disini dibicarakan garis berpotongan.

Contoh :

a. Keseimbangan pasar permintaan (D) = penawaran (S)

b. Keseimbangan pasar barang (disektor rial), dimana I = S,

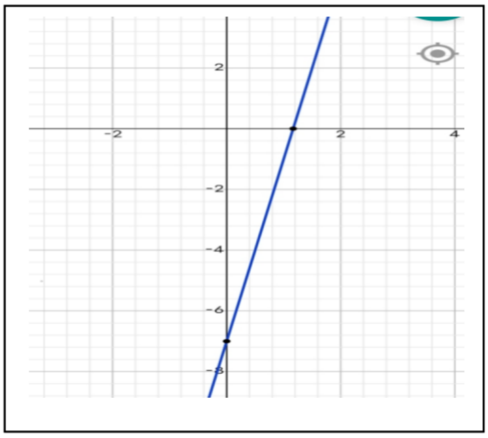
c. Keseimbangan pasar uang Md = Ms (permintaan = penawaran uang)

Pilihan Berganda Fungsi Linier

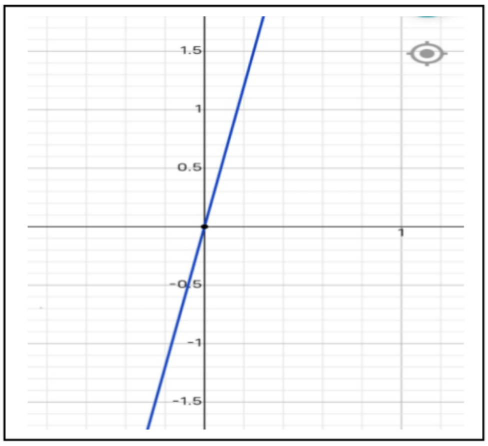
Pilihan Berganda

1. Gambarkanlah grafik yang dibentuk dari persamaan linier y = 6x – 7

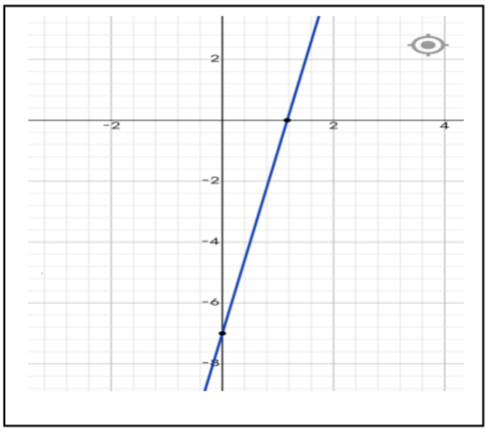
a.



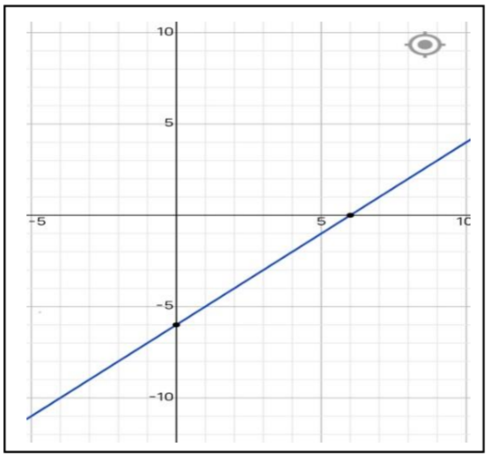
c.



b. .



d.



2. Buatla persamaan garis lurus yang melalui titik A(4,2) dan Titik B (2,6)

   a. y = $\frac{x-2}{2}$

   b. y = -2x + 10

   c. y = $\frac{4x-10}{3}$

   d. y = 2x – 2

3. Sepasang garis atau dua garis lurus dikatakan berpotongan tegak lurus apabila

   a. $a_1 \neq a^2, b_1 \neq b_2$

   b. $a_1 = a_2, b_1 \neq b_2$

   c. $a_1 = -\frac{1}{a_2}$, $a_1 . a_2$ =-1

   d. $a_1 = na_2,\ b_1 =$ nb_2

4. Apabila diketahui suatu garis dengan titik potong sumbu y adalah (0,8) dan titik potong sumbu x adalah (2,0), carilah persamaan garisnya

   a. y = -4x +16

   b. y = 0

   c. y = 8 – 4x

   d. y = $\frac{8-x}{4}$

5. Carilah persamaan garis yang melalui suatu titik (5,3) dan kemiringan 10

   a. y = 5x +3

   b. y = -3x + 5

   c. y = 10x -25

6. 1) y = 2x + 4 dan 2y = 4x +8

   2) y = 2x + 4 dan y = 2x -2

   3) y = 2x + 4 dan y = x +5

   4) y = 2x + 4 dan $\frac{1}{2x}$ + 9

   dari hubungan Antara dua garis berikut manakah pasangan garis yang berpotongan

   a. 1

   b. 2

   c. 3

   d. 4

7. 1) y = 2x + 4 dan 2y = 4x +8

   2) y = 2x + 4 dan y = 2x -2

   5) y = 2x + 4 dan y = x +5

   6) y = 2x + 4 dan $\frac{1}{2x}$ + 9

   dari hubungan Antara dua garis berikut manakah pasangan garis yang sejajar

   a. 1
   b. 2
   c. 3
   d. 4

8. Carilah nilai variabel x dan y dari dua persamaan linier berikut 2x + 3y = 21 dan x + 4y = 23

   a. x = 3 dan y = 5
   b. x = 1 dan y = $\frac{67}{11}$
   c. x = 3 dan y = $\frac{67}{11}$
   d. x = $\frac{67}{11}$ dan y = 3

9. Berikut ini contoh Fungsi linier dalam ekonomi mikro Antara lain, kecuali

   a. Fungsi permintaan : misal D Q = 20 – 2p,
   b. Fungsi penawaran : misal S Q = 10 -2p^2,
   c. Fungsi fungsi marginal : misalkan : MR = 25 – 20 ; MC = 5.p.
   d. Fungsi penawaran : misal S Q = 10 -2p,

10. berikut ini contoh Fungsi linier dalam ekonomi makro dan moneter Antara lain, kecuali

   a. Fungsi Investasi : misal *I* =1350 – 2000*i*
   b. Fungsi permintaan untuk transaksi : misal M_t = 0,25y.2000 *i*

c. Fungsi Permintaan untuk spekulasi : misal M_s = 1220 - 2000 *i*

d. Fungsi fungsi marginal : misalkan : MR = 25 – 20 ; MC = 5.p.

Essay

1. Carilah kemiringan dan titik potong sumbu y pada setiap garis
   a. 4x – 15y + 2
   b. 3x – 7y – 12
2. Ditentukan tiga titik A(4,2), B(3,7), C(-4,-2)
   a. Carilah persamaan garis yang melalui titik A dan B
   b. Carilah persamaan garis yang melalui titik A dan C
   c. Carilah persamaan garis yang melalui titik B dan C
   d. Buatlah grafiknya dalam satu gambar
3. Tentukan gradient dari persamaan garis lurus yang melalui
   a. Titik A(7,5) dan B (-2,2)
   b. Titik C (6,3) dan D (3,-2)
   c. Titik P (4,2) dan Q (5,7)
4. Tentukan persamaan garis lurus yang
   a. Melalui titik A(4,5) dan sejajar garis y -12x +5 = 0
   b. Melalui titik (5,2) dan tegak lurus garis d7y - 4 = - 21x
   c. Memotong sumbu x sepanjang 4 dan memotong sumbu y sepanjang 7 dari titik asal
5. Periksalah pasangan garis dibawah ini, apakah garis-garis tersebut sejajar berimpit, saling tegak lurus atau berpotongan. Gambarlah grafiknya !
   a. Baris I_1 : y = 4x +3

      Baris I_2 : y = 3x +6

b. Baris I_1 : 6x -3y =18

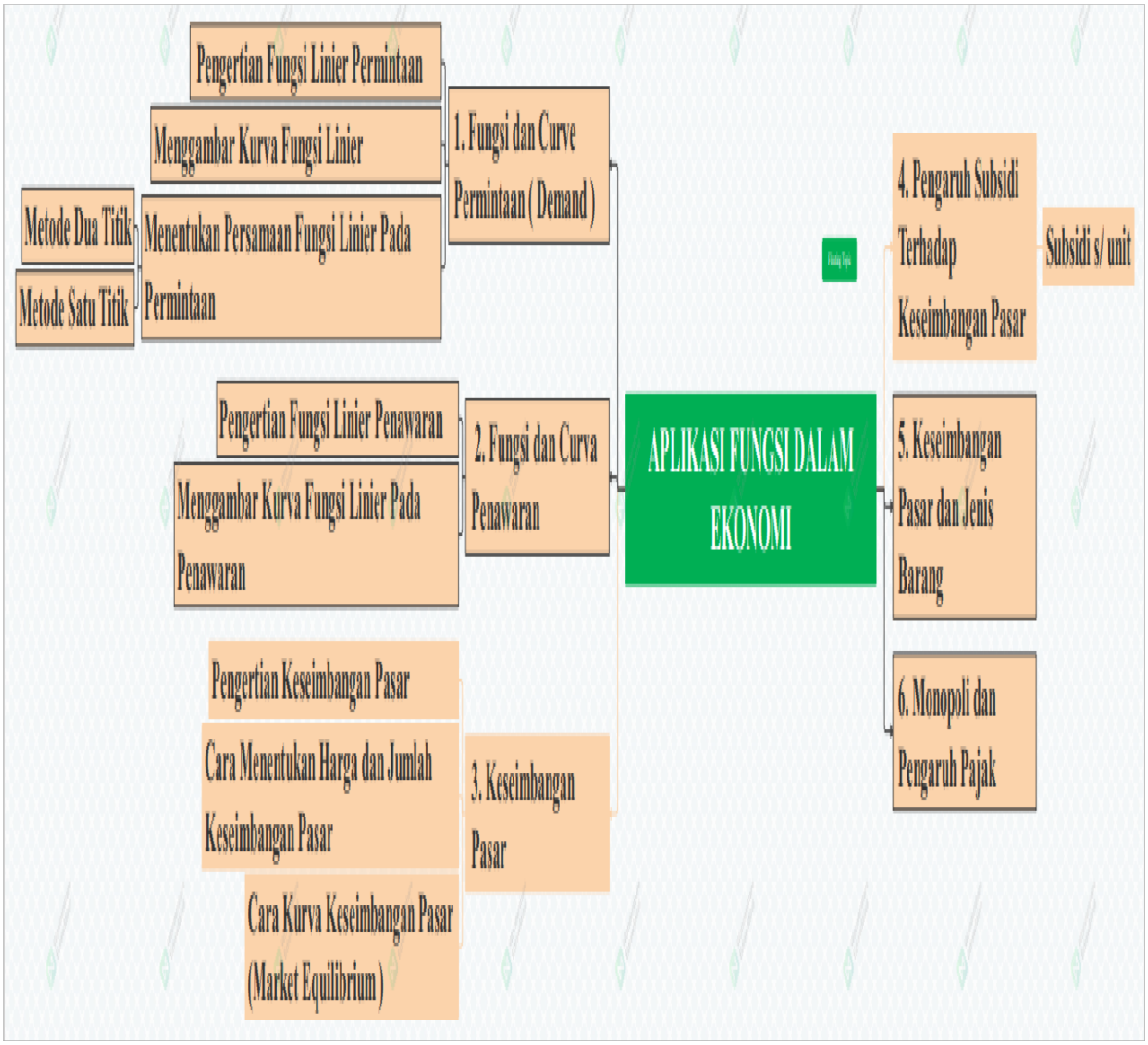
   Baris I_1 : y -3y = 6

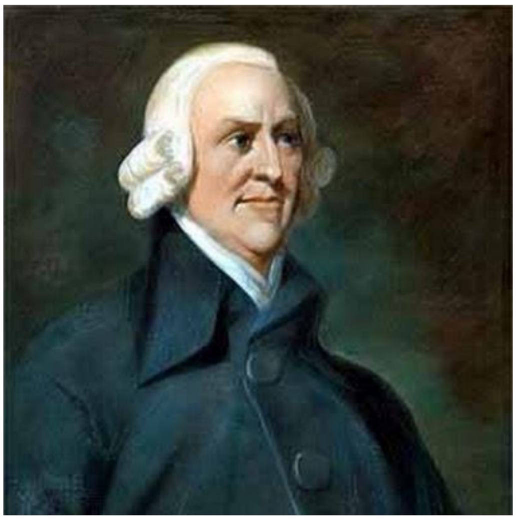
c. A (-1,2) ,B(4,5) dan C (2,-5), D (0,0)

BAB VI

APLIKASI FUNGSI DALAM EKONOMI

PETA KONSEP





Irving Fisher dilahirkan di negara bagian New York pada tanggal 27 Februari 1867. Irving Fisher merupakan tokoh ekonomi neoklasik Amerika. Ia merupakan salah satu ekonom pertama yang memperkenalkan pendekatan matematis yang revolusioner dalam ekonomi Pemikirannya antara lain Walrasian Equillibrium (keseimbangan Walrasian) serta konsep kurva Phillips. Irving Fisher juga menemukan system rolodex yang digunakan dalam perbankan dan ia juga menemukan teori harga (Price Theory).

A. Fungsi dan Curve Permintaan (Demand)

1.1 Pengertian Fungsi Linier Permintaan

Fungsi permintaan adalah persamaan yang menunjukkan hubungan antara jumlah sesuatu barang yang diminta dan semua faktor-faktor yang mempengaruhinya. Atau Demand adalah berbagai jumlah barang yang diminta pada berbagai tingkat harga. Dalam hukum permintaan kita melihat bahwa besar kecilnya jumlah barang yang diminta sangat tergantung pada barang tersebut dengan catatan variabel yang lain tetap. Oleh karena itu dengan pendapatan yang tetap apabila harga barang tersebut naik maka jumlah barang yang diminta akan berkurang dan sebaliknya.

$$Qx = f(Px, Py, Pz, M , S)$$

Di mana :

Qx = Jumlah barang X yang diminta

Px = harga barang X

Py = harga barang Y

Pz = harga barang z

M = pendapatan konsumen

S = selera konsumen

Fungsi permintaan tidak dapat disajikan dengan diagram dua dimensi karena memiliki banyak variabel. Sedangkan diagram dua dimensi hanya dapat digunakan untuk menggambar kurva fungsi yang mengandung dua variabel saja. Agar fungsi permintaan dapat digambar grafiknya maka faktor-faktor selain jumlah yang diminta dan harga barang tersebut dianggap tidak berubah selama dilakukan analisis. Faktor-faktor yang dianggap tetap ini disebut ceteris paribus.

Dengan anggapan ceteris paribus tersebut, sekarang bentuk fungsi menjadi lebih sederhana karena hanya terdiri dari dua variabel, yaitu variabel harga dan variabel jumlah yang diminta. Faktor-faktor yang dianggap tetap pengaruhnya dapat dilihat dari besarnya konstanta pada persamaan permintaan. Bentuk persamaan fungsi linier pada permintaan disajikan sebagai berikut :

$$Q_{dx} = a - bP_x$$

atau

$$P_{dx} = a - bQ_x$$

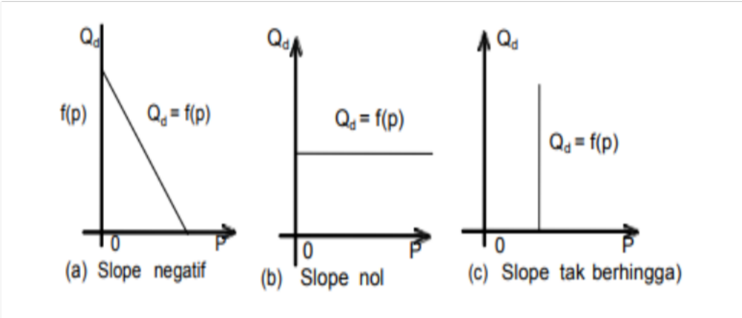
Keterangan :

Q_{dx} = Jumlah produk x yang diminta

P_{dx} = Harga Produk yang diminta

b = gradient/kemiringan atau koefisien dari variable.

1.2 Menggambar Kurva Fungsi Linier pada Permintaan

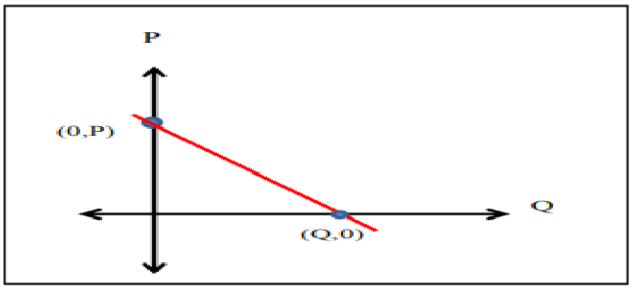


Gambar 6.1

Umumnya (dalam keadaan normal) kurva permintaan memiliki angka arah (slope) yang negatif (Gambar a), yang menunjukkan juga, bahwa antara harga dengan kuantitas terdapat hubungan negatif (yang terbalik), yang artinya bila harga suatu barang naik, kuantitas barang yang diminta oleh pembeli (konsumen) berkurang, dan sebaliknya, bila harga suatu barang turun maka kuantitas barang yang diminta oleh pembeli (konsumen) bertambah.

Tetapi dalam keadaan khusus (dalam kasus-kasus tertentu) angka arah kurva permintaan mungkin nol, yaitu kuantitas barang yang diminta tetap tanpa memperhatikan harga (Gambar b), dan mungkin saja tak berhingga (tak terdefinisikan), yaitu kuantitas barang yang diminta oleh pembeli (konsumen) berubah pada harga yang tetap (Gambar c).

Sebelum disajikan langkah menggambar kurvanya, akan disajikan contoh gambar kurva fungsi linier pada permintaan berikut ini :



Gambar 6.2

Berikut ini langkah-langkah menggambar kurva fungsi linier

1) Tentukan titik potong terhadap sumbu Q, maka P = 0, sehingga diperoleh koordinat (Q,0)

2) Tentukan titik potong terhadap sumbu Q, maka P = 0, sehingga diperoleh koordinat (0,P)

3) Tentukan letak dua titik potong tsb ke dalam bidang cartecius kemudian hubungkan menjadi garis lurus.

Contoh :

1. Fungsi permintaan suatu barang berbentuk $Q_d = 10 - \frac{P}{5}$

P = harga per unit barang

Q_d = Kuantitas barang yang diminta

$pertanyaan$:

(a) Batas-batas nilai Q_d dan P yang memenuhi fungsi permintaan

(b)) Berapakah kuantitas barang yang diminta bila harga per unit barang tersebut : 15 dan 10?

(c) Berapakah harga tertinggi yang masih mau dibayar oleh pembeli (konsumen) untuk barang tersebut?

(d) Bila barang tersebut merupakan barang bebas, berapa unit barang maksimal akan diminta oleh pembeli (konsumen)?

(e) Buatlah grafiknya.

Pemecahan :

(a) Batas-batas nilai Q_d dan P yang memenuhi fungsi permintaan

1. Bila Q_d = 0, maka nilai P =….

$$Q_d = 10 - \frac{P}{5}$$

$$0 = 10 - \frac{P}{5}$$

P = 50

2. Bila P = 0, maka nilai Q_d = ….

$Q_d = 10 - \frac{P}{5}$

$Q_d = 10 - \frac{0}{5}$

$Q_d = 10$

Jadi, batas- batas nilai Q_d dan P yang memenuhi fungsi permintaan adalah

$0 \leq Q_d \leq 10$ dan $0 \leq P \leq 50$

(b) Q_d = ….? Bila P = 15 dan P = 10

1. Bila P = 15	2. Bila P = 10
$Q_d = 10 - \frac{P}{5}$	$Q_d = 10 - \frac{P}{5}$
$Q_d = 10 - \frac{15}{5}$	$Q_d = 10 - \frac{10}{5}$
$Q_d = 7$	$Q_d = 8$

Jadi, bila harga per unit barang tersebut masing-masing 15 dan 10 maka kuantitas barang yang diminta masing-masing sebanyak 7 unit dan 8 unit.

(c) Harga tertinggi terjadi bila tidak ada satu konsumen pun sanggup membelinya (tidak ada barang yang dibeli oleh pembeli/konsumen), ini berarti Q_d = 0.

Bila Q_d = 0, maka P = ….?

$Q_d = 10 - \frac{P}{5}$

$0 = 10 - \frac{P}{5}$

$-10 = -\frac{P}{5} \rightarrow P = 50$

Jadi, harga tertinggi yang masih mau dibayar oleh pembeli/konsumen adalah lebih rendah (tidak mencapai) 50 (P = 50)

(d) Jika barang tersebut merupakan barang bebas, maka harga barang tersebut adalah, P = 0

Bila P = 0, $Q_d = \cdots ?$

$Q_d = 10 - \frac{P}{5}$

$Q_d = 10 - \frac{0}{5}$

$Q_d = 10$

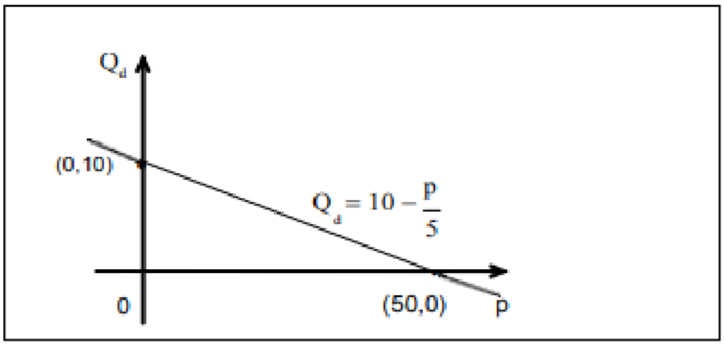
Jadi, bila barang tersebut merupakan barang bebas, maka kuantitas barang yang diminta oleh pembeli/konsumen maksimal sebanyak 10 unit.

(e) Gambar grafik

$Q_d = 10 - \frac{P}{5}$

Tabel pasangan nilai Q_d dan P

Q_d	0	10
P	50	0
(P, Q_d)	(50,0)	(10,0)



Gambar 6.3

1.3 Menentukan Persamaan Fungsi Linier pada Permintaan

1) Metode Dua Titik

$$\frac{P - P_1}{Q - Q_1} = \frac{P_2 - P_1}{Q_2 - Q_1}$$

Cara untuk memperoleh persamaan fungsi linier pada permintaan dengan menggunakan metode dua titik dengan mensubtitusikan nilai-nilai Q_1, Q_2, P_1, P_2 yang telah diketahui pada rumus di atas, sehingga akan menghasilkan persamaan

$$Q_{dx} = a - mP_x$$ atau $$P_{dx} = a - mQ_x$$

Contoh :

1. Suatu produk jika harganya Rp. 100, akan terjual 10 unit, dan bila harganya turun menjadi Rp. 75, akan terjual 20 unit. Tentukanlah fungsi permintaannya

Pemecahan :

Dik : P_1 = 100, P_2 = 75 , Q_1 = 10, Q_2 = 20

Dit : Fungsi permintaan dan gambar grafik ?

Pemecahan :

$$\frac{P - P_1}{Q - Q_1} = \frac{P_2 - P_1}{Q_2 - Q_1}$$

Sehingga menjadi

$$\frac{P - 100}{Q - 10} = \frac{75 - 100}{20 - 10}$$

$$\frac{P-100}{Q-10} = \frac{-25}{10}$$

(P – 100)10 = (Q-10)(-25)

Kedua ruas didistribusikan sehingga menjadi

10P – 1000 = -25Q + 250

Diasosiasikan nilai yang bersesuaian

10P = -25Q +250 +1000

10P = -25Q + 1250

P = -2,5Q + 125

Persamaan inilah yang dinamakan dengan persamaan permintaan yang dimaksud.

2) Metode Satu Titik

Jika hanya diketahui satu titik dan gradient maka persamaan umumnya yaitu

$$P - P_1 = m\,(Q - Q_1)$$

dengan perumusan untuk menentukan nilai gradien yaitu:

$m = \frac{P_2 - P_1}{Q_2 - Q}$

Contoh :

1 Persamaan garis yang bergradien -3 dan melewati titik (-2,11) yakni:

Pemecahan :

$P - P_1 = m\,(Q - Q_1)$

P -11 = m (x-(-2))

P-11 = -3 (x+2)

P -11 = -3x -6

P = -3x – 6 +11

P = -3x +5

B. Fungsi dan Curve Penawaran (Supply)

2.1 Pengertian Fungsi Linier Penawaran

Supply adalah jumlah barang yang ditawarkan pada berbagai tingkat harga. Fungsi penawaran suatu barang/jasa adalah fungsi yang menyatakan hubungan antara harga (pasar) suatu barang (jasa) dengan kuantitas barang (jasa) yang ditawarkan oleh penjual (produsen) dalam kurun waktu tertentu, dengan asumsi ceteris paribus (variabel bebas lainnya yang mempengaruhi kuantitas barang yang ditawarkan konstan). Fungsi penawaran akan sesuatu produk dapat ditunjukkan oleh persamaan:

$$\boldsymbol{Q_{sx,t} = f(P_{x,t}, T_t, P_{F,t}, P_{R,t}. P^e_{x,t+1})}$$

$P_{x,t}$ = jumlah produk x yang ditawarkan oleh produsen dalam periode tertentu

T_t = teknologi yang tersedia

$P_{F,t}$ = harga faktor-faktor produksi

$P_{R,t}$ = harga produk lain yang berhubungan

$P^e_{x,t+1}$ = harapan produsen terhadap harga produk

$Q_{sx,t}$ = Jumlah produk X yang ditawarkan

Fungsi penawaran tidak dapat disajikan dengan diagram dua dimensi karena memiliki banyak variabel. Sedangkan diagram dua dimensi hanya dapat digunakan untuk menggambar kurva fungsi yang mengandung dua variabel saja. Agar fungsi penawaran dapat digambar kurvanya maka faktor-faktor selain jumlah produk dan harga barang yang ditawarkan tersebut dianggap tidak berubah selama dilakukan analisis. Faktor-faktor yang dianggap tetap ini disebut ceteris paribus.

Dengan anggapan ceteris paribus tersebut, sekarang bentuk fungsi menjadi lebih sederhana karena hanya terdiri dari dua variabel, yaitu variabel harga dan variabel jumlah produk yang ditawarkan. Faktor-faktor yang dianggap tetap pengaruhnya dapat dilihat dari besarnya konstanta pada persamaan penawaran.

Bentuk persamaan fungsi linier pada penawaran disajikan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{Q_{dx}} = -\,\mathbf{a} + \mathbf{b}\boldsymbol{P_x}$$

Atau

$$\boldsymbol{P_{dx}} = -\,\mathbf{a} + \mathbf{b}\boldsymbol{Q_x}$$

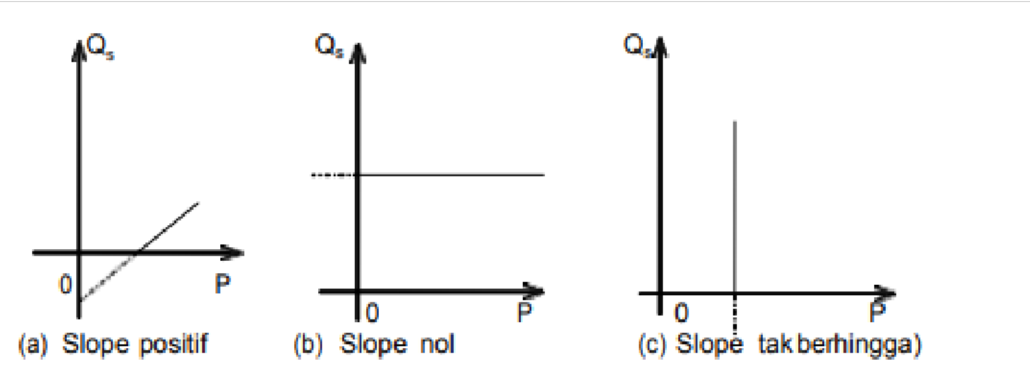
Keterangan :

$\boldsymbol{Q_{dx}}$ = Jumlah produk x yang ditawarkan

$\boldsymbol{P_{dx}}$ = Harga produk x yang ditawarkan

$\boldsymbol{b}$ = Gradien/ Kemiringan

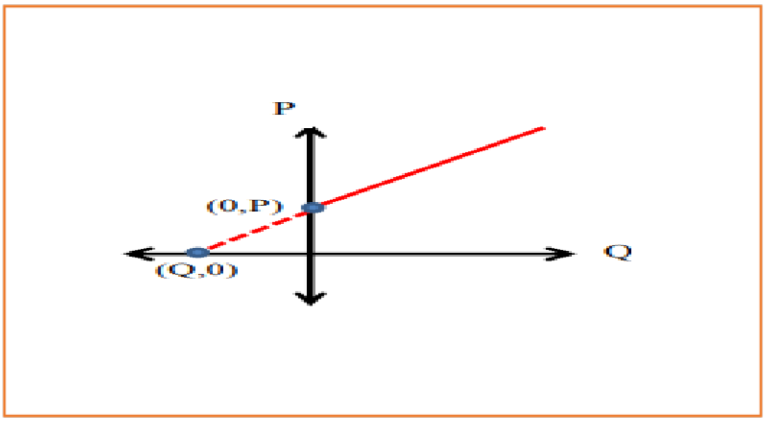
2.2 Menggambar Kurva Fungsi Linier pada Penawaran



Gambar 6.4

Umumnya (dalam keadaan normal) kurva penawaran memiliki angka arah/slope positif (Gambar a), yang menunjukkan bahwa hubungan antara harga dengan kuantitas barang yang ditawarkan oleh penjual /produsen adalah positif (berbanding lurus), yang artinya bila harga suatu barang naik, maka kuantitas barang yang ditawarkan oleh penjual /produsen bertambah dan apabila harga pasar barang tersebut turun, maka kuantitas barang yang ditawarkan oleh penjual/produsen berkurang.

Akan tetapi dalam kasus-kasus tertentu (dalam keadaan khusus) angka arah kurva penawaran dapat nol (Gambar b) yaitu kuantitas yang ditawarkan oleh penjual/ produsen akan tetap tanpa memperhatikan harga, dapat juga angka arahnya tak berhingga atau tak terdefinisikan (Gambar c) yaitu kuantitas yang ditawarkan oleh penjual/ produsen berubah pada harga tetap.



Gambar 2.2.2

Berikut ini langkah-langkah menggambar kurva fungsi linier

1) Tentukan titik potong terhadap sumbu Q, maka P = 0, sehingga diperoleh koordinat (Q,0)

2) Tentukan titik potong terhadap sumbu Q, maka P = 0, sehingga diperoleh koordinat (0,P)

3) Tentukan letak dua titik potong tsb ke dalam bidang cartecius kemudian hubungkan menjadi garis lurus.

Contoh :

1. Diketahui fungsi penawaran sejenis barang $Q_s = \frac{5}{3}P - 6$

Q_s = kuantitas barang yang ditawarkan oleh produsen/penjual

P = harga tiap unit barang

Pertanyaan :

(a) Tentukanlah batas-batas nilai Q_s dan P yang memenuhi fungsi penawaran barang tersebut.

(b) Berapakah kuantitas barang yang ditawarkan oleh penjual (produsen), bila harga per unit barang tersebut: 12, dan 6.

(c) Berapakah harga terendah, sehingga tak ada seorang penjual (produsen) pun yang mau menawarkan barangnya.

(d) Berapakah harga per unit barang, sehingga penjual (produsen) masih mau menawarkan barangnya.

Pemecahan :

a. Batas-batas nilai Q_s dan P yang memenuhi fungsi penawaran $Q_s = \frac{5}{3}P - 6$

Bila $Q_s = 0$, maka

$0 = \frac{5}{3}P - 6$

$6 = \frac{5}{3}P$

P = $\frac{18}{5}$ = 3,6

Jadi, batas-batas nilai Q_s dan P yang memenuhi fungsi penawaran tersebut adalah : Qs $\leq$ 0 dan P $\geq$3,6.

b. $Q_s = \cdots.?$ bila P = 12 dan P = 6

Bila P = 12

Q_s = $\frac{5}{3}$P – 6

Q_s = $\frac{5}{3}$(12) – 6

Q_s = 14

bila P = 6

Q_s = $\frac{5}{3}$P – 6

Q_s = $\frac{5}{3}$(6) – 6

Q_s = 4

Jadi, bila harga per unit barang masing-masing 12 dan 6, maka kuantitas barang yang ditawarkan oleh penjual (produsen) masing-masing sebanyak 14 unit dan 4 unit.

c. Tak ada seorang penjual (produsen) pun yang mau menawarkan barangnya, ini berarti, Q_s = 0.

Q_s = $\frac{5}{3}$P – 6

0 = $\frac{5}{3}$P – 6

$P = 3{,}6$

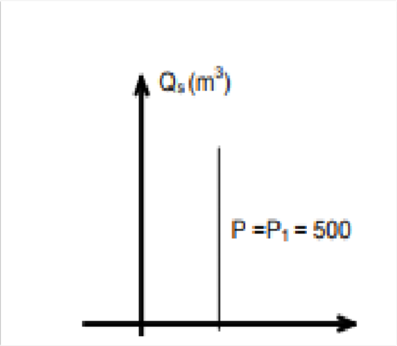
Jadi, harga terendah sehingga tidak ada seorang penjual (produsen) pun yang menawarkan barangnya adalah 3,6 per unit.

d. Harga per unit barang sehingga produsen masih bersedia menawarkan barangnya adalah lebih tinggi dari 3,6.

2. Pihak PDAM menawarkan air bersih dan sehat kepada masyarakat perkotaan. Tiap KK per bulan dikenakan pembayaran Rp 500,00 berapa m^3 pun yang dikonsumsinya. Tentukanlah fungsi penawarannya dan buatlah grafiknya.

Pemecahan :

P = P1 = 500



Gambar 2.2.3

C. Keseimbangan Pasar

3.1 Pengertian Keseimbangan Pasar

Keseimbangan pasar adalah suatu titik apabila jumlah produk yang ditawarkan sama dengan jumlah produk yang diminta dan harga yang ditawarkan sama dengan harga yang diminta. Secara matematis dapat ditulis sebagai berikut :

$Q_d = Q_s$ atau $P_d = P_s$

3.2 Cara Menentukan Harga dan Jumlah Keseimbangan Pasar

Harga keseimbangan disimbolkan oleh huruf Pe dan jumlah keseimbangan disimbolkan oleh huruf Qe. Cara menentukan harga atau jumlah keseimbangan pasar dengan memasukkan antara persamaan fungsi permintaan dan persamaan fungsi penawaran terhadap rumus matematis $Q_d = Q_s$ atau $P_d = P_s$

Contoh :

1. Bila fungsi permintaan ditunjukkan oleh persamaan Q_d= 24 - 5P dan fungsi penawaran ditunjukkan oleh persamaan Q_s= 2P - 4. Berapakah harga dan jumlah keseimbangannya ?

   Pemecahan :

   $Q_d = Q_s$

24 - 5P = 2P – 4

-7P = -28

P = 4

Jadi harga keseimbangannya (Pe) adalah 4

Subtitusikan nilai P, ke persamaan Qs

Q_s = 2P – 4

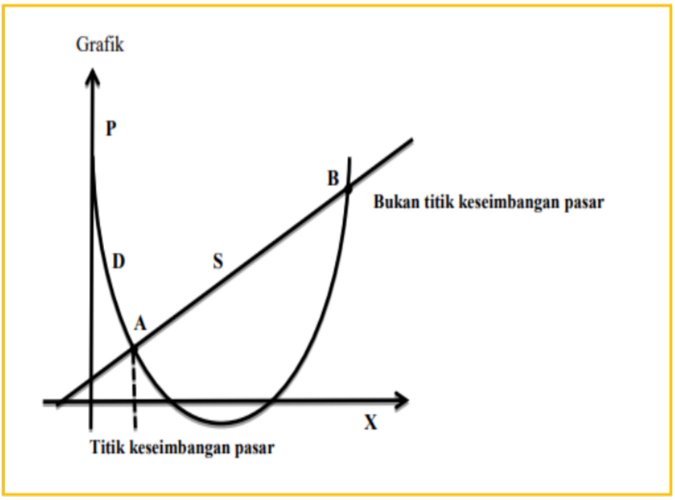
$Q_s = 2(4) - 4$

$Q_s = 4$

Jadi jumlah keseimbangannya (Qe) adalah 4

3.3 Cara Kurva Keseimbangan Pasar (Market Equilibrium)

Yang dimaksud dengan “pasar” adalah pertemuan antara pembeli (peminta) dan penjual (penawar) baik dalam pengertian langsung maupun tidak (secara komunikatif). Sedangkan “harga pasar” adalah harga yang terjadi pada titik keseimbanga pasar. Dan titik keseimbangan pasar adalah titik pertemuan permintaan dan penawaran. Sehingga titik keseimbangan pasar ditentukan oleh titik perpotongan antara curve permintaan dan Curve penawaran. Koordinat titik potong tersebut disebut titik keseimbangan pasar (Equilibrium) dan disimbolkan oleh huruf ³E´

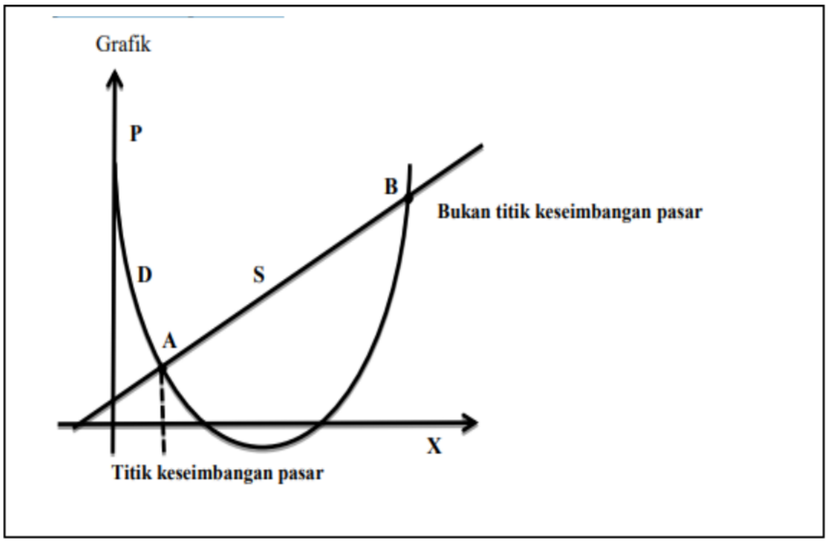


Gambar 3.3.1

Di dalam menentukan titik keseimbanagn pasar untuk suatu barang atau jasa, perlu diperhatikan syarat-syarat yang perlu dipenuhinya. Adapun syarat-syarat titik keseimbangan pasar adalah

1. Titik keseimbangan pasar hanya berlaku untuk nilai-nilai yang positif
2. Titik keseimbangan pasar hanya berlaku untuk titik yang memenuhi ketentuan bagi Curve permintaan dan Curve penawaran.

   Atas dasar dua persyaratan tersebut maka tidak mungkin terdapat dua titik keseimbangan pasar bagi Curve permintaan dan Curve penawaran, walaupun mungkin terdapat dua titik potong dari fungsi permintaan dan penawaran.



Gambar 3.3.2

Apabila melihat gambar di atas, maka titik A adalah titik seimbangan pasar dan titik B bukan titik.

Contoh:

Curve permintaan barang tersebut dapat digambarkan dengan mencari titik potong fungsi dengan sumbu x dan p

D : $x = -2p + 12$

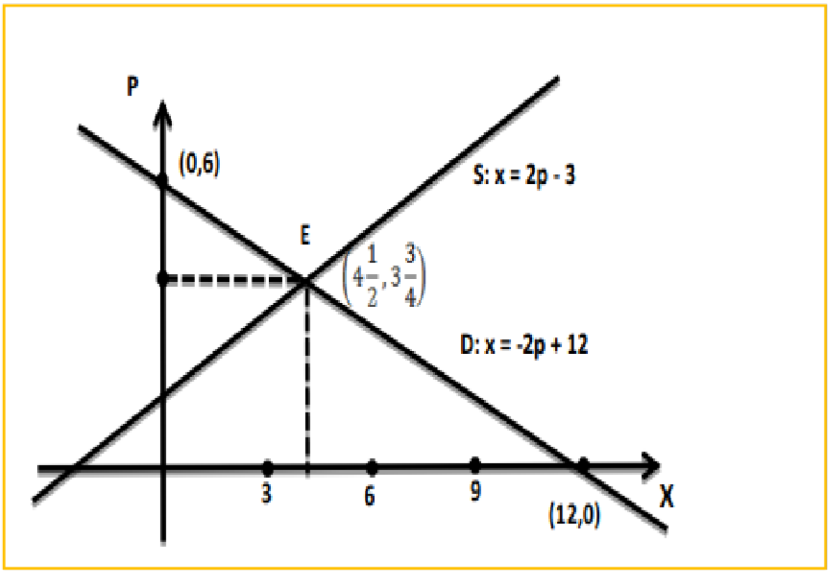
S : $x = 2p - 3$

Sehingga

$-2p + 12 = 2p - 3$

$4p = 15$

p = $3\frac{3}{4}$ atau p = $4\frac{1}{2}$



Gambar 3.3.3

Jadi, titik keseimbangan pasar pada E ($4\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{4}$)

D. Pengaruh subsidi Terhadap Keseimbangan Pasar

Subsidi merupakan bantuan yang diberikan pemerintah kepada produsen/suplier terhadap produk yang dihasilkan atau dipasarkannya sehingga harga yang berlaku di pasar adalah harga yang diinginkan pemerintah.

4.1 Subsidi s per unit

Ditulis kembali fungsi permintaan dan pernawaran siatu barang semula (sebelum subsidi), sebagai berikut

Q_d = f(P) = a – bP

Q_s = g(P) = c + Bp

1. Keseimbangan pasar sebelum subsidi

   Syarat keseimbangan pasar awal/sebelum subsidi adalah Q_d = Q_s

2. Keseimbangan pasar setelah subsidi.

Setelah pemerintah memberikan subsidi terhadap barang (jasa) yang dijual sebesar s per unit, maka fungsi permintaannya tetap, dan fungsi penawaran akan berubah sebagai berikut :

Fungsi permintaan : Q_{ds} = Q_d = a – bP

Fungsi penawaran : Q_{ss} = c + d(P + s)

Keseimbangan Pasar Setelah subsidi

$$Q_{ds} = Q_{ss} \quad \textbf{atau} \quad a - bP = c + d\,(P + s)$$

Titik keseimbangan pasar setelah subsidi adalah : E_s (P_s, Q_s)

3. Perubahan harga per unit barang, perubahan kuantitas barang, subsidi yang dinikmati oleh konsumen dan produsen, serta besarnya subsidi yang dikeluarkan oleh pemerintah, dapat dihitung sebagai berikut :

   a. Perubahan harga per-unit barang (ΔP) $\Delta P = P_E - P_s$

   b. Perubahan kuantitas barang diminta (ΔQ) $\Delta Q = Q_S - Q_E$

   c. Besarnya subsidi per unit barang/jasa yang dinikmati konsumen

      (S_K) $S_K = (P_E - P_s) - \Delta P$

      Total subsidi yang dinikmati konsumen (S_K) $S_k = \Delta P . Q_S$

   d. Besarnya subsidi per unit barang/jasa yang dinikmati produsen

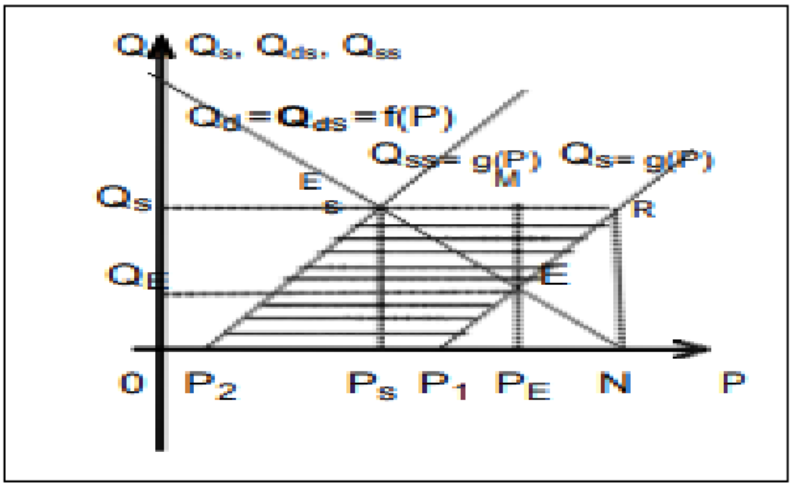
      (S_p) $S_p = s - \Delta P$

      Total subsidi yang diterima oleh produsen (S_p) $S_p = (s - \Delta P)Q_S$

   e. Total subsidi yang dikeluarkan oleh pemerintah

      (S) $S = s. Q_S = S_k + S_p$

Untuk lebih jelasnya, pada keadaan keseimbangan pasar sebelum dan sesudah subsidi disajikan pada gambar di bawah



Gambar 4.1.1

Keterangan :

E = Titik keseimbangan pasar sebelum subsidi

E_s = Titik keseimbangan pasar setelah subsidi

P_E = Harga per unit barang sebelum subsid

P_s = Harga per unit barang setelah subsid

$P_E - P_s = \Delta P$ = Perubahan harga per-unit barang atau besar subsidi per-unit yang dinikmati oleh konsumen

N - P_s = $P_1 - P_2$ = Besar subsidi per-unit baran

Q_E = Kuantitas barang keseimbangan pasar sebelum subsid

Q_s = Kuantitas barang keseimbangan pasar setelah subsid

$Q_s - Q_E$ = ΔQ = Perubahan kuantitas barang

- Total subsidi yang diberikan pemerintah (S) ditunjukkan oleh luas jajaran genjang P_2 E_s R P_1 ≈ luas segi empat P_S E_s R N yaitu (s, Q_s)
- Total subsidi yang dinikmati oleh konsumen ditunjukkan oleh luas segi empat P_S , E_s M P_E yaitu (ΔP)(Q_s)
- Total subsidi yang dinikmati oleh produsen ditunjukkan oleh luas segi empat P_E M R N yaitu (s . ΔP) Q_s

Contoh :

1. Fungsi permintaan suatu barang $Q_d = 5 - \frac{1}{2}P$ dan fungsi penawarannya $Q_s = P - 3$. Jika pemerintah memberikan subsidi sebesar $s = \frac{3}{4}$ tiap unit barang yang dijual.
   a. Tentukanlah besarnya total subsidi yang dinikmati oleh konsumen dan yang dinikmati oleh produsen.
   b. Tentukanlah total subsidi yang dikeluarkan oleh pemerintah.
   c. Buatlah grafiknya.

Pemecahan :

Fungsi sebelum subsidi

$Q_d = 5 - \frac{1}{2}P$

$Q_s = P - 3.$

Fungsi setelah subsidi $s = \frac{3}{4}$ unit

$Q_{ds} = 5 - \frac{1}{2}P$

$Q_{ss} = (P + s) - 3 = (P + \frac{3}{4}) - 3 = P - 2\frac{1}{4}$

a. Keseimbangan sebelum subsidi terjadi, jika $Q_d = Q_s$:

$Q_d = Q_s$

$5 - \frac{1}{2}P = P - 3.$

$1\frac{1}{2}P = 8$

$P = P_E = \frac{16}{3}$

Selanjutnya substitusikan $P_E = \frac{16}{3}$ ke fungsi Q_d atau Q_s, untuk mendapatkan Q_E.

$Q_s = P - 3.$

$Q_E = \frac{16}{3} - 3$

$\frac{16-9}{} \quad 7$

Titik keseimbangan sebelum subsidi adalah $E(P_E, Q_E) = (\frac{16}{3}, \frac{7}{3})$

Keseimbangan setelah adanya subsidi, jika $\mathbf{Q_{ds} = Q_{ss}}$

$Q_{ds} = Q_{ss}$

$5 - \frac{1}{2}P = P - 2\frac{1}{4}$

$1\frac{1}{2}P = 7\frac{1}{4}$

$P = P_S = \frac{29}{6} = \frac{58}{12}$

$Q_S = \ldots\ldots?$

Substitusikan $P_S = \frac{29}{6}$ ke fungsi Q_{ds} atau Q_{ss} untuk mendapatkan Q_S.

$Q_{ds} = 5 - \frac{1}{2}P$

$Q_{s.} = 5 - \frac{1}{2}(\frac{29}{6})$

$Q_{s.} = \frac{31}{12}$

Titik keseimbangan setelah subsidi adalah E_S (P_S, Q_S) = E_S $(\frac{58}{12}, \frac{31}{12})$

Total subsidi yang dinikmati oleh konsumen (S_k)

$S_k = \Delta P \,.\, Q_{s.}$

$S_k = (P_E - P_s).Q_S$

$S_k = (\frac{16}{3} - \frac{58}{12}).\frac{31}{12}$

$S_k = \frac{186}{144}$

Jadi, total subsidi yang dinikmati oleh konsumen sebesar $\frac{186}{144}$

Total subsidi yang dinikmati oleh produsen (S_p)

$S_p = (s - \Delta P).Q_S$

$= (\frac{3}{4} - \frac{6}{12}).\frac{31}{12}$

$S_p = \frac{93}{144}$

Jadi, total subsidi yang dinikmati oleh produsen sebesar $\frac{93}{144}$

b. Total subsidi yang dikeluarkan oleh pemerintah (S)

$S = S_k + S_p = s.\,Q_s$

$S = \frac{186}{144} + \frac{93}{144} = \frac{279}{144}$

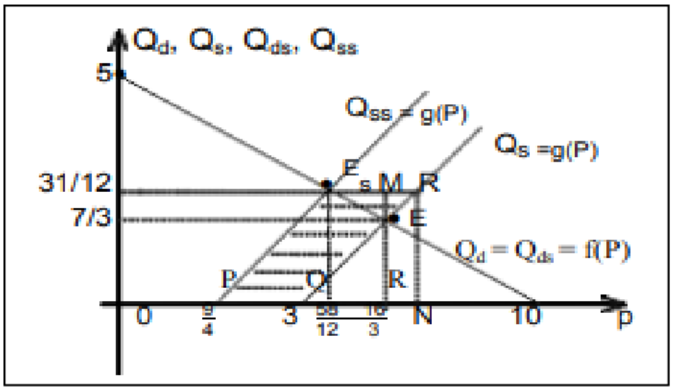
c. Gambar grafiknya

$Q_d = 5 - \frac{1}{2}P$ $\qquad$ $Q_s = P-3$ $\qquad$ $Q_{ss} = P - 2\frac{1}{4}$

P	10	0
Q_d	0	5

P	3	4	$\frac{16}{3}$	6
Q_s	0	1	$\frac{7}{3}$	3

P	$\frac{9}{4}$	$\frac{13}{4}$	$\frac{17}{4}$	$\frac{58}{12}$
Q_{ss}	0	1	2	$\frac{31}{12}$



Gambar 4.1.2

E. Keseimbangan pasar Dua Jenis Barang

Terhadap barang yang mempunyai hubungan substitusi, kuantitas barang yang diminta atau ditawarkan selain tergantung dari harga barang itu sendiri, juga tergantung dari harga barang lainnya. Bila fungsi permintaan dan penawaran masing-masing barang tersebut adalah sebagai berikut :

- Fungsi permintaan dan penawaran barang pertama

$\boxed{Q_{d1} = f\,(P_1, P_2\,)}$ (gambar 5.1)

$\boxed{Q_{s1} = g\,(P_1, P_2\,)}$ (gambar 5.2)

- Fungsi permintaan dan penawaran barang kedua

$\boxed{Q_{d2} = f\,(P_1, P_2\,)}$ (gambar 5.3)

$\boxed{Q_{s1} = g\,(P_1, P_2\,)}$ (gambar 5.4)

Keseimbangan pasar akan tercapai/terjadi jika :

(1) Kuantitas barang pertama yang diminta sama dengan yangditawarkan

$\boxed{Q_{d1} = Q_{s1}}$ (gambar 5.5)

(2) Kuantitas barang kedua yang diminta sama dengan yang ditawarkan

$\boxed{Q_{d2} = Q_{s2}}$ (gambar 5.6)

Harga dan kuantitas keseimbangan pasar untuk masing-masing barang (barang pertama dan kedua) yaitu $P_{1(E)}$, $Q_{1(E)}$ dan $P_{2(E)}$, $Q_{2(E)}$ dapat dicari dengan menyelesaikan secara simultan (5.5) dan (5.6) atau menyelesaikan secara simultan (5.1), (5,2), (5.3), (5.4). P_1 dan P_2 adalah harga per unit barang pertama dan kedua. $Q_1 = Q_2$ adalah kuantitas barang pertama dan kedua. Model analisis keseimbangan pasar dua jenis barang ini dapat diperluas untuk lebih dari dua jenis barang (n > 2) jenis barang.

Contoh :

Permintaan dan penawaran dua jenis barang yang memiliki hubungan substitusi masing- masing ditunjukkan oleh pasangan fungsi di bawah ini:

Jenis Barang	Permintaan	Penawaran
Barang Pertama	$Q_{d1} = 100 - 2P_1 + 3P_2$	$Q_{s1} = 2P_1 - 4$
Barang Kedua	$Q_{d2} = 150 + 4P_1 - P_2$	$Q_{s2} = 3P_2 - 6$

Tentukanlah harga dan kuantitas keseimbangan untuk masing-masing barang.

Pemecahan :

$Q_{d1} = 100 - 2P_1 + 3P_2$ …….. (1)

$Q_{s1} = 2P_1 - 4$ …….. (2)

$Q_{d2} = 150 + 4P_1 - P_2$ …….. (3)

$Q_{s2} = 3P_2 - 6$ …… (4)

Dari (1) dan (2) didapat:

$100 - 2P_1$ + $3P_2$ = Q_{s1} = $2P_1$ - 4

$4P_1 - 3P_2$ = 104 ……… (5)

Dari (3) dan (4) didapat:

150 $4P_1$ - P_2 = $3P_2 - 6$

-4P_1 + 4$P_2 = 156$ ………… (6)

Dari(5) dan (6) didapat :

$4P_1 - 3P_2$ = 104

-4P_1 + 4$P_2 = 156$

------------------------------+

$P_2 =$ $P_{2(E)}$ = 260

Selanjutnya ,

Substitusi $P_{2(E)}$ ke 5 atau 6 → -4P_1 + 4$(260) = 156$ → $P_{1(E)}$ = 221

Substitusi $P_{2(E)}$ dan $P_{1(E)}$ ke (1) atau (2) → $Q_{1(E)} = 438$

Substitusi $P_{2(E)}$ dan $P_{1(E)}$ ke (3) atau (4) → $Q_{2(E)} = 774$

Jadi, harga dan kuantitas keseimbangan barang pertama adalah $P_{1(E)}$ = 221 dan $Q_{1(E)} = 438$. Sementara itu, harga dan kuantitas keseimbangan barang kedua adalah $P_{2(E)}$ = 260 dan $Q_{2(E)} = 774$

F. Monopoli dan Pengaruh Pajak

Tujuan utama dalam monopoli adalah memperoleh laba yang maksimal. Hal-hal yang berkaitan di dalam laba adalah harga dan kuantitas yang dikehendaki. Tiga faktor dalam monopoli:

1. T.R (Total Revenue) : P.
2. Biaya (TC)
3. Laba maksimal (NR) dimana : NR = TR – TC

Syarat terjadinya laba yang maksimal:

$NR' = 0$

$NR'' < 0$

$NR = TR - TC$

$NR' = \frac{d(TR-TC)}{dQ}$

$NR' = \frac{dTR}{dQ} - \frac{dTC}{dQ}$

$0 = \frac{dTR}{dQ} - \frac{dTC}{dQ}$

$\frac{dTR}{dQ} = \frac{dTC}{dQ}$

$MR = MC$

Dengan adanya pajak sebesar t/unit yang dikenakan terhadap barang yang diproduksi oleh seorang pengusaha monopoli maka akan menimbulkan seolah-olah biaya rata-rata per-unit meningkat sebesar p, berarti biaya secara keseluruhan meningkat sebesar tQ.

Misal: pajak : t/unit, maka andaikan:

AC = 10 (biaya rata-rata sebelum pajak)

AC_1 = 10 +t (biaya rata-rata sesudah pajak)

$TC_1 = AC.\ Q$

$TC_1 = (\ AC + t).Q$

$TC_1 = ACQ + tQ$

Sehingga dirumuskan: $AC_1 = AC + 1$

$\boxed{TC_1 = ACQ + tQ}$ *atau* $\boxed{TC_1 = TC + tQ}$

Latihan Soal

Pilihan Berganda

1. Saat ini harga daging sapi Rp120.000,00/kg dan jumlah daging sapi yang ditawarkan 5.000 kg. Tiba-tiba harga naik menjadi Rp150.000,00/kg dan jumlah daging yang ditawarkan naik menjadi 6.000 kg. Berapa fungsi penawarannyadan narasikanaplikasinyadalamekonomi.

   A.1/50 P + 3000

   B.1/20 P + 2500

   C.1/40 P + 3000

   D.1/55 P + 3000

   E.1/30 P + 2000

2. Fungsi Penawaran Untuk Transaksi

Di tahun 2019 di suatu negara diperoleh pendapatan nasional sebanyak 500 (triliun) dengan penawaran uang 100. Jika pada tahun 2020 negara tersebut memperoleh pendapatan nasional sebanyak 700 (triliun) dengan penawaran uang 150. Maka, tentukan fungsi transaksi permintaan untuk transaksinyadan narasikanaplikasinyadalamekonomi.

A. 0,25Y – 10

B. 0,3Y – 25

C. 0,25Y – 25

D. 0,5Y – 50

E. 0,5Y – 25

3. Fungsi Konsumsi

Jika fungsi konsumsi C = 95.000 + 0,75Y dalam rupiah, sedangkan C merupakan besarnya konsumsi, Y besarnya pendapatan, maka besarnya konsumsi apabila tabungan sebesar Rpl00.000,00 adalahdan narasikanaplikasinyadalamekonomi.

A.Rp675.000

B.Rp690.000

C.Rp660.000

D.Rp680.000

E.Rp665.000

4. Fungsi Marginal

Fungsi total biaya suatu perusahaan dinyatakan sebagai berikut :

$C = Q^3 – 4Q^2 + 10Q + 75$

Bagaimanakah fungsi marginal biayanya (marginal cost) dan berapakah nilai marginal biaya tersebut jika perusahaan memproduksi 2 penjualan, serta terangkan artidan narasikanaplikasinyadalamekonomi.

a. 4

b. 5

c. 6

d. 7

e. 8

5. fungsi investasi

PT. Bakrie Land, tbk melakukan investasi dengan ditunjukkan fungsi investasi I = 250 - 500i, berapa harga besarnya investasi jika bunga bank yang berlaku pada tahun 2012 adalah 12%. Berapa pula investasi bila tingkat bunga tersebut sebesar 30%? Gambarkan kurvanya dan narasikanaplikasinyadalamekonomi.

a. 200

b. 100

c. 150

d. 225

e. 250

6. Fungsi Permintaan

Saat harga barang Rp 20.000 per unit, permintaan Rifka sebanyak 2 unit. Namun, saat harga barang turun menjadi Rp 18.000 per unit, permintaan Rifka naik sebanyak 3 unit. Berapa fungsi permintaan Rifkadan narasikanaplikasinyadalamekonomi.

A. Q = 12 – 0,0015 P.

B. Q = 15 – 0,0015 P.

C. Q = 15 – 0,0025 P.

D. Q = 12 – 0,0005 P.

E. Q = 18 – 0,0025 P.

7. Fungsi permintaan untuk spekulasi

Permintaan uang untuk transaksi dan jaga-jaga dalam perekonomian masyarakat memenuhi fungsi L1 = 0,2 Y dan permintaan uang untuk berspekulasi adalah L2 = 300- 300r. Sedangkan jumlah uang beredar Ms tetap yaitu 500. Berapakah Fungsi keseimbangan permintaan penawaran uang tersebutdan narasikanaplikasinyadalamekonomi.

A. Y=800+1200r

B. Y=800+1500r

C. Y=1000+1200r

D. Y=1200+1500r

E. Y=1000+1500r

8. Fungsi IM

- Suatu Perekonomian memiliki data sbb:

– Jumlah uang yang beredar (penawaran uang); M = 200 Milyar

– Permintaan uang untuk transaksi : Lt = 0,25 Y

– Permintaan uang untuk jaga - jaga: Lj = 0,15 Y

– Permintaan uang untuk spekulasi : L2 = 160 – 4r

Hitunglah fungsi LM dari data diatasdan narasikanaplikasinyadalamekonomi.

A. 100 + 10 r = Y

B. 110 + 10 r = Y

C. 120 + 12 r = Y

D. 100 + 12 r = Y

E. 120 + 14 r = Y

9. Sebuah Perusahaan Komputer menjual komputer jenis H dengan harga Rp. 5.000.000,00. Perusahaan tersebut berhasil memproduksi 20 buah Komputer untuk dijual dengan modal Rp. 61.000.000,00, namun sayangnya hanya 1 buah komputer yang dapat dijual. Oleh karena itu CEO Perusahaan berinisiatif untuk menurunkan harga komputer tersebut menjadi Rp. 3.000.000,00. Apakah dengan penurunan harga tersebut Perusahaan akan tetap mendapatkan keuntungan? Jika iya, berapakah keuntungannyadan narasikanaplikasinyadalamekonomi.

a. Ya, dengan keuntungan Rp. 2.000.000,00

b. Tidak, perusahaan hanya balik modal

c. Tidak, perusahaan rugi Rp. 2.000.000,00

d. Ya, dengan keuntungan Rp. 1.000.000,00

e. Ya, perusahaan rugi Rp. 1.000.000,00

10. Ibu Nurul adalah pelaku usaha mikro di bidang kuliner yaitu penjualan ayam goreng. Karena harga ayam naik, maka Ibu Nurul menaikkan harga ayam goreng tersebut dari Rp. 5000,00 per potong menjadi Rp. 6.000,00 per potong. Namun, sayangnya penjualan Bu Nurul mengalami penurunan, dari 200 potong ayam yang terjual setiap harinya menjadi hanya 120 potong ayam yang terjual. Berapakah Fungsi permintaannyadan narasikanaplikasinyadalamekonomi.

a. P = 12,5Q + 3000
b. P = -12,5Q + 3000
c. P = -12,5Q - 3000
d. P = 12,5Q - 3000
e. P = 12,5Q + 2000

Essay

1. Harga tempe semakin hari semakin meningkat. Hal ini disebabkan oleh pasokan kedelai dari luar negeri yang semakin berkurang. Pada Bulan Desember 2021 harga tempe melonjak hingga mencapai angka Rp. 3000,00/buah. Mengetahui hal itu pemerintah mensubsidi harga tempe di bulan Januari 2022 turun menjadi Rp2500,00. Seorang Ibu Rumah Tangga, bernama Bu Marcella pada bulan Desember 2021 membeli hanya 1 buah tempe sementara di Bulan Januari 2022 membeli 20 buah tempe. Berapakah keseluruhan uang yang dikeluarkan Bu Marcella untuk membeli tempe dari Bulan Desember 2021 sampai bulan Januari 2022 dan narasikanaplikasinyadalamekonomi.
2. Akhir – akhir ini para petani sangat resah dengan kenaikan pupuk nonsubsidi yang disebabkan oleh naiknya harga pupuk Internasional. Oleh karena itu petani pun semakin sedikit membeli pupuk nonsubsidi tersebut, yang awalnya dengan harga Rp.3000 per kg akan terjual sebanyak 2000 kg, sekarang dengan harga Rp. 4000 per kg, terjual sebanyak 1500 kg. Tentukanlah fungsi permintaannyadan narasikanaplikasinyadalamekonomi.

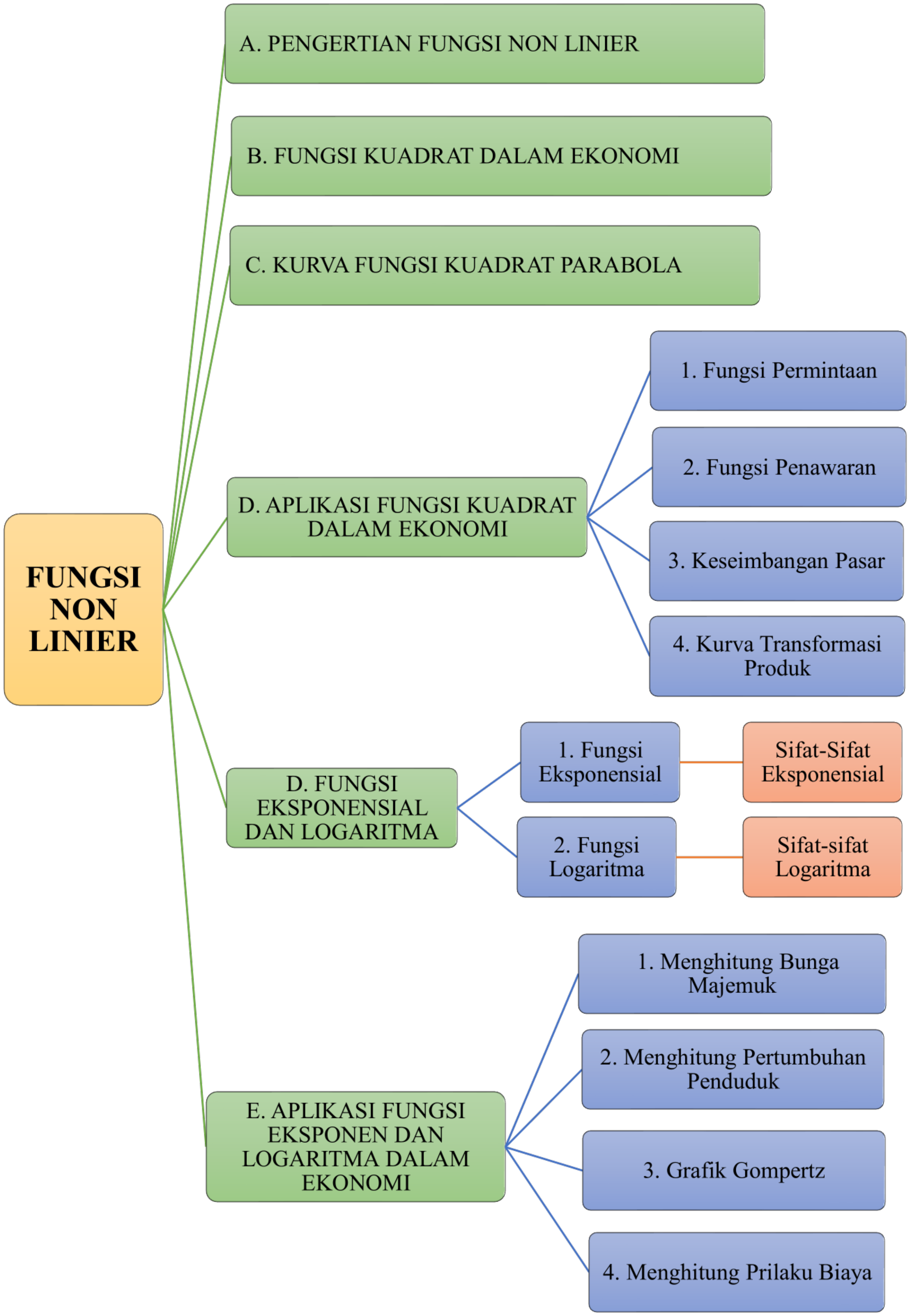
3. Seorang pengusaha bernama Vian lihai bermain saham. Pada bulan ini, ia membeli saham pada perusahaan V sebanyak Rp. 50.000.000,00. Setiap bulan ia mendapatkan keuntungan sebesar Rp. 2.000.000. Jika Vian menanamkan uangnya pada Perusahaan V selama 5 bulan. Berapakah uang yang dimiliki Vian sekarangdan narasikanaplikasinyadalamekonomi.
4. Jika fungsi permintaan suatu produk ditunjukkan oleh P = 12 - 2Q dan suatu fungsi penawaran oleh P = 3 + Q.Terhadap produk tersebut dikenakan pajak oleh pemerintah sebesar 3 per unit. Berapakah harga dan jumlah keseimbangan pasar sebelum dan sesudah kena pajak dan narasikanaplikasinyadalamekonomi.
5. Seorang pengusaha bubur ayam mempunyai 4 karyawan dengan gaji perbulan Rp. 100.000 perkaryawan. Biaya pengadaan bahan baku bubur ayam rata-rata Rp. 2.000.000 perbulan dengan kalkulasi biaya bubur ayam rata-rata perporsi Rp. 600. Pengusaha tersebut menjual bubur ayamnya dengan harga Rp. 800 perporsi. Dalam keadaan tersebut berapa porsi bubur ayam yang harus dijual agar tidak rugi serta berapa besar penerimaan total dan biaya total yang dicapai saat itudan narasikanaplikasinyadalamekonomi.
6. Bu Evi seorang penjual daging ayam di pasar tradisional. Pada saat tingkat harga Rp. 9000,00 per kg, jumlah daging ayam yang diminta 200 kg. Ketika harga daging ayam naik menjadi Rp. 11.000,00 per kg, jumlah daging ayam yang diminta menurun menjadi 150 kg. Berdasarkan uraian tersebut, bagaimana fungsi permintaan daging ayam di pasardan narasikanaplikasinyadalamekonomi.
7. Di toko buah Segar Makmur sebuah semangka dengan harga Rp 4.000 hanya mampu menjual sebanyak 100 buah, dan pada saat harga semangka Rp 5.000 perbuah mampu menjual semangka lebih banyak menjadi 200 buah. Rumuskan fungsi penawarannya dan narasikan aplikasinya dalam ekonomi.
8. Fungsi konsumsi masyarakat suatu Negara ditunjukkan oleh C=15 + 0,4 Yd. Jika pemerintah menerima dari masyarakat pembayaran pajak sebesar 20 dan pada tahun yang sama memberikan pada warganya pembayaran alihan sebesar 10, berapa konsumsi nasional seandainya pendapatan nasional pada

tahun tersebut sebesar 150? Berapa pula tabungan nasional dan narasikan aplikasinya dalam ekonomi.

9. Konsumsi masyarakat suatu negara di tunjukan oleh persamaan C = 1000 + 0.75Yd, Investasi dan pengeluaran pemerintah masing-masing sebesar 2000 dan 1000. Pajak yang diterima dan pembayaran alihan yang dilakukan oleh pemerintah masing-masing dicerminkan oleh T = 500 + 0,25 Y dan R = 100 + 0,05 YJika nilai ekspornya 1250 dan impornya di cerminkan oleh M = 700 + 0,10 Y, hitunglah pendapatan nasional negara tersebut dan narasikan aplikasinya dalam ekonomi.

10. Jika Ani ingin menjual sebuah produk untuk usahanya dengan harga produk Rp 500,00 rnaka jurnlah barang yang akan terjual sebanyak 60 unit. Jika harganya rneningkat Rp 700,00 rnakajurnlah produk yang terjual sebanyak 100 unit. Tentukan fungsi permintaannyanya dan narasikan aplikasinya dalam ekonomi.

PETA KONSEP


FUNGSI NON LINIER
A. PENGERTIAN FUNGSI NON LINIER
B. FUNGSI KUADRAT DALAM EKONOMI
C. KURVA FUNGSI KUADRAT PARABOLA
D. APLIKASI FUNGSI KUADRAT DALAM EKONOMI
1. Fungsi Permintaan
2. Fungsi Penawaran
3. Keseimbangan Pasar
4. Kurva Transformasi Produk
D. FUNGSI EKSPONENSIAL DAN LOGARITMA
1. Fungsi Eksponensial
Sifat-Sifat Eksponensial
2. Fungsi Logaritma
Sifat-sifat Logaritma
E. APLIKASI FUNGSI EKSPONEN DAN LOGARITMA DALAM EKONOMI
1. Menghitung Bunga Majemuk
2. Menghitung Pertumbuhan Penduduk
3. Grafik Gompertz
4. Menghitung Prilaku Biaya

BAB VII

FUNGSI NON LINIER

JOHAN CARL FRIEDRICH (1777 – 1855)

Johann Carl Friedrich Gauß (juga dieja Gauss) (30 April 1777 – 23 Februari 1855) adalah matematikawan, astronom, dan fisikawan Jerman yang memberikan beragam kontribusi; ia dipandang sebagai salah satu matematikawan terbesar sepanjang masa selain Archimedes dan Isaac Newton.

Dilahirkan di Braunschweig, Jerman, saat umurnya belum genap 3 tahun, ia telah mampu mengoreksi kesalahan daftar gaji tukang batu ayahnya. Menurut sebuah cerita, pada umur 10 tahun, ia membuat gurunya terkagum-kagum dengan memberikan rumus untuk menghitung jumlah suatu deret aritmetika berupa penghitungan deret 1+2+3+...+100. Di sekolahnya, Gauss dikenal merupakan anak yang dapat dikatakan seorang pembuat masalah, tetapi juga merupakan orang yang memiliki kemampuan memecahkan masalah.

A. PENGERTIAN FUNGSI NON LINIER

Fungsi non linier merupakan fungi yang menyatakan hubungan matematis antara satu variabel dengan variabel lainnya dan fungsi non linier membentuk garis lengkung. Dalam matematika ekonomi, fungsi non linier digunakan sebagai model seperti pada persamaan-persamaan kuadratik.

Gambar 18. Contoh Grafik Fungsi Non Linier

Fungsi non linier ialah salah satu fungsi yang banyak dipakai dalam ekonomi, alasannya sebab fungsi non linier mampu mendekati keadaan nyata. Namun, pada pembahasan kali ini akan dibahas bentuk fungsi non linier yang paling sering dijumpai dalam analisis ekonomi, yaitu: fungsi kuadrat serta fungsi eksponensial dan logaritma.

B. FUNGSI KUADRAT DALAM EKONOMI

Fungsi kuadrat dengan satu variabel bebas adalah fungsi polinomial tingkat dua, dimana fungsi ini mempunyai bentuk umum :

$$\boxed{\mathbf{Y = f(x) = ax^2 + bx + c}}$$

Keterangan : Y = Variabel terikat

x = Variabel bebas

a, b, dan c = konstanta dan a ≠ 0

Contoh :

Diketahui salah satu akar dari persamaan kuadrat x2 – 6x + c = 0 adalah 3. Tentukan nilai c yang memenuhi persamaan kuadrat tersebut.

Pembahasan :

Pertama, substitusikan nilai x = 3 ke persamaan kuadrat tersebut:

$x^2 - 6x + c = 0$

$3^2 - 6(3) + c = 0$

$9 - 18 + c = 0$

$-9 + c = 0$

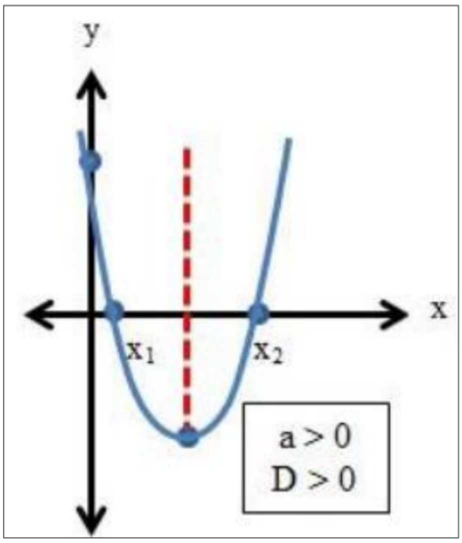
c = 9
Jadi, nilai c yang memenuhi persamaan kuadrat tersebut adalah 9.

Berdasarkan bentuk umum persamaan kuadrat diatas, diketahui bahwa fungsi kuadrat merupakan fungsi dengan pangkat tertinggi dari variabelnya adalah dua. Gambar kurva fungsi kuadrat bisa berupa: lingkaran, elips, parabola, hiperbola. Dalam ekonomi, fungsi kuadrat yang paling sering muncul ialah berbentuk parabola.

C. KURVA FUNGSI KUADRAT PARABOLA

Parabola adalah tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap sebuah titik fokus dan sebuah garis lurus yang disebut direktriks. Setiap parabola mempunyai sebuah sumbu simetri dan sebuah titik ekstrim. Berikut ini bentuk parabola berdasarkan sumbu simetris dan titik puncak.

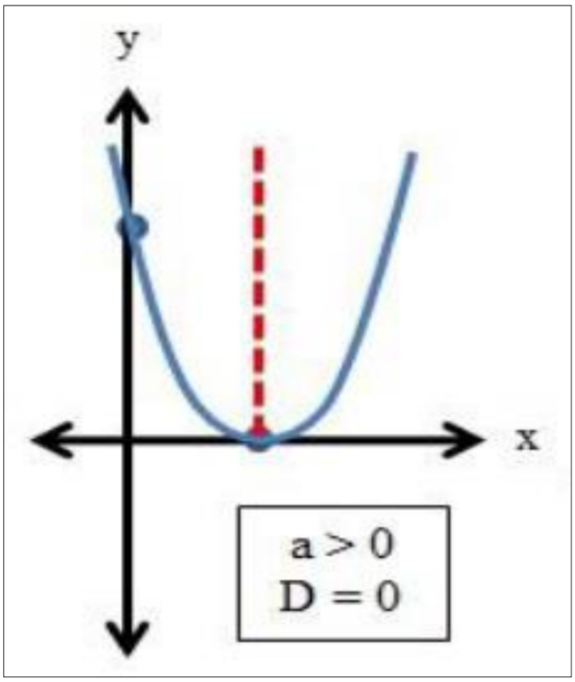
1. **Jika $a > 0$ dan $D > 0$** pada persamaan $y=ax^2+bx+c$, maka kurva terbuka keatas atau kebawah. : Parabola terbuka ke atas dan memotong sumbu x di dua titi berbeda.



Gambar 19. Bentuk Parabola Jika a > 0 dan D > 0

2. **Jika a > 0 dan D = 0**

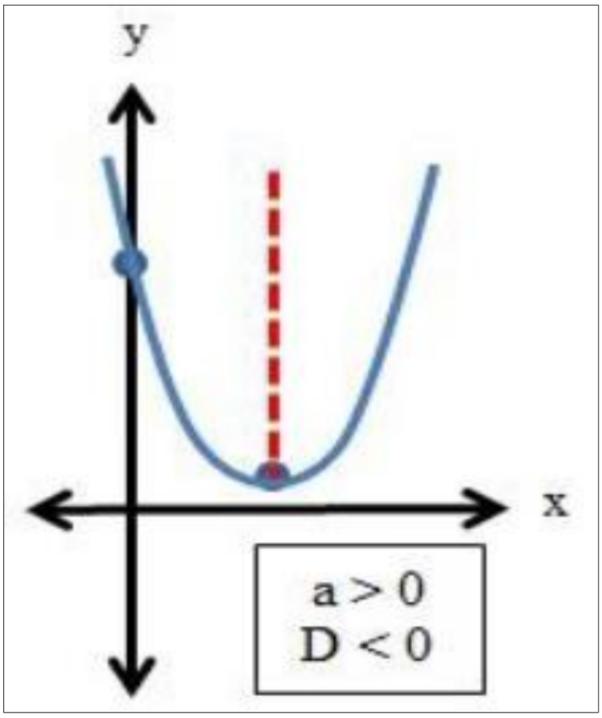
   Parabola terbuka ke atas dan menyinggung sumbu x di satu titik.



Gambar 20. Bentuk Parabola Jika a > 0 dan D = 0

3. Jika a > 0 dan D < 0

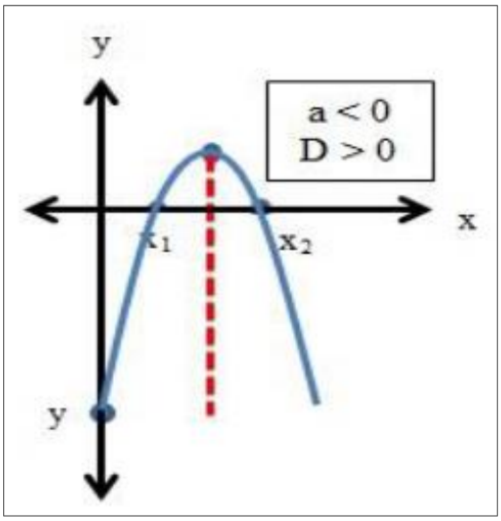
Parabola terbuka ke atas dan tidak memotong sumbu atau menyinggung sumbu x.



Gambar 21. Bentuk Parabola Jika a > 0 dan D < 0

4. Jika $a < 0$ dan $D > 0$

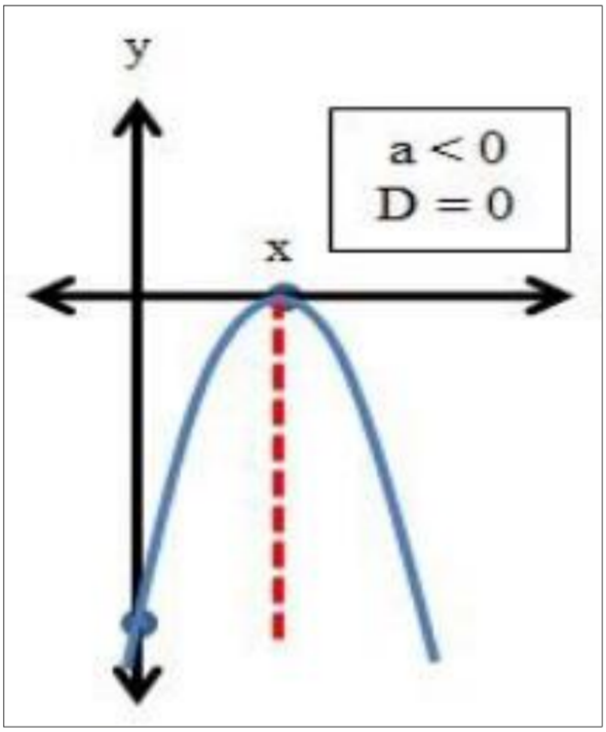
Parabola terbuka ke bawah dan memotong sumbu x didua titik berbeda.



Gambar 22. Bentuk Parabola Jika a < 0 dan D > 0

5. Jika $a < 0$ dan $D = 0$

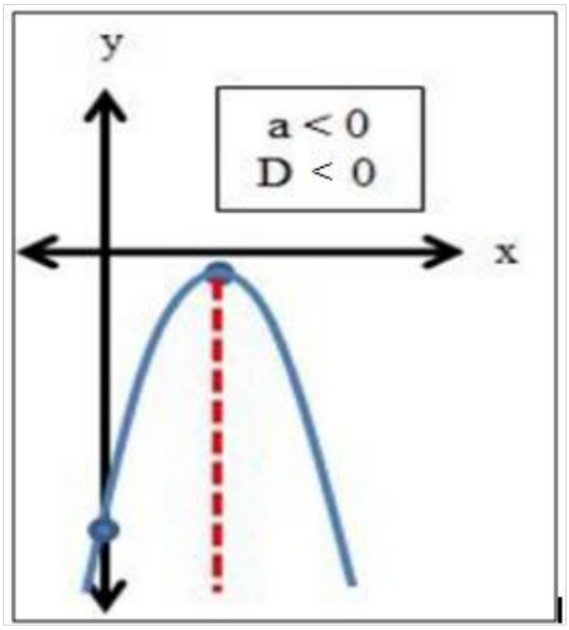
Parabola terbuka ke bawah dan menyinggung sumbu x di satu titik.



Gambar 23. Bentuk Parabola Jika a < 0 dan D = 0

6. **Jika a < 0 dan D < 0**

Parabola terbuka ke bawah dan tidak memotong sumbu atau menyinggung sumbu x



Gambar 24. Bentuk Parabola Jika a < 0 dan D < 0

D. APLIKASI FUNGSI KUADRAT DALAM EKONOMI

1. Fungsi Permintaan

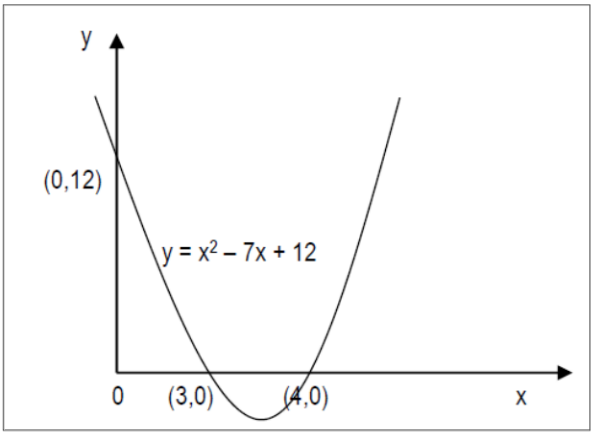
Diketahui fungsi permintaan suatu barang adalah $y = x^2 - 7x + 12$ dimana y adalah harga (P) dan x adalah kuantitas (Q). Gambarkan kurvanya.

Penyelesaian :

- Titik potong dengan sumbu-y: Misalkan $x = 0 \rightarrow y = 12 \rightarrow$ titik potong (0,12)
- Titik potong dengan sumbu-x: Misalkan $y = 0 \rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$

  Karena D = 49 – 4(1)(12) = 1 D > 0, maka ada dua titik potong dengan sumbu x, yaitu: $x^2 - 7x + 12 = 0 \rightarrow (x - 3)(x - 4) = 0 \rightarrow x_1 = 3$ dan $x_2 = 4 \rightarrow$ titik potong (3,0) dan (4,0).
- Karena a > 0, maka kurva terbuka ke atas, titi ekstrim minimum.

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right) \rightarrow \left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$



Gambar 25. Kurva Permintaan $y = x^2 - 7x + 12$

- Berdasarkan kurva permintaan di atas, tampak bahwa fungsi permintaan $y = x^2 - 7x + 12$ berlaku untuk interval jumlah permintaan $0 \leq x \leq 3$ dan harga permintaan $0 \leq y \leq 12$. Atau fungsi permintaan di atas dinyatakan dengan: $P = Q^2 - 7Q + 12$ untuk $0 \leq Q \leq 3$ dan $0 \leq P \leq 12$

2. Fungsi Penawaran

Diketahui fungsi penawaran sejenis barang adalah $y = x^2 + 3x + 2$, dimana y adalah harga (P) dan x adalah kuantitas (Q). Gambarkan kurvanya.

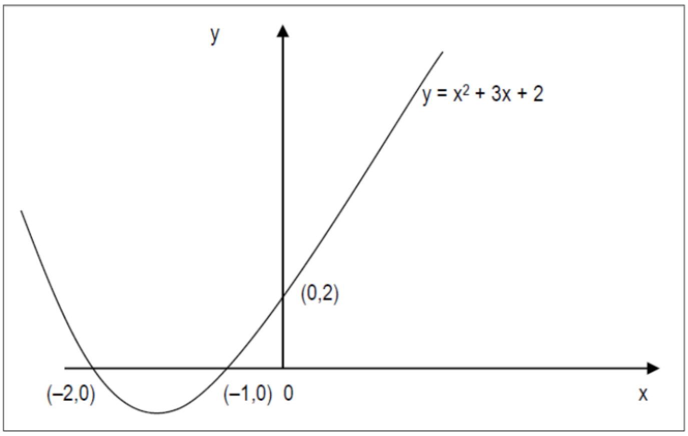
Penyelesaian :

- Titik potong dengan sumbu y: Misalkan $x = 0 \rightarrow y = 2$
- Titik potong dengan sumbu x: Misalkan $y = 0 \rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$

  Karena $D = 9 - 4(1)(2) = 1 \rightarrow D > 0$, maka terdapat dua titik potong dengan sumbu x, yaitu: $x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow (x + 1)(x + 2) = 0 \rightarrow \rightarrow x_1 = -1$ dan $x_2 = -2$ Maka titik potong (– 1,0) dan (– 2,0).

- Karena a > 0, maka kurva parabola terbuka ke atas → titik ekstrim minimum

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right) \rightarrow \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$



Gambar 26. Kurva Penawaran $y = x^2 + 3x + 2$

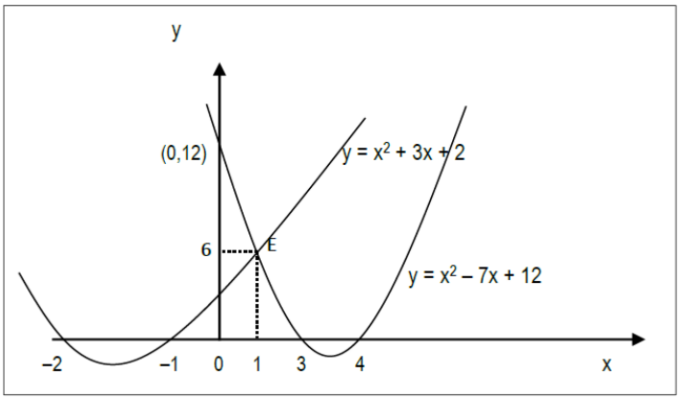
- Berdasarkan kurva penawaran di atas, tampak bahwa fungsi penawaran $y = x^2 + 3x + 2$ berlaku untuk interval jumlah penawaran $x \geq 0$ dan harga permintaan $y \geq 2$ atau fungsi permintaan di atas dinyatakan: $P = Q^2 + 3Q + 2$ untuk $Q \geq 0$ dan $P \geq 2$.

3. Keseimbangan Pasar

Diketahui fungsi permintaan dan fungsi penawaran sejenis barang adalah: FD: $y = x^2 - 7x + 12$ dan FS: $y = x^2 + 3x + 2$. Tentukan keseimbangan pasarnya dan gambarkan kurvanya.

Penyelesaian :

Pada keseimbangan pasar berlaku Qd = Qs atau Pd = Ps, sehingga keseimbangan pasar dapat diselesaikan dengan substitusi: $x^2 - 7x + 12 = x^2 + 3x + 2 \rightarrow 10x = 10 \rightarrow x = 1$ dan y dapat dicari dengan mensubstitusikan nilai x = 1 ke dalam fungsi permintaan atau fungsi penawaran, sehingga diperoleh nilai y sebagai $y = (1)^2 + 3(1) + 2 = 6$. Jadi keseimbangan pasar tercapai pada E(1,6).



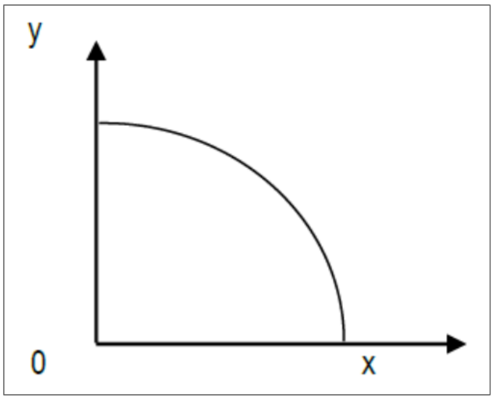
Gambar 27. Kurva Keseimbangan Pasar

4. Kurva Transformasi Produk atau Kurva Kemungkinan Produksi

- Kurva transformasi produk menunjukkan bagaimana suatu perusahaan berdasarkan proses produksinya menetapkan kombinasi jumlah setiap jenis barang yang dihasilkannya, sesuai dengan sumber daya (kapital, tenaga kerja, bahan baku, energi, manajemen, teknologi, dan sebagainya) yang dimilikinya.

- Jika suatu perusahaan memproduksi dua jenis barang, misalnya x dan y, dengan menggunakan bahan baku dan tenaga kerja tertentu, maka hubungan kuantitas atau kombinasi kuantitas kedua jenis barang tersebut akan membentuk kurva transformasi produk atau disebut juga sebagai kurva kemungkinan produksi (production possibility curve).

- Hubungan x dan y atau kombinasi x dan y yang diproduksi digambarkan sebagai curve cembung (concave curve), yaitu curve yang terbuka ke bawah mengarah ke titik origin (titik 0).

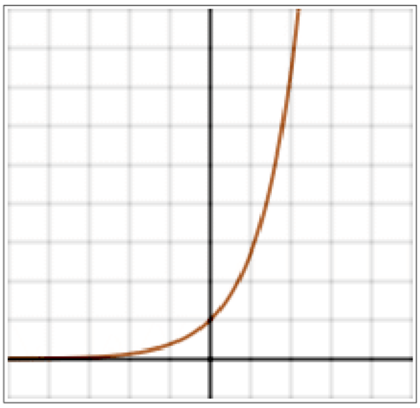


Gambar 28. Kurva Transformasi Produk

- Berdasarkan kurva tersebut tampak bahwa jika jumlah produksi x ditambah, maka jumlah produksi y akan berkurang, demikian sebaliknya.

E. FUNGSI EKSPONENSIAL DAN LOGARITMA

1. Fungsi Eksponensial



Gambar 29. Kurva Eksponensial

Fungsi eksponensial adalah salah satu fungsi yang paling penting dalam matematika. Biasanya, fungsi ini ditulis dengan notasi exp(x) atau ex, di mana e adalah basis logaritma natural yang kira-kira sama dengan 2.7182818. Sebagai fungsi variabel bilangan real x, grafik ex selalu positif (berada di atas sumbu x) dan nilainya bertambah (dilihat dari kiri ke kanan). Grafiknya tidak menyentuh sumbu x, namun mendekati sumbu tersebut secara asimptotik. Invers dari fungsi ini, logaritma natural, atau ln(x), didefinisikan untuk nilai x yang positif. Fungsi Eksponensial mempunyai rumus umum, yakni:

$$\boxed{\mathbf{y = a^x \text{ dengan } a \geq 0 \text{ dan } a \neq 0}}$$

Contoh :

$f(x) = 2^x$

$g(x) = 3^x$

$h(x) = 16^x$

Berdasarkan contoh di atas, dapat diketahui bahwa konstantanya (2, 3, dan 16) dipangkatkan oleh variabel bebasnya (x). Jadi dapat kita simpulkan bahwa fungsi eksponen merupakan fungsi yang konstantanya dipangkatkan dengan variabel-variabel bebasnya. Fungsi eksponen merupakan fungsi non aljabar, adapun invers dari fungsi eksponen adalah fungsi logaritma.

Contoh :

$y = f(x) = 2^x$ (Fungsi eksponen)

$y = f(x) = 1{,}5^x$ (Fungsi eksponen)

$y = f(x) = x^x$ (Bukan fungsi eksponen)

$y = f(x) = e^x$ (Fungsi eksponen)

$y = f(x) = 1^x$ (Fungsi eksponen)

SIFAT-SIFAT EKSPONENSIAL

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (dalam bentuk perkalian, pangkat akan ditambah)
- $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (dalam bentuk pembagian, pangkat akan dikurangi)
- $(a^m)^n = a^{m \times n}$ (jika ada di dalam bentuk kurungan, pangkat akan dikalikan)
- $(a \times b)^n = a^m \times b^m$ (bila ada dua bilangan di dalam kurungan, kemudian diberi pangkat, maka kedua bilangan tersebut akan memiliki pangkat yang sama)
- $(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^n}$ (penyebut tidak boleh sama dengan 0, dan dalam bentuk ini, penyebut dan pembilang akan memiliki pangkat)
- $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ (untuk sifat ini, bila penyebut bernilai positif dan kemudian dipindahkan ke atas, maka penyebut tersebut akan negatif. Begitu pun sebaliknya)
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$ (dalam bentuk akar seperti ini, bila disederhanakan n akan menjadi penyebut dan m akan menjadi pembilang. n harus lebih atau sama besar dengan 2)
- $a^0 = 1$ (a tidak boleh sama dengan 0)

2. Fungsi Logaritma

Fungsi Logaritma adalah pangkat dengan suatu basis tertentu harus dipangkatkan untuk mendapatkan bilangan tertentu. Perhatikan contoh fungsi logaritma berikut ini :

$y = {}^{a}\log x$

$y = {}^{e}\log x = \ln x$

Berdasarkan contoh di atas dapat diketahui bahwa variabel bebasnya adalah log x, adapun a dan e adalah basis/bilangan pokok, jadi dapat disimpulkan bahwa fungsi logaritma merupakan fungsi yang variabel bebasnya dalam bentuk log dan memiliki basis/bilangan pokok tertentu berupa bilangan a atau e. Jika basisnya merupakan bilangan a maka variabel bebasnya ditulis dengan log, sedangkan jika basisnya adalah bilangan e (eksponen) maka variabel bebasnya ditulis ln (len).

Berikut ini disajikan bentuk umum persamaan fungsi logaritma :

$$\boxed{y = {}^{a}\log x}$$

Atau

$$\boxed{y = e \log x = \ln x}$$

Keterangan :

y = variabel terikat

log x = varabel bebas

ln x = varabel bebas

a dan e = basis / bilangan pokok

Terdapat 2 jenis logaritma yaitu 1) logaritma biasa yang memiliki basis/ bilangan pokok a dan dilambangkan log, dan 2) logaritma alam yang memiliki basis/ bilangan pokok e dan dilambangkan ln.

Contoh :

y = ln 5x (logaritma alami)

y = 5 log ($x2$ + $5x-4$) (logaritma biasa)

Jika bilangan yang dicari logaritmanya adalah bersifat real dan positif maka dapat diterapkan rumus umum logaritma, yakni:

Perpangkatan	**Contoh Logaritma**
$2^1 = 2$	$^2\log 2 = 1$
$2^0 = 1$	$^2\log 1 = 0$
$2^3 = 8$	$^2\log 8 = 3$
$2^{-3} = 8$	$^2\log = -3$
$9^{3/4} = 3\sqrt{3}$	$^9\log 3\sqrt{3} = ¾$
$10^3 = 1000$	$\log 1000 = 3$

Tabel 1 Rumus Umum Logaritma

SIFAT-SIFAT LOGARITMA

- ${}^{a}\log a = 1$
- ${}^{a}\log 1 = 0$
- ${}^{a}\log a^n = n$
- ${}^{a}\log b^n = n \cdot {}^{a}\log b$
- ${}^{a}\log b \cdot c = {}^{a}\log b + {}^{a}\log c$
- ${}^{a}\log b/c = {}^{a}\log b - {}^{a}\log c$
- ${}^{a^n}\log b\ m = m/n \cdot {}^{a}\log b$
- ${}^{a}\log b = 1 \div {}^{b}\log a$
- ${}^{a}\log b \cdot {}^{b}\log c \cdot {}^{c}\log d = {}^{a}\log d$
- ${}^{a}\log b = {}^{c}\log b \div {}^{c}\log a$

G. APLIKASI FUNGSI EKSPONEN DAN LOGARITMA DALAM EKONOMI

1. Menghitung Bunga Majemuk

Bunga majemuk adalah bunga yang nilainya selalu berubah di setiap periode. Bunga majemuk ini bisa diterapkan pada pinjaman maupun investasi. Praktik bunga seperti ini sudah lazim dilakukan di dunia investasi maupun perbankan. Perhitungan seperti ini menunjukkan adanya pola eksponensial. untuk menghitungnya menggunakan rumus:

$$\boxed{\mathbf{S = P(1 + i)^{t}}}$$

Keterangan :

S = bunga majemuk

P = nilai awal / saat ini

i = suku bunga

t = waktu

Pada saat suku bunga yang diabayarkan sebanyak n-kali dalam setahun, maka untuk menghitungnya menggunakan rumus:

$$\boxed{\mathbf{S = P\left[1 + \left(\frac{t}{n}\right)\right]^{nt}}}$$

Keterangan :

S = Nilai yang akan datang

P = Nilai awal / saat ini

i = Suku bunga

t = Waktu

n = Banyak kali pembayaran dalam setahun

Contoh :

Suatu modal diinvestasikan Rp10.000.000 dengan bunga 8% setiap tahunnya. Tentukan modal di akhir tahun ketiga jika modal awal diinvestasikan dengan bunga majemuk!

Pembahasan:

P = Rp10.000.000

i = 8%/tahun = 0,08/tahun

t = 3 tahun

$\mathbf{S = P(1 + i)^t}$

$S = 10.000(1 + 0{,}8)^3$

$S = 12.597.120$

Jadi, besar modal di akhir tahun ketiga menjadi Rp12.597.120.

2. Menghitung Pertumbuhan Penduduk

Fungsi eksponensial juga digunakan untuk mengukur pertumbuhan penduduk dan pertumbuhan perusahaan yang dimulai dari awal waktu hingga batas waktu tertentu. Dalam menghitung Pertumbuhan penduduk dapat dirumuskan:

$$\boxed{\mathbf{N = N_o(1 + r)^t}}$$

Keterangan :

N = Jumlah total jiwa pada periode t

N_0 = Jumlah penduduk jiwa pada periode awal

1+ r = Tingkat Pertumbuhan Penduduk

t = Periode Waktu

Contoh:

Banyak penduduk kota A setiap tahun meningkat 2% secara eksponensial dari tahun sebelumnya. Tahun 2013 penduduk di kota A sebanyak 150.000 orang. Hitung banyak penduduk pada tahun 2014 dan 2023!

Penyelesaian:

N_0 = 150.000

r = 2% = 0,02

Banyak penduduk pada tahun 2014 (t=2014-2013=1):

$$\mathbf{N = N_o(1 + r)^t}$$

$$\mathrm{N} = 150.000(1 + 0{,}02)$$

$$\mathrm{N} = 153.000 \text{ orang}$$

Banyak penduduk pada tahun 2023 (t=2023-2013=10):

$$\mathbf{N = N_o(1 + r)^t}$$

$$\mathrm{N} = 150.000(1 + 0{,}02)^{10}$$

$$\mathrm{N} = 182.849{,}163 \approx 183 \text{ orang}$$

3. Grafik Gompertz

Selain menggunakan rumus diatas adapula cara lain yang dikenal dengan grafik gompertz. Cara ini banyak digunakan oleh psikolog untuk menggambarkan pertumbuhan dan perkembangan manusia dan organisasi atau dalam menentukan jenis pendidikan dan SDM Karyawan. Grafik Gompertz dapat dirumuskan:

$$\boxed{\mathbf{N = C.\,a^{R^{t}}}}$$

Keterangan :

N = Banyaknya Jiwa

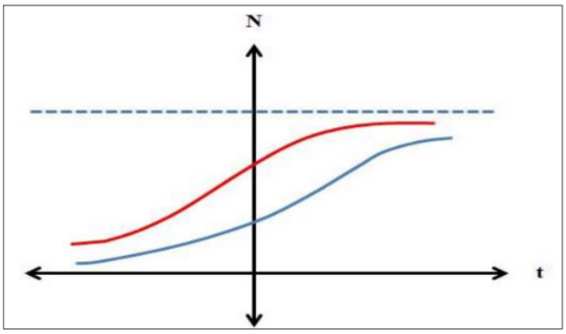
C = Tingkat pertumbuhan penduduk

a = Proposi pertumbuhan awal

R = Tingkat pertumbuhan penduduk

t = Periode waktu

Bentuk dari grafik gompertz dapat dilihat pada gambar berikut ini :



Gambar 30. Grafik Gompertz

Kurva yang berwarna merah (atas), merupakan kurva gompertz yang memiliki nilai a > 0, dan kurva berwarna biru (bawah) merupakan kurva gompertz yang memilik nilai a < 1.

Contoh :

Penjualan setiap bulan dari sebuah perusahaan memenuhi fungsi $S = 1000(0{,}10)^{0{,}40R}$. p adalah jumlah pengeluaran untuk promosi dan advertensi. S adalah penjumlahan atau omzet setiap bulan.

a. Berapa besar penjualan bila pengeluaran untuk promosi dan advertensi sama dengan nol atau berapa besar penjualan awalnya?

b. Berapa penjualan maksimumnya?

Pembahasan :

a. Jika p = 0 (t = 0) maka S adalah :

$\mathbf{S = C.a^{R^t}}$

$S = 1000(0{,}10)^{0{,}40^t}$

$S = 1000(0{,}10)^{0{,}40^0}$

$S = 1000(0{,}10)^1$

$S = 100$

Maka, Penjualan awal adalah 100

b. Penjualan maksimum terjadi saat tingkat pertumbuhan adalah nol, R = 0

$S = 1000(0{,}10)^{0^t}$

S=1000(1)

S=1000

Maka, penjualan maksimum adalah 1000

4. Menghitung Prilaku Biaya

Prilaku Biaya dapat dinyatakan dalam persamaan berikut ini :

$$\boxed{\mathbf{C = C_m - C_{s.e^{-rq}}}}$$

Keterangan :

C = Biaya total persatuan waktu.

C_m = Biaya maksimum yang diperkenankan (anggaran yang disediakan) persatuan waktu.

C_s = Sisa anggaran pada permulaan periode (pada t = 0).

q = kuantitas

r = Persentase kenaikan biaya persatuan waktu

Contoh :

Biaya produksi total (dalam jutaan rupiah) dari sebuah perusahaan dapat dinyatakan pada persamaan $C = 100 - 50\ e^{-0{,}02\ q}$, C menyatakan biaya produksi dan q menyatakan kuantitas produksi. Berapa besar biaya tetapnya ?

Penyelesaian :

Biaya tetap maka q = 0, maka C adalah :

$C = 100 - 50.\ e^{-0{,}02(0)}$

$C = 100 - 50\ .\ e^{o}$

$C = 100 - 50.\ 1$

$C = 50$

Maka, biaya tetapnya (maksudnya jika tidak berproduksi atau jika q = 0) = 50 juta rupiah.

EVALUASI

1. ***Jawablah pertanyaan dibawah ini dengan memilih jawaban yang paling tepat dari a, b, c, d atau d!***

1. Biaya total yang dikeluarkan oleh sebuah perusahaan ditunjukkan oleh persamaan $C = 2Q^2 - 24 Q + 102$. Pada tingkat produksi berapa unit biaya total ini minimum? Hitunglah besarnya biaya total minimum tersebut. Hitung pula besarnya biaya tetap, biaya variable, biaya rata rata, biaya tetap rata-rata dan biaya variable rata-rata pada tingkat produksi tadi. Seandainya dari kedudukan ini produksi dinaikkan dengan 1 unit, berapa besarnya biaya marjinaldan narasikan dalam terapan ekonominya.

   A. 5
   B. 2
   C. 3
   D. 7

2. Seorang pedagang kecil tidak bekerja, ia harus mengeluarkan Rp30.000,00 untuk kebutuhan sebulan. Setelah bekerja dengan penghasilan Rp100.000,00, ia bisa menabung Rp10.000,00. Berdasarkan data tersebut fungsi konsumsinya yaitu dan narasikan dalam terapan ekonominya.

   A. C = 10.000 + 0,6Y
   B. C = 30.000 + 0,6Y
   C. C = 90.000 + 0,6Y
   D. C = 100.000 + 0,6Y
   E. C = 140.000 + 0,6Y

3. Terdapat sebuah perusahaan PT. Murni mengeluarkan biaya sebanyak Rp. 400 juta untuk menghasilkan 1000 unit meja. Pada saat jumlah produksi sudah mencapai 2000 unit, maka perusahaan mengeluarkan biaya sebesar Rp. 600 juta untuk memproduksinya.Berapakah jumlah biaya marginal pada produksi meja tersebutdan narasikandalamterapanekonominya.

   A. Rp100.000
   B. Rp75.000

C. Rp200.000

D. Rp150.000

E. Rp300.000

4. Jika perekonomian suatu masyarakat memiliki fungsi konsumsi C = 350 + 0,5Y dan fungsi investasinya adalah I = 100 + 1000r, maka tentukanlah keseimbangan di pasar barang perekonomian tersebutdan narasikandalamterapanekonominya.

   A. 900 – 2000r

   B. 900 – 1000r

   C. 500 – 2000r

   D. 1000 – 2000r

5. Diketahui fungsi permintaan dan penawaran sejenis barang adalah FD: 2Q + P − 10 =0 dan FS : P2 − 8Q − 4 = 0. Jika pemerintah membebankan pajak proporsional t =20%, maka berapa keseimbangan pasar sesudah pajakdan narasikan dalam terapan ekonominya.

   A. (2,12 dan 5,58)

   B. (2,12 dan 55,8)

   C. (22,1 dan 5,58)

   D. (2,21 dan 5,58)

   E. (2,21 dan 5,85)

6. Diketahui fungsi permintaan dan penawaran sejenis barang adalah FD: 2Q + P − 10 =0 dan FS : P2 − 8Q − 4 = 0. Jika pemerintah membebankan pajak proporsional t =20%, maka besarnya pajak per unit yang ditanggung masing-masing oleh konsumen dan narasikan dalam terapan ekonominya.

   A. 0,61

   B. 0,63

   C. 0,66

   D. 0,69

   E. 0,65

2. Selesaikan soal dibawah ini!

1. Fungsi permintaan yang dihadapi oleh seorang produsen monopolis ditunjukkan oleh P = 900 - 1,5Q. Bagaimana persamaan penerimaan totalnya.? Berapa besarnya penerimaan total jika terjual barang sebanyak 200 unit dan berapa harga jual perunit? Hitunglah penerimaan marjinal dari penjualan sebanyak 200 unit menjadi 250 unit. Tentukan tingkat penjualan yang menghasilkan penerimaan total maksimum dan besarnya penerimaan maksimum tersebut dan narasikan dalam terapan ekonominya.

2. Penerimaan total yang diperoleh sebuah perusahaan ditunjukkan oleh persamaan $R = -0,1Q^2 + 20Q$, sedangkan biaya total yang dikeluarkan $C = 0,25Q^3 - 3Q^2 + 7Q + 20$. Hitunglah profit perusahaan ini jika dihasilkan dan terjual barang sebanyak 10 dan 20 unitdan narasikan dalam terapan ekonominya.

3. Penerimaan total yang diperoleh suatu perusahaan ditunjukkan oleh fungsi $R = -0,1Q^2 + 300Q$, sedangkan biaya total yang dikeluarkannya $C = 0,3Q^2 - 720Q + 600.000$. Hitunglah dan narasikan dalam terapan ekonominya.
   a. Tingkat produksi yang menghasilkan penerimaan total maksimum ?
   b. Tingkat produksi yang menunjukkan biaya total minimum ?
   c. Manakah yang lebih baik bagi perusahaan, berproduksi menguntungkan berproduksi pada tingkat produksi yang menghasilkan penerimaan total maksimum atau biaya total minimum ?

4. Biaya total dikeluarkan oleh sebuah perusahaan ditunjukkan oleh persamaan C=2Q2-24Q+102. Pada tingkat produksi berupa unit biaya total minimum? Hitunglah besarnya biaya tetap, biaya variable, biaya rata – rata, biaya tetap rata – rata dan biaya variable rata – rata pada tingkat produksi tadi. Seandainya dari kedudukan ini produksi dinaikkan dengan 1 unit, berapa besarnya biaya marjinal dan narasikan dalam terapan ekonominya.

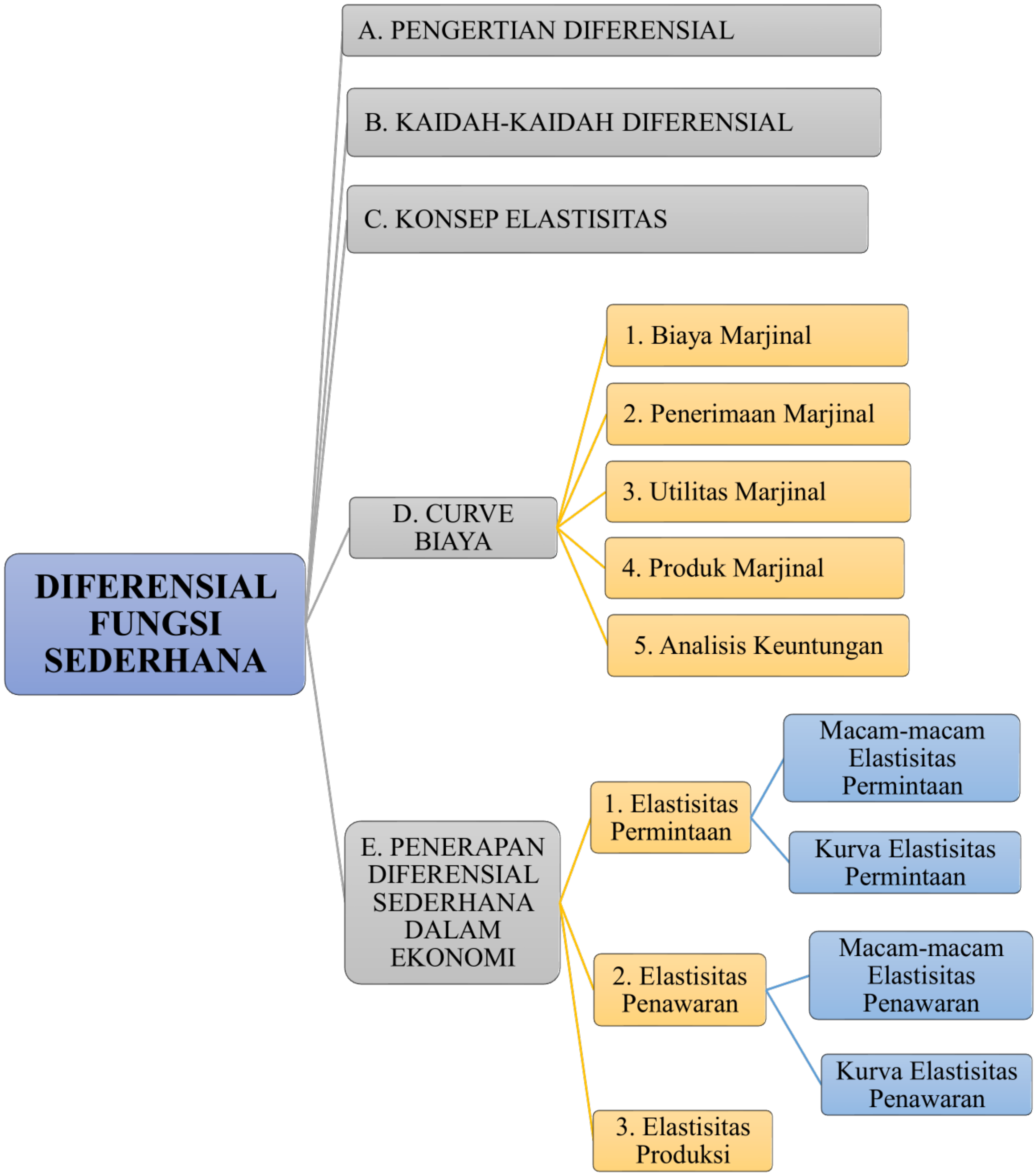
5. Suatu kota mengalami peningkatan jumlah penduduk 2% dari jumlah penduduk sebelumnya. Berdasarkan sensus penduduk tahun 2015, kota tersebut memiliki penduduk sebanyak 300.000. tentukan jumlah penduduk kota tersebut pada tahun 2016, 2017 dan narasikan dalam terapan ekonominya.

6. Fungsi permintaan yang dihadapi oleh seorang produsen monopolissi tunjukkan oleh P = 900 - 1,5Q. bagaimana persamaan penerimaan totalnya? Berapa besarnya?

7. Penerimaan total jika terjual barang sebanyak 200 unit, dan berapa harga jula per unit? Hitunglah penerimaan marjinal dari penjualan sebanyak 200 unit menjadi 250 unit. Tentukan tingkat penjualan yang menghasilkan penerimaan total maksimum, dan besarnya penerimaan maksimum tersebut dan narasikan dalam terapan ekonominya.

8. Biaya produksi total (dalam jutaan rupiah) dari sebuah perusahaan dapat dinyatakan pada persamaan $C = 100 - 50e-0,02q$, C menyatakan biaya produksi dan q menyatakan kuantitas produksi. Bila berproduksi 100 unit, berapa besar proporsi biaya produksi tetapnya terhadap biaya produksi totalnya dan narasikan dalam terapan ekonominya.

PETA KONSEP


DIFERENSIAL FUNGSI SEDERHANA
A. PENGERTIAN DIFERENSIAL
B. KAIDAH-KAIDAH DIFERENSIAL
C. KONSEP ELASTISITAS
D. CURVE BIAYA
1. Biaya Marjinal
2. Penerimaan Marjinal
3. Utilitas Marjinal
4. Produk Marjinal
5. Analisis Keuntungan
E. PENERAPAN DIFERENSIAL SEDERHANA DALAM EKONOMI
1. Elastisitas Permintaan
Macam-macam Elastisitas Permintaan
Kurva Elastisitas Permintaan
2. Elastisitas Penawaran
Macam-macam Elastisitas Penawaran
Kurva Elastisitas Penawaran
3. Elastisitas Produksi

BAB VIII

DIFERENSIAL FUNGSI SEDERHANA

RENE DESCARTES (1596 – 1650)

René Descartes (IPA: ʀəˈne deˈkaʀt; 31 Maret 1596 – 11 Februari 1650), juga dikenal sebagai **Renatus Cartesius** dalam literatur berbahasa Latin, merupakan seorang filsuf dan matematikawan Prancis. Karyanya yang terpenting ialah *Discours de la méthode* (1637) dan *Meditationes de prima Philosophia* (1641).

Descartes, kadang dipanggil "Penemu Filsafat Modern" dan "Bapak Matematika Modern", adalah salah satu pemikir paling penting dan berpengaruh dalam sejarah barat modern. Dia menginspirasi generasi filsuf kontemporer dan setelahnya, membawa mereka untuk membentuk apa yang sekarang kita kenal sebagai rasionalisme kontinental, sebuah posisi filosofikal pada Eropa abad ke-17 dan 18.

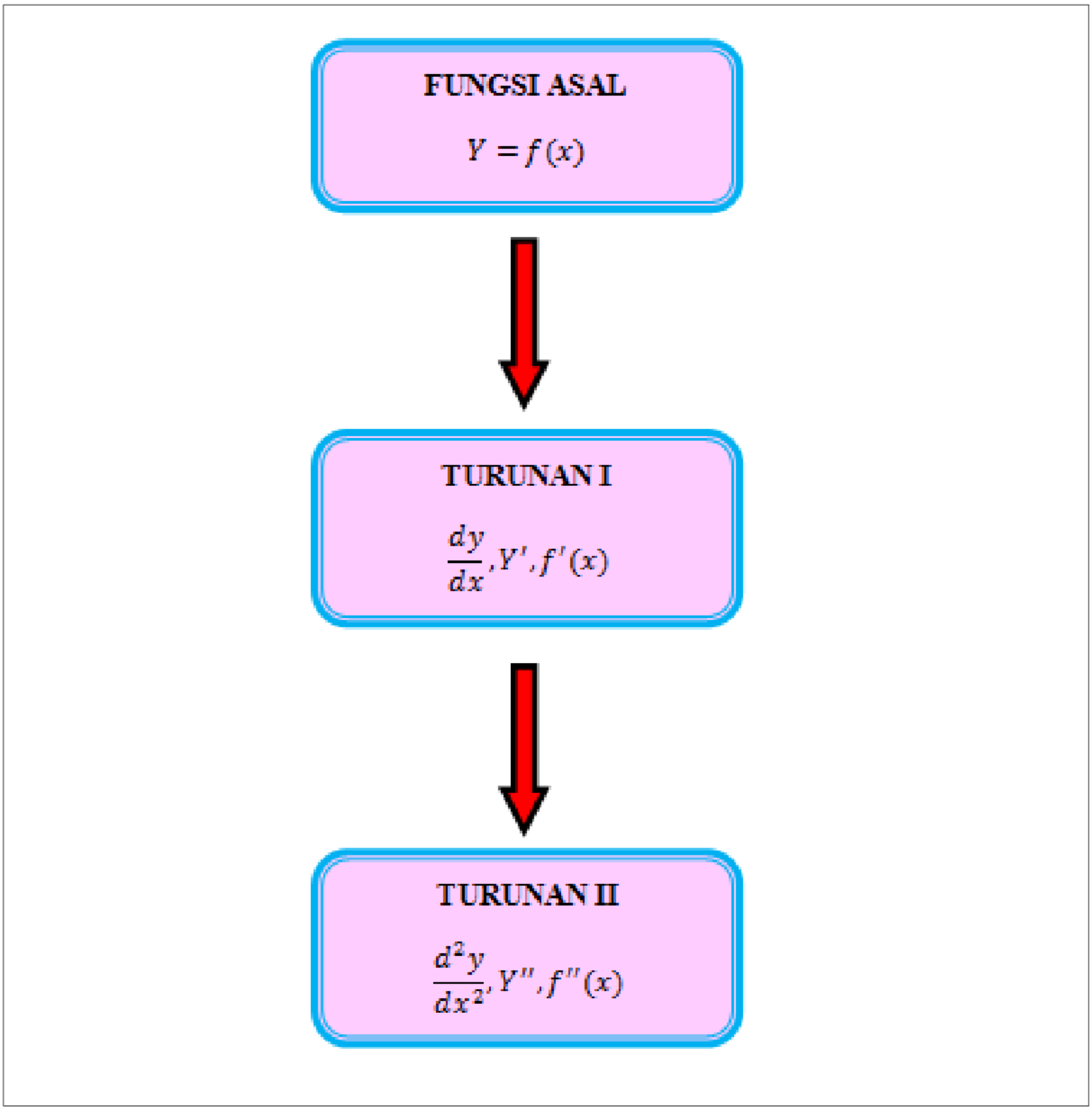
Pemikirannya membuat sebuah revolusi falsafi di Eropa karena pendakatan pemikirannya bahwa semuanya tidak ada yang pasti, kecuali kenyataan bahwa seseorang bisa berpikir. Ini juga membuktikan keterbatasan manusia dalam berpikir dan mengakui sesuatu yang di luar kemampuan pemikiran manusia

Meski paling dikenal karena karya-karya filosofinya, dia juga telah terkenal sebagai pencipta sistem koordinat Kartesius, yang memengaruhi perkembangan kalkulus modern.

A. PENGERTIAN DIFERENSIAL

Diferensial adalah tingkat perubahan suatu fungsi atas adanya perubahan variabel bebas dari fungsi tersebut. Diferensial dapat diartikan sebagai tingkat perubahan dari setiap variabjel y sebagai tanggapan terhadap suatu perubahan dalam variabel x.

Skema diferensial (turunan) fungsi adalah sebagai berikut :



Bagan 1. Skema Diferensial

B. KAIDAH-KAIDAH DIFERENSIAL

1) Diferensial dari Fungsi Konstan/Konstanta

$$\boldsymbol{Y = k}$$

dengan k = konstanta, maka $\mathbf{\frac{dy}{dx} = 0}$

Contoh : $Y = 12$ maka $\frac{dy}{dx} = 0$

$Y = 189$ maka $\frac{dy}{dx} = 0$

2) Diferensial Fungsi x berpangkat n

$$\boldsymbol{Y = x^n}$$

dengan n = sembarang bilangan, maka $\mathbf{\frac{dy}{dx} = n\,.\,x^{n-1}}$

Contoh : $Y = x^5$ maka $\frac{dy}{dx} = 5x^4$

$Y = x^{-12}$ maka $\frac{dy}{dx} = -12x^{-13}$

3) Diferensial Perkalian Fungsi dengan Koefisien a

$$\boldsymbol{Y = a.x^n}$$

maka $\frac{dy}{dx} = \mathbf{an\,.\,x^{n-1}}$

Contoh : $Y = 2x^5$ maka $\frac{dy}{dx} = 10x^4$

$Y = -5x^{-12}$ maka $\frac{dy}{dx} = 60x^{-13}$

4) Aturan Penjumlahan dan Pengurangan beberapa Fungsi dalam Turunan

$$\boldsymbol{Y = U \pm V \pm W}$$

dengan $U = f(x); V = f(x); W = f(x)$, maka $\mathbf{\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx}}$

Contoh: $Y = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 16$ maka $\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 8x + 5$

$Y = -10x^3 + 15x^2 + 45$ maka $\frac{dy}{dx} = -30x^2 + 30x$

5) Aturan Perkalian 2 Fungsi dalam Turunan

$$\boldsymbol{Y = U.V}$$

dengan $\mathrm{U = f(x); V = f(x), maka}\ \mathbf{\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}.V + \frac{dv}{dx}.U}$

Contoh : $Y = (x^3 - 4)(4x^2 + 5)$

$$U = (x^3 - 4) \qquad V = (4x^2 + 5)$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 \qquad \frac{dv}{dx} = 8x$$

$$\mathbf{\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}.V + \frac{dv}{dx}.U}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 . (4x^2 + 5) + 8x. (x^3 - 4)$$

$$\frac{dy}{dx} = 12x^4 + 15x^2 + 8x^4 - 32x$$

$$\frac{dy}{dx} = 20x^4 + 15x^2 - 32x$$

6) Aturan Pembagian 2 Fungsi dalam Turunan

$$\boldsymbol{Y = \frac{U}{V}}$$

dengan $\mathrm{U = f(x); V = f(x), maka}\ \mathbf{\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}.V - \frac{dv}{dx}.U}{V^2}}$

$$\text{Contoh}: \ Y = \frac{(x^3 - 4)}{(4x^2 + 5)}$$

$$U = (x^3 - 4) \qquad V = (4x^2 + 5)$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 \qquad \frac{dv}{dx} = 8x$$

$$\mathbf{\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}.V - \frac{dv}{dx}.U}{V^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 . (4x^2 + 5) - 8x. (x^3 - 4)}{(4x^2 + 5)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12x^4 + 15x^2 - 8x^4 - 32x}{16x^4 + 40x^2 + 25}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{20x^4 + 15x^2 - 32x}{16x^4 + 40x^2 + 25}$$

7) Aturan Rantai dalam Turunan

$$\boldsymbol{Y = U^n}$$

dengan $U = f(x)$, maka $\mathbf{\frac{dy}{dx} = n \cdot \frac{du}{dx}\, U^{n-1}}$

Contoh : Y= $(x^3 + x)^3$

$$\mathbf{\frac{dy}{dx} = n \cdot \frac{du}{dx}\, U^{n-1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3 \,.\, (3x^2 + 1).(x^3 + x)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 18x^8 + 21x^6 + 15x^4 + 3x^2$$

8) Diferensial Perkalian Konstanta Dengan Fungsi

$$\boldsymbol{Y = kV}$$

dengan k adalah konstanta dan $V = f(x)$, maka $\mathbf{\frac{dy}{dx} = k \cdot \frac{dv}{dx}}$

Contoh : Y= $2(x^3 + 3)$

$$\mathbf{\frac{dy}{dx} = k \cdot \frac{dv}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2.3x$$

$$\frac{dy}{dx} = 6x$$

9) Diferensial Fungsi Komposit

$$\boldsymbol{Y = f(g(x))}$$

dengan $y = f(u)$ sedangkan $u = g(x)$adalak konstanta dan $V = f(x)$,

maka $\mathbf{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$

Contoh : $y = (4x^3 + 5)^2$

$$\text{misalkan } u = 4x^3 + 5 \rightarrow \frac{du}{dx} = 12x^2$$

$$y = u^2 \rightarrow \frac{dy}{du} = 2u$$

$$\text{maka } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= 2u \times 12x^2$$

$$= 2\,(4x^3 + 5) \times 12x^2$$

$$= 96\,x^5 + 120\,x^2$$

10) Diferensial Fungsi Komposit Logaritmatik

$$\boxed{\mathbf{Y = {}^{a}\log U}}$$

$$\text{dengan } U = g(x) \text{ maka } \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = {}^{a}\mathbf{\log}\ \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{u}} \cdot \frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{dx}}$$

$$\text{Contoh}: \; y = \log \frac{(x+5)}{(x+7)}$$

$$\text{maka dalam soal ini } U = \frac{x+5}{x+7}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{(x+7)(1) - (x+5)(1)}{(x+7)^2} = \frac{2}{(x+7)^2}$$

$$\text{Sehingga } \frac{dy}{dx} = \log \frac{e}{(x+5)(x+7)} \cdot \frac{2}{(x+7)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\log \frac{e}{(x+5)(x+7)}$$

11) Diferensial Fungsi Komposit Logaritmatik Berpangkat

$$\boxed{\mathbf{Y = (\,{}^{a}\log U\,)^{n}}}$$

dengan $U = g(x)$ dan n adalah konstanta,

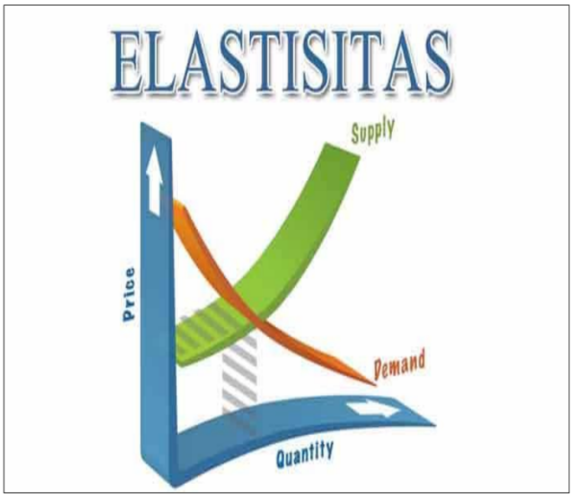
$$\text{maka } \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = \mathbf{n}({}^{\mathbf{a}}\,\mathbf{\log U}\,)^{\mathbf{n-1}} . \;{}^{\mathbf{a}}\mathbf{\log}\ \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{u}} \cdot \frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{dx}}$$

$$\text{Contoh}: \; y = (\log 6x^2)^3$$

$$U = 6x^2; \text{ maka } \frac{du}{dx} = 12x$$

$$\frac{dy}{dx} = 3\,(\log 6x^2)^2.\log e/6x^2\ (12x)$$
$$= 36x\,(\log 6x^2)^2 \log e/6x^2$$
$$= 6\ (\log 6x^2)^2\ \ \log e/x$$

C. KONSEP ELASTISITAS



Gambar 31. Konsep Elastisitas

Elastisitas merupakan pengaruh perubahan harga terhadap jumlah barang yang diminta atau yang ditawarkan. Secara sederhana, elastisitas adalah tingkat kepekaan (perubahan) suatu gejala ekonomi terhadap perubahan gejala ekonomi yang lain. Konsep elatisitas digunakan untuk mengukur besar reaksi konsumen terhadap perubahan harga.

Selain itu, elastisitas juga digunakan untuk meramalkan apa yang akan terjadi jika harga barang atau jasa dinaikkan. Elastisitas terbagi dalam tiga macam, yaitu sebagai berikut.

1. Elastisitas harga (price elasticity) yaitu persentase perubahan jumlah barang yang diminta atau yang ditawarkan, yang disebabkan oleh persentase perubahan harga barang tersebut.
2. Elastisitas silang (cross elasticity) adalah persentase perubahan jumlah barang x yang diminta, yang disebabkan oleh persentase perubahan harga barang lain (y).
3. Elastisitas pendapatan (income elasticity) yaitu persentase perubahan permintaan akan suatu barang yang diakibatkan oleh persentase perubahan pendapatan riil konsumen.

Elastisitas merupakan salah satu konsep penting untuk memahami beragam permasalahan di bidang ekonomi. Konsep elastisitas sering dipakai sebagai dasar analisis ekonomi, seperti dalam menganalisis permintaan, penawaran, penerimaan pajak, maupun distribusi kemakmuran. Dalam bidang perekonomian daerah, konsep elastisitas dapat digunakan untuk memahami dampak dari suatu kebijakan. Selain itu, konsep elastisitas dapat digunakan untuk menganalisis dampak kenaikan pendapatan daerah terhadap pengeluaran daerah atau jenis pengeluaran daerah tertentu. Dengan kegunaannya tersebut, alat analisis ini dapat membantu pengambil kebijakan dalam memutuskan prioritas dan alternatif kebijakan yang memberikan manfaat terbesar bagi kemajuan daerah.

Contoh : Pemerintah Daerah dapat mengetahui dampak kenaikan pajak atau susidi terhadap pendapatan daerah, tingkat pelayanan masyarakat, kesejahteraan penduduk, pertumbuhan ekonomi, pertumbuhan investasi, dan indikator ekonomi lainnya dengan menggunakan pendekatan elastisitas.

Elastisitas dari suatu fungsi y = f(x) berkenaan dengan x dapat didefinisikan sebagai:

$$\eta = \frac{Ey}{Ex} = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{(\Delta y/y)}{(\Delta x/x)} = \frac{dy}{dx} . \frac{x}{y} \qquad \text{(tanda "η" dibaca "eta")}$$

Hal ini berarti bahwa elastisitas y = f(x) merupakan limit dari rasio antara perubahan relatif dalam y terhadap perubahan relatif dalam x, untuk perubahan x yang sangat kecil atau mendekati nol. Dengan terminologi lain, elastisitas y terhadap x dapat dikatakan sebagai rasio antara persentase perubahan y terhadap persentase perubahan x

D. Curve Biaya

Dalam ilmu ekonomi , kurva biaya adalah grafik biaya produksi sebagai fungsi dari jumlah total yang diproduksi. Dalam ekonomi pasar bebas, perusahaan yang efisien secara produktif mengoptimalkan proses produksi mereka dengan meminimalkan biaya yang konsisten dengan setiap tingkat produksi yang mungkin, dan hasilnya adalah kurva biaya. Perusahaan yang memaksimalkan keuntungan menggunakan kurva biaya untuk menentukan jumlah output. Ada berbagai jenis kurva biaya, semuanya terkait satu sama lain, termasuk kurva biaya total dan rata-rata; kurva biaya, yang sama dengan diferensial dari kurva biaya total; dan kurva biaya variabel. Beberapa berlaku untuk jangka pendek, yang lain untuk jangka panjang .

1. Biaya Marjinal

Biaya marjinal (Marginal Cost, MC) ialah biaya tambahan yang dikeluarkan untuk menghasilkan satu unit tambahan produk. Secara matematik, fungsi biaya marjinal merupakan derivatif pertama dari fungsi biaya total. Jika fungsi biaya total dinyatakan dengan C = f(Q) di mana C adalah biaya total dan Q melambangkan jumlah produk, maka biaya marjinalnya:

$$\boxed{\mathrm{MC} = \mathrm{C}' = \frac{\mathrm{dC}}{\mathrm{dQ}}}$$

Keterangan :

MC = Biaya Marjinal

C = Biaya Total

Q = Jumlah Produk

Contoh :

Biaya total : $C = f(Q) = Q^3 - 3Q^2 + 4Q + 4$

Biaya marjinal : $\mathrm{MC} = \mathrm{C}' = \frac{\mathrm{dC}}{\mathrm{dQ}}$

$$= 3Q^2 - 6Q + 4$$

Pada umumnya fungsi biaya total yang non-linear berbentuk fungsi kubik, sehingga fungsi biaya marjinalnya berbentuk fungsi kuadrat. Dalam hal demikian, kurva biaya marjinal (MC) selalu mencapai minimumnya tepat pada saat kurva biaya total (C) berada pada posisi titik beloknya.

$C = Q^3 – 3Q^2 + 4Q + 4$

$MC = C' = 3Q^2 – 6Q + 4$

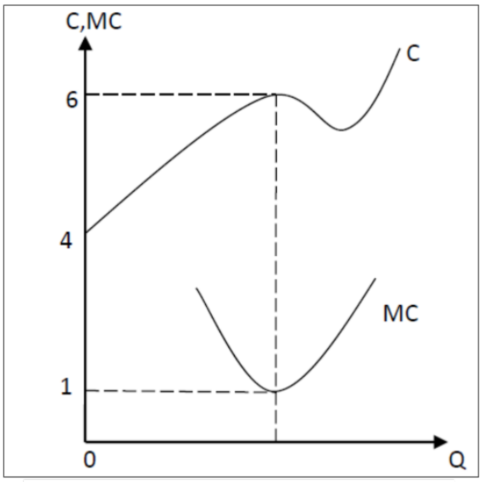
$(MC)' = C'' = 6Q – 6$

MC minimum jika $(MC)' = 0$

$(MC)' = 6Q – 6 = 0$ maka $Q = 1$

Pada $Q = 1$ maka $MC = 3(1)2 – 6(1) + 4 = 1$

$C = 13 – 3 (1)2 + 4(1) + 4 = 6$



Gambar 32. Grafik fungsi $MC = 3Q^2 – 6Q + 4$ dan $C = Q^3 – 3Q^2 + 4Q + 4$

2. Penerimaan Marjinal

Penerimaan marjinal (Marginal Revenue, MR) ialah penerimaan tambahan yang diperoleh berkenaan dengan bertambahnya satu unit keluaran yang diproduksi atau terjual. Secara matematik, fungsi penerimaan marjinal merupakan derivatif pertama dari fungsi penerimaan total. Jika fungsi penerimaan total dinyatakan dengan $R = f(Q)$ di mana R melambangkan penerimaan total dan Q adalah jumlah keluaran, maka penerimaan marjinalnya:

$$\boxed{MR = R' = \frac{dR}{dQ}}$$

Keterangan :

MR = Penerimaan Marjinal

R = Penerimaan Total

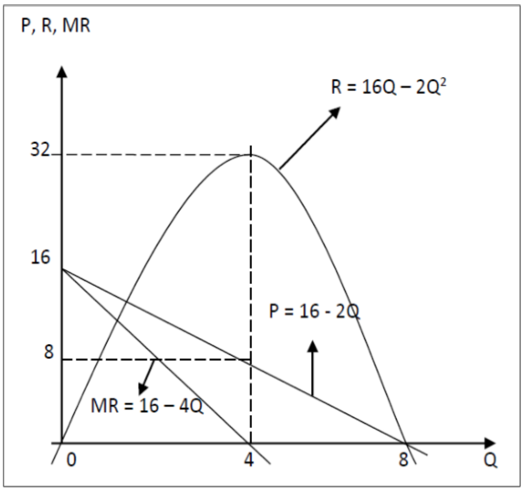
Q = Jumlah Produk Keluaran

Berdasarkan fungsi penerimaan total yang non-linear pada umumnya berbentuk fungsi kuadrat (parabolik), maka fungsi permintaan marjinalnya akan berbentuk fungsi linear. Kurva penerimaan marjinal (MR) selalu mencapai nol tepat pada saat kurva penerimaan total (R) berada pada posisi puncaknya.

Contoh :

Andaikan fungsi permintaan akan suatu barang ditunjukkan oleh P = 16 - 2Q. Tentukan besarnya penerimaan total maksimum!

Penyelesaian :



Gambar 33. Grafik Fungsi MR = 16 – 4Q

Penerimaan total:

$R = P.Q = f(Q) = 16Q - 2Q^2$

Penerimaan marjinal:

$MR = R' = 16 - 4Q$

Pada MR = 0,

16 – 4Q = 0 diperoleh Q = 4

R = 16(4) – 2(4)2 = 32

3. Utilitas Marjinal

Utilitas marjinal (Marginal Utility, MU) ialah utilitas tambahan yang diperoleh konsumen berkenaan satu unit tambahan barang yang dikonsumsinya. Secara matematik, fungsi utilitas marjinal merupakan derivatif pertama dari fungsi utilitas total. Jika fungsi utilitas total dinyatakan dengan U = f(Q) di mana U melambangkan utilitas total dan Q adalah jumlah barang yang dikonsumsi, maka utilitas marjinalnya:

$$\boxed{\mathrm{MU} = \mathrm{U}' = \frac{\mathrm{dU}}{\mathrm{dQ}}}$$

Keterangan :

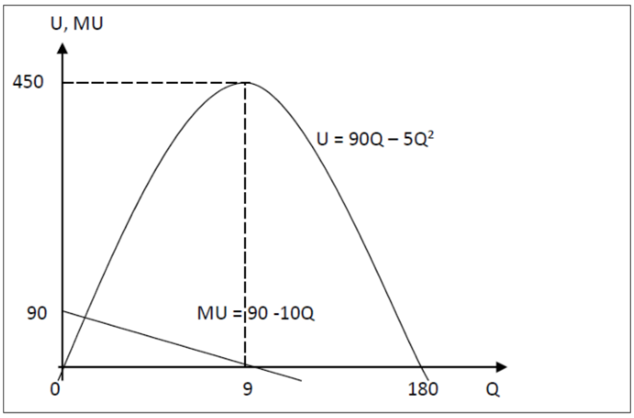
MU = Utilitas Marjinal

U = Utilitas Total

Q = Jumlah Barang yang dikonsumsi

Karena fungsi utilitas total yang non-linear pada umumnya berbentuk fungsi kuadrat, fungsi utilitas marjinalnya akan berbentuk fungsi linear. Kurva utilitas marjinalnya (MU) selalu mencapai nol tepat pada saat kurva utilitas total (U) berada pada posisi puncaknya.

Contoh :



Gambar 34. Grafik Fungsi MU=90-10Q dan U=90Q-5Q²

$U = f(Q) = 90Q – 5Q^2$

$MU = U' = 90 – 10Q$

U maksimum pada MU = 0

MU = 0 maka Q = 9

Umaks = 90(9) – 5(9)2= 405

4. Produk Marjinal

Produk marjinal (Marginal Product, MP) ialah produk tambahan yang dihasilkan dari satu unit tambahan faktor produksi yang digunakan. Secara matematik, fungsi produk marjinal merupakan derivatif pertama dari fungsi produk total. Jika fungsi produk total dinyatakan dengan P = f(X) di mana

$$MP = P' = \frac{dP}{dX}$$

P melambangkan jumlah produk total dan X adalah jumlah masukan, maka produk marjinalnya:

Keterangan :

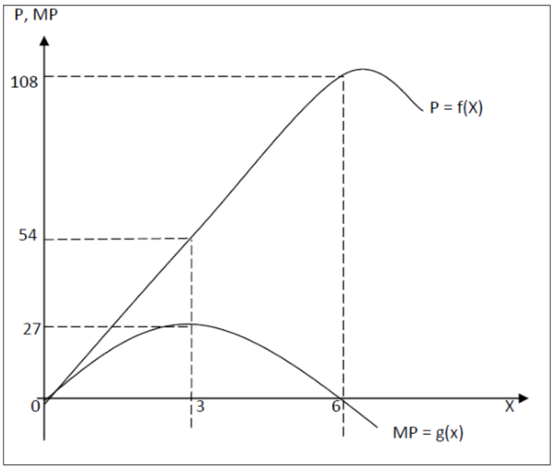
MP = Produk Marjinal

P = Produk Total

X = Jumlah Masukkan

Karena fungsi produk total yang non-linear pada umumnya berbentuk fungsi kubik, fungsi produk marjinalnya akan berbentuk fungsi kuadrat (parabolik). Kurva produk marjinal (MP) selalu mencapai nilai ekstrimnya, dalam hal ini nilai maksimum, tepat pada saat kurva produk total (P) berada pada posisi titik beloknya; kedudukan ini mencerminkan berlakunya hukum tambahan hasil yang semakin berkurang (the law of the diminishing return). Produk total mencapai puncaknya ketika produk marjinalnya nol. Sesudah kedudukan ini, produk total menurun bersamaan dengan produk marjinal menjadi negatif. Area di mana produk marjinal negatif menunjukkan bahwa penambahan pengguna masukkan yang bersangkutan justru akan mengurangi jumlah produk total, mengisyaratkan terjadinya disefisiensi dalam kegiatan produksi. Pada area ini, jika produk total hendak ditingkatkan, jumlah masukkan yang digunakan harus dikurangi.

Contoh :



Produksi total:

$P = f(X) = 9X^2 – X^3$

Produk Marjinal:

$MP = P' = 18X – 13X^2$

Pmaks: P' = 0; yakni pada X = 6, dengan Pmaks = 108.

P berada di titik belok dan MP maksimum pada P'' = (MP)' = 0; yakni pada X = 3.

5. Analisis Keuntungan/Laba Maksimum

Tingkat produksi yang memberikan keuntungan maksimum, atau menimbulkan kerugian maksimum, dapat diselidiki dengan pendekatan diferensial. Karena baik penerimaan total (R) maupun biaya total (C) sama-sama merupakan fungsi dari jumlah keluaran yang dihasilkan/terjual (Q), maka dari sini dapat dibentuk suatu fungsi baru yaitu fungsi keuntungan (π). Nilai ekstrim atau nilai optimum π dapat ditentukan dengan cara menetapkan derivatif pertamanya sama dengan nol.

$$R = r(Q), \qquad C = c(Q)$$

$$\pi = R - C = r(Q) - c(Q) = f(Q)$$

$$\pi \text{ optimum jika } \pi' = 0 \text{ maka } f'(Q) = d\pi/dQ = 0$$

$$\text{Karena } \pi = R - C \text{ Maka } \pi' = R' - C' = MR - MC$$

$$\text{berarti pada n optimum: } \pi' = 0 \text{ maka } MR - MC = 0$$

$$\text{sehingga } MR = MC$$

Keterangan :

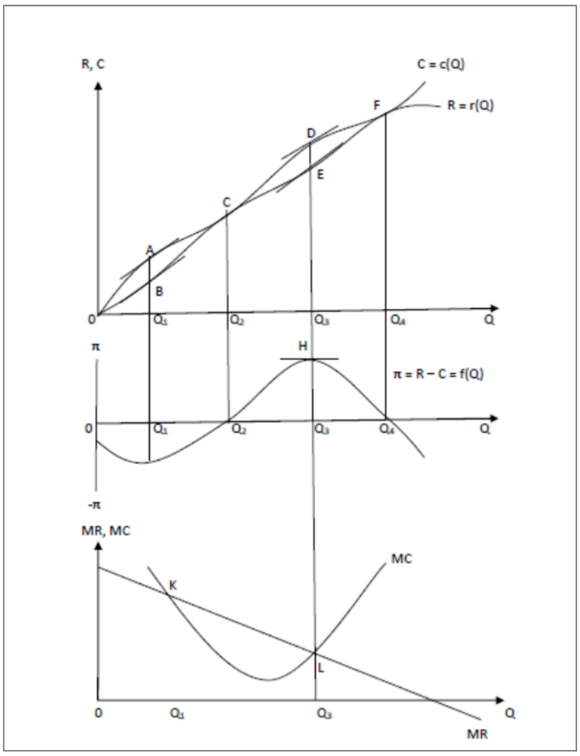
R = Penerimaan Total

C = Biaya Total

Q = Jumlah Keluaran

Secara grafik, kesamaan MR = MC atau kedudukan π' = 0 ditunjukkan oleh perpotongan antara kurva penerimaan marjinal (MR) dan kurva biaya marjinal (MC). Hal ini sekaligus mencerminkan jarak terlebar antara kurva penerimaan total (R) dan kurva biaya total (C). akan tetapi syarat MR = MC atau π' = 0 belumlah cukup untuk mengisyaratkan keuntungan maksimum, sebab jarak terlebar yang dicerminkan mungkin merupakan selisih positif “R-C”(berarti keuntungan) atau merupakan selisih negatif “R - C” (berarti kerugian).

Perhatikan gambar berikut ini :



Gambar 35. Fungsi Keuntugan

Untuk mengetahui apakah π' = 0 mencerminkan keuntungan maksimum atau justru kerugian maksimum, perlu diuji melalui derivatif kedua dari fungsi π.

$$\pi = R - C = f(Q)$$

Keterangan :

π optimum apabila π' = 0 atau MR = MC

Jika π" < 0 maka maksimum ≡ keuntungan maksimum

Jika π" > 0 maka minimum ≡ kerugian maksimum

Pada gambar sebelumnya terlihat ada dua keadaan di mana π' = 0 (MR = MC), yakni pada tingkat produksi Q1 dan Q3. Pada tingkat produksi Q1 jarak terlebar antara kurva penerimaan total (R) dan kurva biaya total (C) mencerminkan selisih negatif terbesar. Hal ini berarti terjadi kerugian maksimum, sebagaimana tercermin oleh kurva π yang mencapai minimumnya di titik G. Pada tingkat produksi Q3, jarak terlebar antara kurva R dan kurva C mencerminkan selisish positif terbesar. Hal ini berarti terjadi keuntungan maksimum, sebagaimana tercermin oleh kurva n yang mencapai maksimumnya di titik H.

Dengan demikian syarat agar diperoleh keuntungan maksimum adalah:

$\pi' = 0$ atau MR = MC
$\pi'' < 0$ atau (MR)' < (MC)'

Syarat pertama disebut syarat yang diperlukan (necessary condition), sedangkan syarat kedua disebut syarat yang mencukupkan (sufficient condition).

Contoh :

Andaikan:

$R = r(Q) = -2Q^2 + 1000Q$

$C = c(Q) = Q^3 - 59Q^2 + 1315Q + 2000$

Tentukan besarnya keuntungan maksimum!

Penyelesaian :

$\pi = R - C = -Q^3 + 57Q^2 - 315Q - 2000$

Agar keuntungan maksimum: $\pi' = 0$

$-3Q^2 + 114Q - 315 = 0$

$-Q^2 + 38Q - 105 = 0$

$(-Q + 3)(Q - 35) = 0$, diperoleh Q1 = 3 dan $Q_2 = 35$

$\pi'' = -6Q + 114$

Jika Q = 3, maka $\pi'' = -6(3) + 114 = 96 > 0$

Jika Q = 35 maka $\pi'' = -6(35) + 114 = -96 < 0$

Karena $\pi'' < 0$ untuk Q = 35, maka tingkat produksi yang menghasilkan keuntungan maksimal adalah Q = 35 unit. Adapun besarnya keuntungan maksimum tersebut:

$\pi = R - C = -Q^3 + 57Q^2 - 315Q - 2000$

$\pi = -(35)^3 + 57(35)^2 - 315(35) - 2000$

$\pi = 13.925$

Soal Pilihan Berganda

1. Fungsi permintaan ditunjukkan oleh P = 900 – 1,5Q dengan fungsi penerimaan totalnya $R = 900Q - 1,5Q^2$. Maka besarnya penerimaan total jika terjual 200 unit barang dan harga per unit adalah dan narasikan aplikasinya dalam ekonomi.

   a. Rp.179.700,00 dan Rp.600,00

b. Rp.120.000,00 dan Rp.600,00

c. Rp.600,00 dan Rp.300,00

d. Rp.120.000,00 dan Rp. 300,00

e. Rp.179.700,00 dan Rp.600,00

2. Andaikan seorang produsen monopolis menghadapi fungsi permintaan Q = 100 - 5P dan biaya totalnya C = 20 – 4Q + 0,1 Q2 . Pemerintah mengenakan pajak atas setiap unti barang yang dijual oleh penunggal dan menginginkan pajak total yang diterimanya maksimum. Di lain pihak, walaupun barang dagangannya dipajaki, produsen tetap menginginkan operasi bisnisnya menghasilkan keuntungan maksimum. Jadi, pajak per unit yang harus ditetapkan oleh pemerintah agar penerimaan pajaknya dan juga keuntungan produsen maksimum adalah dan narasikan aplikasinya dalam ekonomi.

a. Rp.10,00

b. Rp.11,00

c. Rp.12,00

d. Rp.13,00

e. Rp.14,00

4. Jika suatu fungsi Permintaan P = 1000-2Q dan fungsi biaya $C = Q^3 – 59Q^2 + 1315Q + 2000$. Maka produk yang harus diproduksi dan dijual sehingga dapat diperoleh laba yang maksimum adalah dan narasikan aplikasinya dalam ekonomi.

a. 3

b. 10

c. 20

d. 35

e. 50

5. Andaikan permintaan akan suatu barang ditunjukan oleh persamaan P = 15 – Q sedangkan penawarannya P = 3 + 0,5Q. pemerintah bermaksud mengenakan pajak spesifik sebesar t atas setiap unit barang yang dijual. Jika penerimaan pajak atas barang ini diinginkan maksimum, besarnya pajak per unit yang harus ditetapkan adalah dan narasikan aplikasinya dalam ekonomi.

a. Rp.2,00

b. Rp.3,00

c. Rp.4,00

d. Rp.5,00

e. Rp.6,00

6. Pak Made adalah pedagang sayuran. Harga sayur per kilogram di pasar Rp50.000,00. Pada harga tersebut, jumlah sayur yang terjual adalah 100 kg. Karena merasa peluangnya masih cukup besar, esoknya Pak Made menyediakan sayuran lebih banyak. Untuk menarik pembelinya, Pak Made menjual sayurannya dengan harga yang lebih rendah, yaitu Rp40.000,00. Dengan harga tersebut, sayuran yang terjual mencapai 200 kg. Dengan demikian tentukanlah dan narasikan aplikasinya dalam ekonomi.

1) Permintaan sayur yang dihadapi Pak Made sifatnya elastis.

2) Penerimaan Pak Made meningkat sebesar Rp 3.000.000,00.

3) Koefisien elastisitas harga permintaan adalah 5

4) Penawaran sayuran bersifat elastis

7. Pasar saat harga Rp. 5.000,00 per unit, jumlah barang yang ditawarkan 20 unit. Kemudian harga turun menjadi Rp. 4.500,00 perunit dan jumlah barang yang ditawarkan menjadi 10 unit. berdasarkan data tersebut besarnya koefisien elastisitas penawarannya adalah dan narasikan aplikasinya dalam ekonomi.

A. 1

B. 3

C. 5

D. 7

E. 9

8. Toko buku ”Maju Makmur” menjual buku tulis dengan harga Rp 2.000,00 perbuah, jumlah yang diminta 40 buah. Pada akhir bulan harga buku menjadi Rp1.000,00 per buah, jumlah yang diminta 35 buah. Berdasarkan perubahan permintaan di atas, maka sifat koefisien elastisitasnya adalah dan narasikan aplikasinya dalam ekonomi.

A. elastis

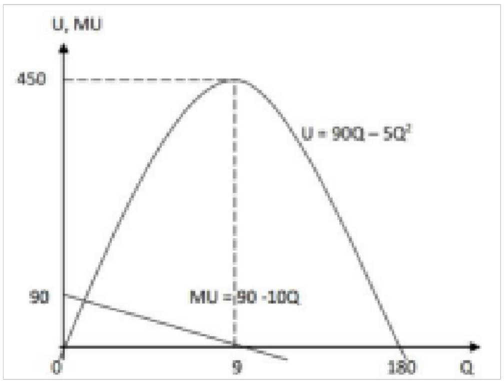
B. inelastis

C. uniter

D. inelastis sempurna

E. elastis sempurna

9. Jika fungsi utilitas total digambarkan pada 90Q – 5Q2 dengan Q adalah jumlah barang yang diproduksi, dan jika utilitas. marjinal adalah diferensial pertama fungsi utilitas, nilai fungsi utilitas maksimal yang mungkin ialah dan narasikan aplikasinya dalam ekonomi.



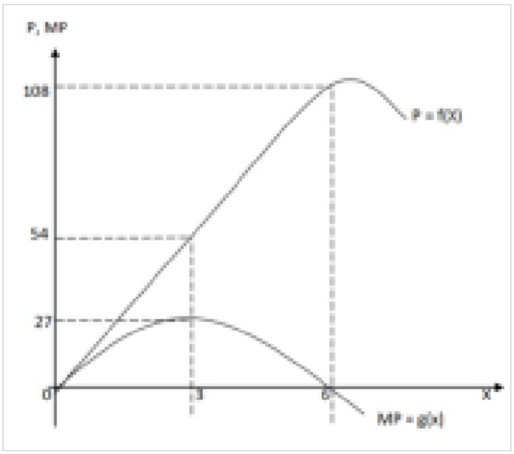
a. 400

b. 415

c.410

d.405

10. Jika harga P sebagai produk total ialah $9x^2 - x^3$, dengan produk marjinal (MP) ialah diferensial pertama produk total, maka nilai x pada saat P berada di titik belok dan MP maksimum adalah dan narasikan aplikasinya dalam ekonomi.



a. 3

b. 5

c. 6

d.4

Essay

1. Diketahui fungsi permintaan suatu produk adalah 2Q + P = 100. Berdasarkan fungsi tersebut carilah dan narasikan aplikasinya dalam ekonomi.
   a. Fungsi penerimaan total.
   b. Penerimaan Marjinal
   c. Berapa jumlah produk (Q) yang harus dijual agar penjual mendapatkan hasil penerimaan yang maksimal?

2. Jadi, keseimbangan tercapai saat harga Rp 3 per produk, dan output sebanyak 10 unit. 10. Fungsi permintaan suatu produk adalah Pd = 1000 – 2Q dan FC = 2000 biaya rata rata yang dikeluarkan perusahaan adalah AVC = Q^2 - 59Q +1315. Maka tentukan keuntungan maksimum yang diperoleh perusahaan dan narasikan aplikasinya dalam ekonomi.

3. Fungsi permintaan ditunjukkan oleh P = 900 – 1,5Q. Bagaimana fungsi penerimaan totalnya? Berapa besarnya penerimaan total jika terjual 200 unit barang dan hitung harga per unit? Hitung juga penerimaan marjinal jika penjualan bertambah 50 unit dan tentukan tingkat penjualan yang menghasikan penerimaan total maksimum dan berapa besarnya penerimaan total maksimum tersebut dan narasikan aplikasinya dalam ekonomi.

4. Andaikan permintaan akan suatu barang ditunjukan oleh persamaan P = 15 – Q sedangkan penawarannya P = 3 + 0,5Q. pemerintah bermaksud mengenakan pajak spesifik sebesar t atas setiap unit barang yang dijual. Jika penerimaan pajak atas barang ini diinginkan maksimum, berapa besarnnya pajak per unit yang harus ditetapkan? Berapa besar penerimaan pajak tersebut? Gambarkan kurva dan narasikan aplikasinya dalam ekonomi.

5. Fungsi produksi suatu barang ditunjukkan oleh persamaan P = 6x2–x^3. Hitunglah elastisitas produksinya pada tingkat penggunaan faktor produksi sebanyak 3 unit dan 7 unit dan narasikan aplikasinya dalam ekonomi.

6. Andaikan seorang produsen monopolis menghadapi fungsi permintaan Q = 100 - 5P dan biaya totalnya C = 20 – 4Q + 0,1 Q2 . Pemerintah mengenakan pajak atas setiap unti barang yang dijual oleh penunggal dan menginginkan pajak total yang diterimanya maksimum. Di lain pihak, walaupun barang dagangannya dipajaki,

produsen tetap menginginkan operasi bisnisnya menghasilkan keuntungan maksimum. Berapa pajak perunit yang harus ditetapkan oleh pemerintah agar penerimaan pajaknya dan juga keuntungan produsen maksimum? Hitunglah masing-masing penerimaan pajak maksimum dan keuntungan maksimum tersebut dan narasikan aplikasinya dalam ekonomi.

BAB IX

PENERAPAN DIFERENSIAL FUNGSI SEDERHANA DALAM EKONOMI

Gottfried Wilhem Leibniz atau kadang kala dieja sebagai **Leibnitz** atau **Von Leibniz** (1 Juli (21 Juni menurut tarikh kalender Julian) 1646 – 14 November 1716) adalah seorang filsuf Jerman keturunan Sorbia dan berasal dari Sachsen. Selain seorang filsuf, ia adalah ilmuwan, matematikawan, diplomat, fisikawan, sejarawan dan doktor dalam hukum duniawi dan hukum gereja.

Leibniz sudah mulai mempublikasikan penjelasan penuh atas karyanya. Notasi dan "metode diferensial" Leibniz secara universal diadopsi di Daratan Eropa, sedangkan Kerajaan Britania baru mengadopsinya setelah tahun 1820. Dalam buku catatan Leibniz, dapat ditemukan adanya gagasan-gagasan sistematis yang memperlihatkan bagaimana Leibniz mengembangkan kalkulusnya dari awal sampai akhir, manakala pada catatan Newton hanya dapat ditemukan hasil akhirnya saja

Teori diferensial fungsi sederhana dalam ilmu Ekonomi diterapkan dalam konsep elastisitas, konsep nilai marjinal dan konsep optimasi. Berikut ini akan dibahas mengenai penerapan teori diferensial fungsi sederhana dalam ruang lingkup matematika ekonomi.

A. Elastisitas Permintaan

Gambar 36. Elastisitas Permintaan

Elastisitas permintaan (istilah yang lengkap elastisitas harga-permintaan / price elasticity of demand) ialah suatu koefisien yang menjelaskan besarnya perubahan jumlah barang yang diminta akibat adanya perubahan harga. Elastisitas permintaan juga diartikan sebagai respon yang dinyatakan dalam perubahan jumlah barang yang diminta terhadap perubahan tingkat harga. Jika konsumen secara relatif responsif terhadap perubahan harga maka disebut dengan permintaan yang elastis. Dapat diilustrasikan sebagai berikut, jika harga berubah sebesar 10 persen maka jumlah yang dimnta akan berubah lebih dari 10 persen.

Contoh barang permintaan elestis adalah barang-barang mewah seperti mobil, TV, camera dan sebagainya. Misalnya harga TV turun sebesar 10 persen, maka jumlah permintaan terhadap TV akan meningkat lebih dari 10 persen. Jika respon konsumen terhadap jumlah yang diminta lebih kecil dari perubahan harga maka disebut dengan permintaan yang kurang elastis (inelastis). Dapat diilustrasikan sebagai berikut, jika harga berubah sebesar 10 persen maka perubahan jumlah yang diminta kurang dari 10 persen. Jenis barang yang permintaannya inelastic adalah barang-barang kebutuhan pokok. Jika perubahan persentase perubahan tingkat harga diikuti oleh perubahan jumlah yang diminta sebesar persentase perubahan harga disebut unitary elastic.

Jadi, elastisitas permintaan merupakan rasio antara persentase perubahan jumlah barang. Jika fungsi permintaan dinyatakan dengan Qd = f(P), maka elastisitas permintaannya:

$$\eta_d = \frac{\%\Delta Q_d}{\%\Delta P} = \frac{EQ_d}{\Delta P} = \lim_{\Delta P \to 0} = \frac{(\Delta Q_d/Q_d)}{(\Delta P/P)} = \frac{dQ_d}{dP} . \frac{P}{Q_d}$$

dengan Q_d/dp adalah sama dengan Q'_d atau f'(P)

Keterangan :

ΔQ_d = perubahan terhadap jumlah permintaan

ΔP = perubahan dari harga barang

P = harga awal

Q_d = jumlah permintaan awal

EQ_d = elastisitas dari permintaan

Permintaan akan suatu barang dikatakan bersifat elastik apabila $|\eta d| > 1$, elastik-uniter jika $|\eta d| = 1$, dan inelastik bila $|\eta d| < 1$. Barang yang permintaannya elastis mengisyaratkan bahwa jika harga barang tersebut berubah sebesar persentase tertentu, maka permintaan terhadapnya akan berubah (secara berlawanan arah) dengan persentase yang lebih besar daripada persentase perubahan harganya.

- **Macam-macam Elastisitas Harga Permintaan**

Elastisitas Permintaan terdiri dari 5 macam, yaitu :

No	Jenis Elastisitas	Rumus	Logika	Contoh barang
1	Permintaan elastic	E > 1	$\%\Delta Q_d > \%\Delta P_d$	Kebutuhan Lux atau mewah
2	Permintaan inelastic	E < 1	$\%\Delta Q_d < \%\Delta P_d$	Kebutuhan Primer/pokok
3	Permintaan uniter (normal)	E = 1	$\%\Delta Q_d = \%\Delta P_d$	Kebutuhan Sekunder
4	Permintaan elastis sempurna	E = ~	$\%\Delta Q_d$, $\%\Delta P_d$ = 0	Kebutuhan Dunia (gandum, minyak)
5	Permintaan inelastis sempurna.	E = 0	$\%\Delta Q_d = 0$, $\%\Delta P_d$	Kebutuhan Tanah, air minum

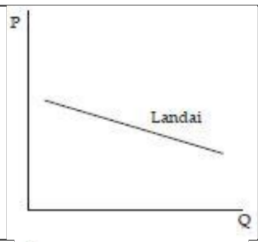
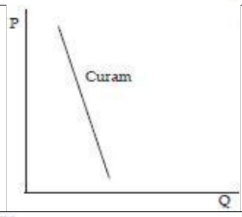
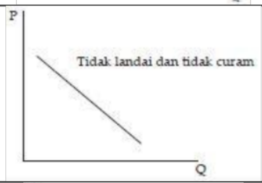
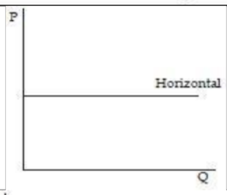
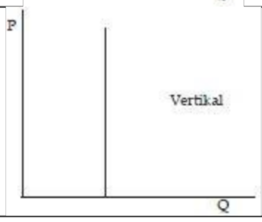
Tabel 1. Macam-macam Elastisitas Permintaan

Keterangan :

% ΔQd = Persentase dari perubahan jumlah permintaan akan barang

% ΔPd = Persentase dari perubahan harga barang

- **Kurva Elastisitas Permintaan**

No	Jenis permintaan	Gambar Kurva
1	Permintaan elastis	
2	Permintaan inelastis	
3	Permintaan uniter (normal)	
4	Permintaan elastis sempurna	
5	Permintaan inelastis sempurna	

Tabel 2. Kurva Elastisitas Permintaan

Contoh :

Fungsi permintaan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan Qd = 25 – $3P^2$. Tentukan elastisitas permintaannya pada tingkat harga P = 5.

Penyelesaian :

$Q_d = 25 – 3P^2$

P = 5

$Q'_d = Q_d/dp = -6P$

$$\eta_d = \frac{dQ_d}{dP} . \frac{P}{Q_d}$$

$$= -6P.\frac{P}{25 - 3P^2}$$

$$= -6(5).\frac{5}{25 - 3(5)^2}$$

= 3 (Elastik)

η_d = 3 berarti bahwa apabila dari kedudukan P = 5, harga naik (turun) sebesar 1 persen maka jumlah barang yang diminta akan berkurang (bertambah) sebanyak 3%.

INGAT!!!

Pada konsep elastisitas permintaan, yang dipentingkan adalah besarnya angka hasil perhitungan; apakah angka tersebut lebih besar dari ataukah sama dengan atau lebih kecil dari satu; yakni untuk menentukan apakah sifat permintaannya elastik, elastik-uniter, atau inelastik. Sedangkan tanda di depan hasil perhitungan (seandainya negatif) dapat diabaikan, karena hal itu mencerminkan berlakunya hukum permintaan bahwa jumlah yang diminta bergerak berlawanan arah dengan harga.

B. Elastisitas Penawaran

Elastisitas penawaran (istilah yang lengkap: elastisitas harga penawaran / price elasticity of supply) ialah suatu koefisien yang menjelaskan besarnya perubahan jumlah barang yang ditawarkan berkenaan adanya perubahan harga. Elastisitas penawaraan juga dapat diartikan sebagai pengaruh dari perubahan harga terhadap besar kecilnya jumlah penawaran barang atau tingkat kepekaan terhadap perubahan jumlah penawaran barang terhadap perubahan dari harga barang.

Sedangkan koefisien elastisitas dari penawaran adalah angka yang menunjukkan perbandingan antara perubahan jumlah penawaran barang dengan perubahan dari harganya.Jadi, merupakan rasio antara persentase perubahan jumlah barang yang ditawarkan terhadap persentase perubahan harga. Jika fungsi penawaran dinyatakan dengan Qs = f(P), maka elastisitas penawarannya:

$$\eta_s = \frac{\%\Delta Q_s}{\%\Delta P} = \frac{EQ_s}{\Delta P} = \lim_{\Delta P \to 0} = \frac{(\Delta Q_s/Q_s)}{(\Delta P/P)} = \frac{dQ_s}{dP}.\frac{P}{Q_s}$$

Keterangan :

ΔQ_s = perubahan terhadap jumlah penawaran.

ΔP = perubahan dari harga barang.

P = harga barang awal.

Q_s = jumlah penawaran awal.

EQ_s = elastisitas dari penawaran.

Penawaran suatu barang dikatakan bersifat elastik apabila ηs > 1, elastik-uniter jika ηs = 1 dan inelastik bila ηs < 1. Barang yang penawarannya inelastis mengisyaratkan bahwa jika harga barang tersebut berubah sebesar persentase tertentu, maka penawarannya berubah (secara searah) dengan persentase yang lebih kecil dari pada persentase perubahan harganya.

- **Macam-macam Elastisitas Penawaran**

Elastisitas penawaran terdiri atas 5 macam, yaitu :

No	Jenis Elastisitas	Rumus	Logika	Contoh barang
1	Penawaran elastis	E > 1	$\%\Delta Q_s > \%\Delta P_s$	Kebutuhan Lux atau mewah
2	Penawaran inelastis	E < 1	$\%\Delta Q_s < \%\Delta P_s$	Kebutuhan Primer/pokok
3	Penawaran uniter (normal)	E = 1	$\%\Delta Q_s = \%\Delta P_s$	Kebutuhan sekunder
4	Penawaran elastis sempurna	E = ~	$\%\Delta Q_s$, $\%\Delta P_s$ = 0	Kebutuhan Dunia (gandum, minyak)
5	Penawaran inelastis sempurna.	E = 0	$\%\Delta Q_s$ = 0, $\%\Delta P_s$	Kebutuhan Tanah, air minum

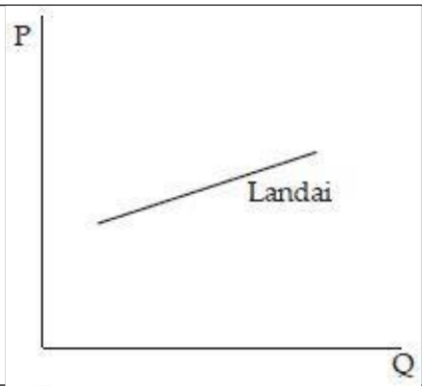
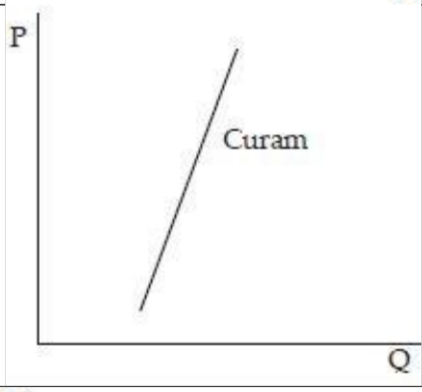
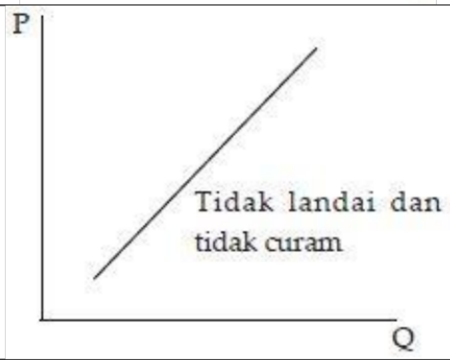
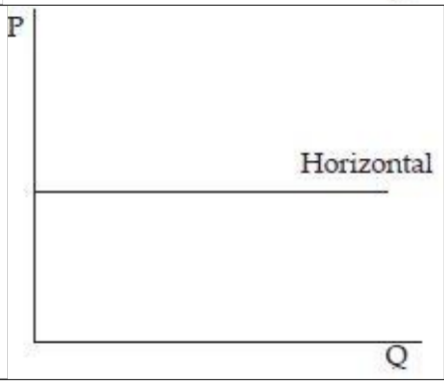
Tabel 3. Macam-macam Elastisitas Penawaran

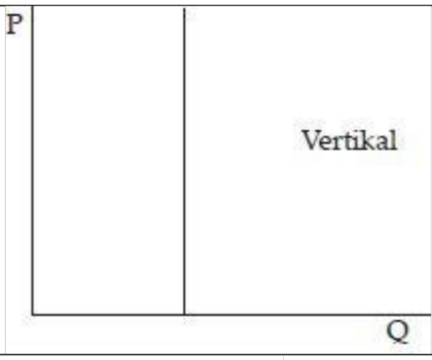
Keterangan:

% ΔQs = Persentase dari perubahan jumlah penawaran barang.

% ΔPs = Persentase dari perubahan harga barang.

- **Kurva Elastisitas Penawaran**

No	Jenis permintaan	Gambar Kurva
1	Penawaran elastic	
2	Penawaran inelastis	
3	Penawaran uniter (normal)	
4	Penawaran elastis sempurna	

5	Penawaran inelastis sempurna	

Tabel 1. Kurva Elastisitas Penawaran

Contoh :

Fungsi penawaran suatu barang dicerminkan oleh $Qs = -200 + 7P^2$. Berapa elastisitas penawarannya pada tingkat harga P = 10 dan P = 15?

Penyelesaian :

$Qs = -200 + 7P^2$

$Q's = dQs/dP = 14P$

$$\eta_s = \frac{dQ_s}{dP} \cdot \frac{P}{Q_s}$$

$$\eta_s = 14P. \frac{P}{-200 + 7P^2}$$

$$\text{Pada P} = 10 \qquad \text{maka} \qquad \eta_d = 14(10). \frac{10}{-200 + 7(10)^2} = 2{,}8 \text{ (elastis)}$$

$$\text{Pada P} = 15 \qquad \text{maka} \qquad \eta_d = 14(15). \frac{15}{-200 + 7(15)^2} = 2{,}3 \text{(elastis)}$$

η_s = 2,8 berarti bahwa apabila dari kedudukan P = 10, harga naik (turun) sebesar 1 persen maka jumlah barang yang ditawarkan akan berkurang (bertambah) sebanyak 2,8% demikian pula dengan η_s = 2,3 berarti bahwa apabila dari kedudukan P = 15, harga naik (turun) sebesar 1 persen maka jumlah barang yang ditawarkan akan berkurang (bertambah) sebanyak 2,3%

C. Elastisitas Produksi

Elastisitas produksi ialah suatu koefisien yang menjelaskan besarnya perubahan jumlah keluaran (output) yang dihasilkan akibat adanya perubahan jumlah masukan (input) yang digunakan. Jadi, merupakan rasio antara persentase perubahan jumlah keluaran terhadap persentase perubahan jumlah masukan. Jika P melambangkan jumlah produk yang dihasilkan, sedangkan X melambangkan jumlah faktor produksi yang digunakan, dan fungsi produksi dinyatakan dengan P = f(X), maka elastisitas produksinya:

$$\eta_p = \frac{\%\Delta P}{\%\Delta X} = \lim_{\Delta X \to 0} = \frac{(\Delta P/P)}{(\Delta X/X)} = \frac{dP}{dX}.\frac{X}{P}$$

dimana dP/dX adalah produk marjinal dari X [P' atau f'(X)].

Contoh :

Fungsi produksi suatu barang ditunjukkan oleh persamaan $P = 6X^2 - X^3$. Hitunglah elastisitas produksinya pada tingkat penggunaan faktor produksi sebanyak 3 unit dan 7 unit.

Penyelesaian :

$P = 6X^2 - X^3$. maka P' = dP/dX = $12X - 3X^2$

$\eta_p = \frac{dP}{dX}.\frac{X}{P}$ maka $\eta_p = 12X - 3X^2.\frac{X}{6X^2 - X^3}$

Pada $X = 3$ maka $\eta_p = 12(3) - 3(3)^2.\frac{(3)}{6(3)^2 - (3)^3} = 1$

Pada $X = 7$ maka $\eta_p = 12(7) - 3(7)^2.\frac{(7)}{6(7)^2 - (7)^3} = 9$

η_p =1 berarti bahwa, dari kedudukan X = 3, maka jika jumlah input dinaikkan(diturunkan) sebesar 1% maka jumlah output akan bertambah (berkurang) sebanyak 1 %Dan η_p =9 berarti bahwa, dari kedudukan X = 7, maka jika jumlah input dinaikkan(diturunkan) sebesar 1% maka jumlah output akan bertambah (berkurang) sebanyak 9 %.

EVALUASI

I. Isilah titik-titik dibawah ini dengan jawaban yang paling tepat !

1. Biaya total untuk memproduksi barang $C = 3Q^2 - 30Q + 125$, berapa biaya minimum dari fungsi tersebut...

   a. 55 c. 35 e. 50

   b. 15 d. 45

2. Penawaran suatu barang mengikuti fungsi $Q = 5 + 0{,}2\ P^2$, berapakah elastisitas penawaran pada tingkat harga P = 5...

   a. 110 c. 100 e. 112

   b. 111 d. 101

3. Permintaan suatu barang $P = -3Q + 90$. Biaya total untuk memproduksinya $C = 2Q^2 + 30Q + 10$. Berapa fungsi laba, unit yang terjual agar laba maksimum ddan laba maksimum...

   a. 710 c. 610 e. 510

   b. 711 d. 511

4. Diketahui $TC = 350 + 12Q^2$ maka berapa nilai MC pada saat Q = 80...

   a. 1990 c. 1920 e. 1940

   b. 1910 d. 1930

5. Fungsi total suatu perusahaan ialah $TC = 0{,}2Q^2 + 500Q + 1000$, berapakah jumlah produk agar biaya rata-rata nya minimum...

   a. 220 c. 200 e. 212

   b. 210 d. 222

6. P=18-3Q merupakan sebuah fungsi permintaan, pada kurva persamaan tersebut meksimum TR berada pada titik...

   a. (3,3) c. (3,9) e. (3,30)

   b. (3,12) d. (3,27)

7. Permintaan suatu barang P = 3Q + 27 apabila perusahaan memproduksi 10 barang, berapa nilai marginal pendapatannya...

   a. 89 c. 86 e. 81

   b. 87 d. 83

8. Pendapatan rata-rata dinyatakan dalam AR=80-4Q carilah fungsi marginal pendapatannya kemudian berapa nilai marginal pendapatan tersebut apabila produksinya adalah 7...

   a. 14 c. 24 e. 35

   b. 21 d. 28

9. Apabila perusahaan memproduksi 2 barang pada fungsi total biaya $C=Q^3-4Q^2+10+75$ berapakah nilai marginal biaya perusahaan tersebut...

   a. 2 c. 12 e. 22

   b. 20 d. 24

10. Sebuah barang memiliki harga jual yaitu P=-2Q+16 tentukan berapa output yang diproduksi agar memperoleh pendapatan maksimum...

    a. 2 c. 4 e. 18

    b. 16 d. 32

II. *Selesaikan soal dibawah ini !*

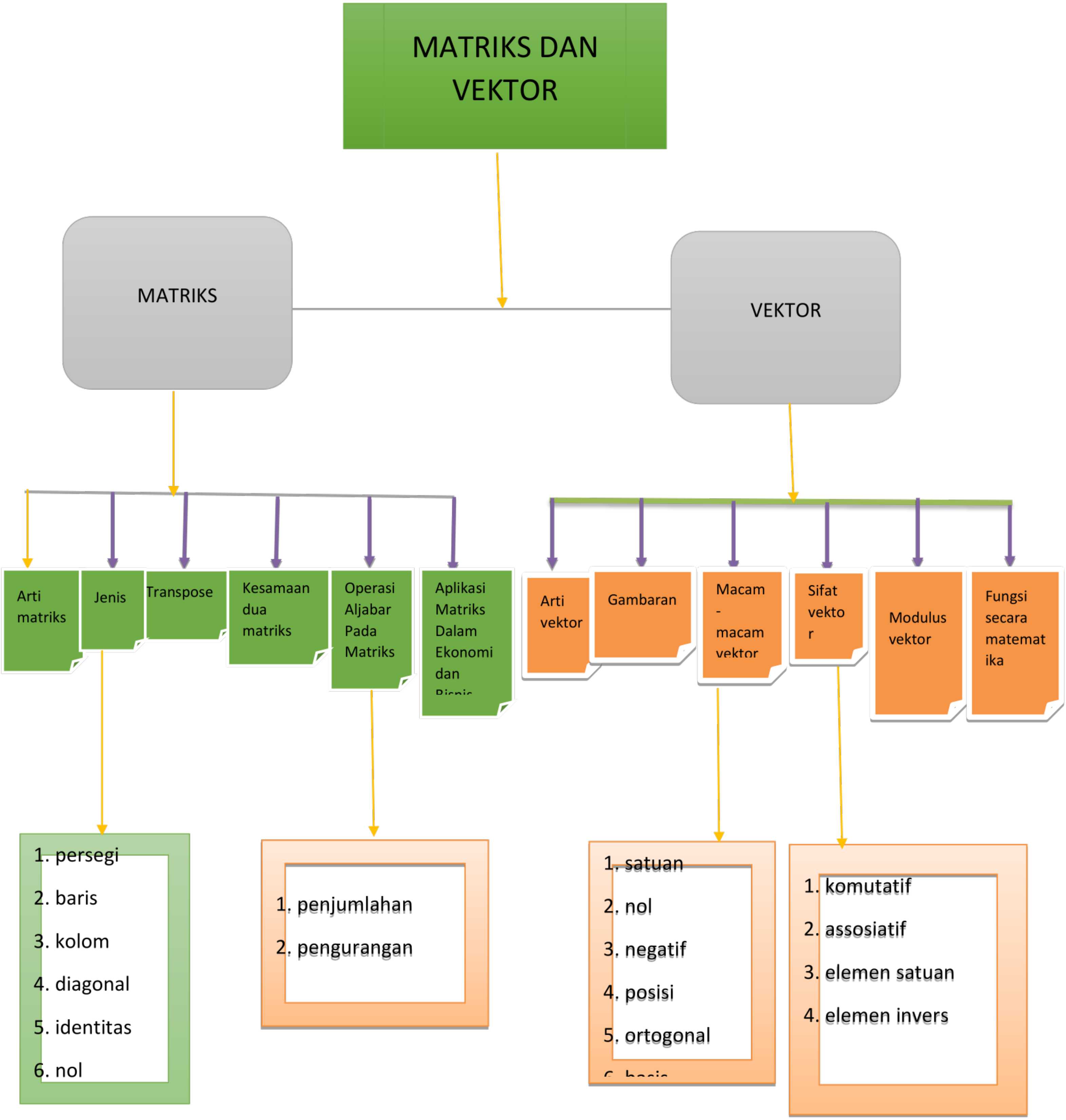
1. Tentukan turunan pertama dari fungsi f(x) $= x^5 - 7x^4 + 2x^3$!

2. Tentukan turunan pertama dari fungsi f(x) $= 2x^3 - x^2 + 5x$!

3. Carilah turunan pertama dari fungsi f(x) = (3x + 2)(2x + 5)

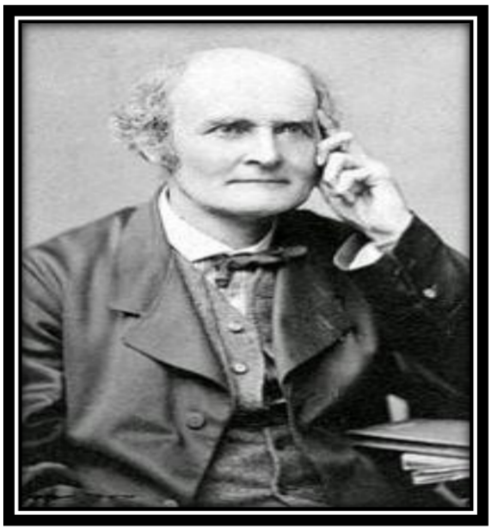
4. Hitunglah turunan pertama dari fungsi $f(x) = 12x^{1/2}$

5. Permintaan suatu barang dicerminkan oleh D = 4 –P, dimana D melambangkan jumlah barang yang diminta dan P adalah harga per unit. Hitunglah elastisitas permintaannya pada tingkat harga P = 3 dan pada tingkat permintaan D = 3.


MATRIKS DAN VEKTOR
MATRIKS
VEKTOR
Arti matriks
Jenis
Transpose
Kesamaan dua matriks
Operasi Aljabar Pada Matriks
Aplikasi Matriks Dalam Ekonomi dan
Arti vektor
Gambaran
Macam - macam
Sifat vektor
Modulus vektor
Fungsi secara matematika
1. persegi
2. baris
3. kolom
4. diagonal
5. identitas
6. nol
1. penjumlahan
2. pengurangan
1. satuan
2. nol
3. negatif
4. posisi
5. ortogonal
1. komutatif
2. assosiatif
3. elemen satuan
4. elemen invers

BAB X

MATRIKS DAN VEKTOR



Profil Arthur Cayley : Arthur Cayley (16 Agustus 1821 – 26 Januari 1895) merupakan seorang ahli matematika berkebangsaan Inggris. Dia merupakan orang pertama yang menemukan rumus matriks. Pada usia 17 tahun, dia tinggal di Trinity College, Cambridge. Cayley berhasil menemukan berbagai macam rumus senyawa kimia. Dia berhasil menemukan Teorema Cayley. Dia wafat pada tahun 1895.

A. MATRIKS

1. Pengertian Matriks

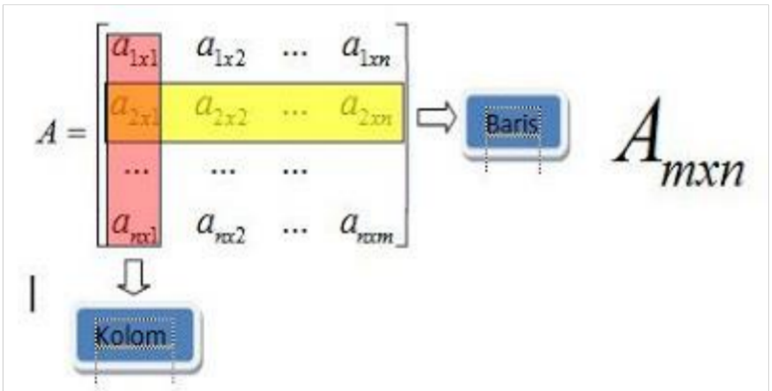
Matriks, pada dasarnya merupakan suatu alat atau instrumen yang cukup ampuh untuk memecahkan persoalan tersebut. Dengan menggunakan matriks memudahkan kita untuk membuat analisa-analisa yang mencakup hubungan variabel-variabel dari suatu persoalan. Pada awalnya matrik ditemukan dalam sebuah studi yang dilakukan oleh seorang ilmuan yang berasal dari Inggris yang bernama Arthur Cayley (1821-1895) yang mana studi yang dilakukan untuk meneliti persamaan linier dan transformasi linear, awal dari semua ini matrik dianggap sebagai sebuah permainan karena matrik dapat diaplikasikan, sedangkan pada tahun 1925 matrik digunakan sebagai kuantum dan pada perkembangannya matrik digunakan dalam berbagai bidang.

Inti dari matriks adalah susunan suatu kumpulan bilangan dalam bentuk persegi panjang yang diatur menurut baris dan kolom dan dibatasi oleh kurung biasa atau kurung siku. Sebuah matriks terdiri dari baris dan kolom. Baris suatu matriks adalah susunan bilangan-bilangan yang mendatar dalam matriks, sedangkan kolom suatu matrik adalah susunan bilangan-bilangan yang tegak (vertikal) dalam matriks.

Syarat – syarat suatu matriks :

1. Unsur – unsurnya terdiri dari bilangan – bilangan.
2. Mempunyai baris dan kolom.
3. Elemen – elemennya berbentuk persegi panjang dalam kurung biasa , kurung siku , atau kurung bergaris dua.

Selanjutnya, ukuran sebuah matriks dinyatakan dalam satuan *ordo*, yaitu banyaknya baris dan kolom dalam matriks tersebut. Ordo merupakan karakteristik suatu matriks yang menjadi patokan dalam oprasi-oprasi antar matriks. Matriks pada umumnya di simbolkan seperti berikut ini :



Keterangan :

A = nama matrik

m = banyak baris

n = banyak kolom

m x n = ordo matriks

Amxn = artinya elemen matrik baris ke-*m* kolom ke-*n*.

Contoh :

Misalnya matriks A terdiri dari 3 baris dan 4 kolom. Sobat bisa mengatakan matriks A berordo 3 x 4 atau di tulis A(3×4). Matriks banyak dimanfaatkan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan matematika misalnya dalam menemukan solusi masalah persamaan linear, transformasi linear yakni bentuk umum dari fungsi linear contohnya rotasi dalam 3 dimensi. Matriks juga seperti variabel biasa, sehingga matrikspun dapat dimanipulasi misalnya dikalikan, dijumlah, dikurangkan, serta didekomposisikan. Menggunakan representasi matriks, perhitungan dapat dilakukan dengan lebih terstruktur.

2. Jenis – Jenis Matriks

1. Matriks Persegi

Suatu matriks yang memiliki banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom disebut matriks persegi.

Contoh:

$$A_{2x2} = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad B_{3x3} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad C_{4x4} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -5 & 7 & 3 \\ 3 & 4 & 6 & -7 \\ 2 & 10 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

2. Matriks Baris

Matriks yang hanya mempunyai satu baris saja disebut matriks baris. Ordo matriks baris ditulis (1 x n) dengan n > 1, dan bilagan asli.

Contoh:

$S_{1x2} = \begin{pmatrix} 2 & 15 \end{pmatrix}$ $\quad$ $Q_{1x4} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 14 & 18 \end{pmatrix}$

3. Matriks Kolom

Matriks yang hanya mempunyai satu kolom saja disebut matriks kolom. Ordo matriks kolom ditulis (m x l) dengan m ≥ 2, dan bilangan asli.

Contoh:

$A_{2x1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \end{pmatrix}$ $K_{4x1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 14 \\ 8 \end{pmatrix}$

4. Matriks Diagonal

Matriks diagonaladalah matriks persegi yang semua elemen atau unsur di luar diagonal utamanya adalah nol.

Contoh:

$A_{2x2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$ atau $B_{3x3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$

5. Matriks Identitas

Suatu matriks dkatakan identitas, apabiladiagonal yang elemen-elemen atau unsur-unsur diagonal utama bernilai (satu).

Contoh:

$I_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ atau $I_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. Matriks Nol

Dikatakan sebagai matriks nol, apabila semua elemen atau unsurnya adalah nol.

Contoh:

$I_{3x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

7. Matriks Simetris atau Setangkap

Matriks simetris adalah matriks persegi yang unsu pada baris ke-n dan kolom ke-m dengan pada baris ke-m kolom ke-n.

Contoh:

$A_{3x3} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ dimana A21 = A22, A32 = A23

8. Matriks Segitiga

Matriks segitiga adalah matriks persegi yang mempunyai elemen-elemen di atas diagonal utamanya bernilai nol atau elemen-elemen di bawah diagonal utamanya bernilai nol.

Contoh:

$A_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ disebut matriks segitiga bawah

$A_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ disebut matriks segitiga atas

3. Transpose Matriks

Transpose suatu matriks adalah matriks baru yang diperoleh dari suatu matriks asal dengan mempertukarkan antara elemen kolom dan elemen barisannya.

Misalnya matriks A = $\begin{bmatrix} 7 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -7 \end{bmatrix}$

Maka Transpose A adalah $A^T = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$

Jadi jika ordo matriks A = 2×3 maka ordo matriks transpos adalah 3×2.

Jika diketahui suatu matriks A dengan ordo m × n, maka transpose matriks tersebut adalah matriks berordo n × m. Transpos A adalah matriks baru dimana elemen kolom pertama = elemen baris pertama matriks A, elemen kolom kedua = elemen baris kedua matriks A, elemen kolom ketiga= elemen baris ketiga matriks A.

Transpose dari suatu matriks Amxn dapat dibentuk dengan cara menukarkan baris matriks A menjadi kolom matriks baru dan kolom matriks A menjadi matriks baru. Matriks baru dinyatakan dengan lambang.

$A^T mxn$ atau $A^T nxm$.

Contoh:

$$A_{3x1} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T_{1x3} = \begin{pmatrix} 8 & 9 \end{pmatrix} 6$$

$$B_{2x4} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 8 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow B^T_{4x2} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

4. Kesamaan Dua Matriks

Kesamaan antara dua matriks tidak hanya ditentukan oleh kesamaan ordo kedua matriks itu. Dua matriks dikatakan sama (identik) jika ordo kedua matriks itu sama dan elemen – elemen yang bersesuaian pada kedua matriks sama nilainya. Matriks A dan matriks B dikatakan berordo sama atau berukuran sama jika banyaknya baris dan banyaknya kolom pada matriks A sama dengan banyaknya baris dan banyaknya kolom pada matriks B.

Dalam matriks dikenal adanya kesamaan dua matriks yang didefinisikan sebagai berikut :

> Dua matriks dikatakan sama jika ordo yang dimiliki keduanya sama, dan elemen-elemen yang bersesuaian (seletak) sama.

Dua buah matriks A dan B dikatakan sama (ditulis A=B), jika dan hanya jika kedua matriks itu mempunyai ordo yang sama dan elemen-elemen yang seletaknya sama. Karena menggunakan “jika dan hanya jika” maka pengertian ini berlaku menurut dua arah, yaitu:

- Jika A = B maka haruslah ordo kedua itu sama, dan elemen-elemen yang seletak sama.
- Jika dua buah matriks mempunyai ordo yang sama, elemen-elemen yang seleak juga sama maka A = B.

Contoh:

A. M = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ N = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ M = N

B. A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ N = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ A$\neq$ N

Contoh soal dan pembahasan dari kesamaan dua matriks.

K = $\begin{bmatrix} a & 2 & 3 \\ 5 & 4 & b \\ 8 & 3c & 11 \end{bmatrix}$ dan L = $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 2a \\ 8 & 4b & 11 \end{bmatrix}$

Jika K = L, tentukan nilai C?

Jawab:

Karena K = L maka a= 6, b = 2a = 2.6 => c = 16. Maka c = 16, jadi nilai c adalah 16.

5. Operasi Aljabar Pada Matriks

A. Penjumlahan Matriks

Operasi penjumlahan pada matriks hanya dapat dilakukan apabila mariks – matriksnya mempunyai ordo yang sama. Dua matriks dapat dijumlahkan atau dikurangkan jika ordonya sama. Misal ordo matriks A = 2 x 2 dan ordo matriks B = 2 x 2, maka keduanya dapat dijumlahkan atau dikurangkan. Jika A dan B dua buah matriks berordo sama maka jumlah matriks A dan B ditulis A + B adalah matriks baru C yang diperoleh dengan menjumlahkan elemen-elemen matriks A dengan elemen-elemen B yang seletak.

Contoh:

i. A = $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} 11 & -3 \\ -7 & 9 \end{bmatrix}$

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 3+11 & 5+(-3) \\ 7+(-7) & 2+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 2 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$$

ii. $M = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad N = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

Apakah M + N terdefenisi? Mengapa?

Jawab : Tidak terdefinisi. Karena berbeda jenis antar matriks M dan juga matriks N

iii. Diketahui persamaan matriks:

$$\begin{bmatrix} 2x+3 & 8 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & y+4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 15 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Tentukan nilai x + y?

Jawab:

$$\begin{bmatrix} 2x+3 & 8 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & y+4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Pada penjumlahan berlaku sifat-sifat:

- Komutatif, A+B = B+A
- Asosiatif, (A+B)+C = A+(B+C)
- Sifat lawan, A+(-A) = 0
- Identitas penjumlahan, A+0 = A

B. Pengurangan Matriks

Pengurangan matriks A dengan matriks B adalah suatu matriks yang elemen-elemen diperoleh dengan cara mengurangkan elemen matriks A dengan elemen matriks b yang bersesuaian, atau dapat pula diartikan sebagai menjumlahkan matriks A dengan lawan negative dari B, dituliskan: A-B = A+(-B).Seperti halnya pada penjumlahan dua buah matriks, pengurangan matriks dua buah matriks pun terdefinisi apabila ordo kedua matriks tersebut sama.

6. Aplikasi operasi matriks dalam Ekonomi dan Bisnis

Berikut ini diberikan penerapan operasi matriks secara terbatas dalam ekonomi dan bisnis.

Contoh 1- 34

Sebuah industri elektronik yang khusus memproduksi tv (t), vcd player (v) dan tape kompo (k), dalam seminggu menyalurkan produknya melalui tiga toko eceran (toko 1, 2 dan 3). Toko eceran 1 memiliki persediaan 30 tv, 40 vcd, dan 60 tape kompo. Toko eceran 2 memiliki persediaan 50 tv, 60 vcd, dan 20 tape kompo.Toko eceran 3 memiliki 25 tv, 10 vcd dan 70 tape kompo. Bila harga jual per unit (dalam juta rupiah) untuk tv adalah 2, vcd player adalah 1 dan tape kompo adalah 1,5.

(a) Nyatakanlah persediaan barang elektronik tersebut (Q) dalam bentuk matriks.

(b) Nyatakanlah harga-harga jual barang elektronik tersebut (P) dalam bentuk matriks.

(c) Jika semua persediaan tersebut terjual habis, hitunglah total penjualan dari persediaan barang-barang elektronik tersebut (R) pada masingma sing toko eceran melalui operasi matriks.

Penyelesaian :

(a) Matriks persediaan barang elektronik (Q)

$$\begin{array}{l c} & \begin{array}{ccc} \text{t} & \text{v} & \text{k} \end{array} \\ \begin{array}{l} Toko\ eceran\ 1 \\ Toko\ eceran\ 2 \\ Toko\ eceran\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 30 & 40 & 60 \\ 50 & 60 & 20 \\ 25 & 10 & 70 \end{pmatrix} \end{array} \text{ atau Q = } \begin{pmatrix} 30 & 40 & 60 \\ 50 & 60 & 20 \\ 25 & 10 & 70 \end{pmatrix}$$

(b) Matriks harga jual (P)

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \begin{matrix} t \\ v \\ k \end{matrix}$$

(c) Total penjualan dari masing-masing toko eceran

R = QP

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} QP = \begin{pmatrix} 30 & 40 & 60 \\ 50 & 60 & 20 \\ 25 & 10 & 70 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \text{ terdefinisi}$$

$$= \begin{pmatrix} 190 \\ 190 \\ 165 \end{pmatrix}$$

Jadi, total penjualan masing-masing toko eceran tersebut adalah : toko eceran 1 dan 2 masing-masing sebesar 190 juta rupiah dan 165 juta untuk toko eceran 3.

Soal Pilihan Berganda

1. Dari dua buah matriks yang diberikan di bawah ini

A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$,   B = $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

Tentukan 2A + B!

a. $\begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 10 & 17 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 17 & 12 \\ 16 & 10 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 5 & 17 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

2. Diberikan dua buah matriks di bawah ini

C = $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$,   D = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Tentukan 3C – D!

a. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$,

c. $\begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 20 & 16 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 24 & 15 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$

3. Diketahui matriks A dan B seperti di bawah ini. Jika determinan matriks A = -8, maka determinan matriks B adalah…

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{bmatrix}$$

A. 96

B. -96

C. -64

D. 48

4. Nilai z yang memenuhi persamaan di bawah ini adalah…

$$\begin{vmatrix} z & -3 \\ 2 & 2z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -z \\ z-1 & 2 \end{vmatrix}$$

A. 2

B. -2

C. 4

D. 3

5. Hubungan dua matriks seperti di bawah ini. Nilai a yang memenuhi persamaan tersebut adalah…

$$\begin{vmatrix} {}^{8}log\,a & a \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & -{}^{2}log\,6 \\ {}^{6}log\,16 & 2 \end{vmatrix}$$

A. 8

B. 24

C. 64

D. 81

Soal – Soal Essay dan Pembahasan

1. Tentukakan ordo matriks dibawah ini:

- A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$
- B = $5\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$
- C = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Buatlah transpose dari matriks – matriks berikut ini:

- H = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$
- I = $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
- J = $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

3. Perhatikan soal dibawah ini!

- Diketahui A = $\begin{bmatrix} 3p & 2 \\ 4 & -5q \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} p+8 & 2 \\ 4 & 30 \end{bmatrix}$ jika A = B, tentukan nilai P dan Q?
- Jika A = $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 3x & -2 \\ 2y & 2 \end{bmatrix}$ jika A = B, tentukan nilai x + y?
- Sebuah matriks P ordo 2x2 memenuhi persamaan $\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ – 3P = $\begin{bmatrix} -5 & 10 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$ tentukan matriks P?

4. Selesaikan soal dibawah berikut ini!

- Tentukan nilai a, b, c, dan d pada persamaan $\begin{bmatrix} a-b & b+c \\ 3d+c & 2a-4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$
- Diketahui persamaan matriks sebagai berikut $\begin{bmatrix} -a & b+4 \\ c-2 & 2d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & b+c \\ 10 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & b-2 \end{bmatrix}$ tentukan a, b, c, dan d?
- Berdasarkan persamaan matriks dibawah ni. Tentukan nilai a, b, c, dan d $\begin{bmatrix} a+2d & b \\ c-2 & 2d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & b+3c \\ 2+b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 16 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$

5. Jka diketahui A = $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

C = $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ D = $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ Tentukan:

A. A + C D. B - D

B. A + B E. A – C

C. C + D F. B - C

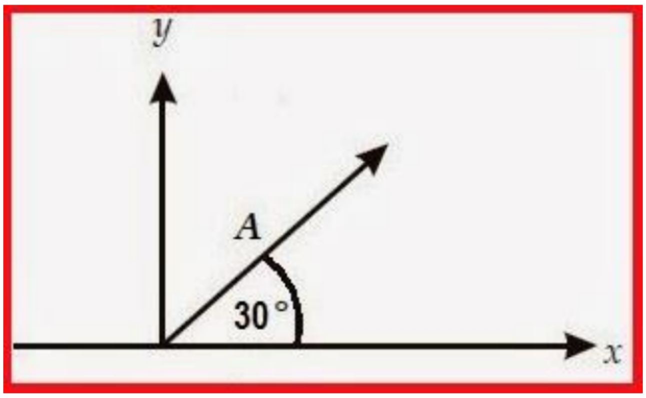
6. Kerjakanlah soal dibawah berikut!

- Diketahui matriks $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ + 2$\begin{bmatrix} x-1 & 1 \\ 3 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 10 & 25 \\ 5 & 28 \end{bmatrix}$ Nilai x + y adalah?
- Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 3 & y \end{bmatrix}$ C = $\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ apabila B – A = C^T maka nilai X . Y adalah?
- Nilai x yang memenuhi persamaan matriks $\begin{bmatrix} x-y & 2x-1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} 45 & 9 \\ 4y-3 & x+y \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 40 & 50 \\ 94 & 60 \end{bmatrix}$ adalah?

B. VEKTOR

1. Pengertian Vektor

Vektor adalah besaran yang mempunyai nilai dan arah. Contoh sebuah kapal bergerak dengan kecepatan sebesar 20 knot pada arah 30 derajat dari suatu pelabuhan. Dari pernyataan di atas dapat dipahami bahwa kapal tersebut bergerak dengan kecepatan 20 knot yang merupakan besaran, selain itu dijelaskan juga arah yang ditempuh, yaitu 30 derajat dari pelabuhan.



Gambar 1. Vektor

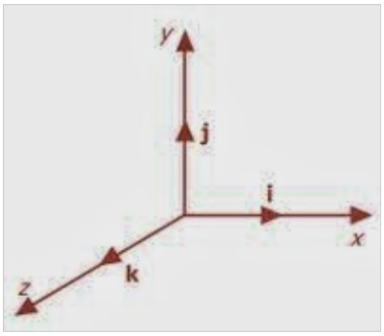
Secara sederhana pengertian vektor adalah besaran yang mempunyai nilai dan arah. Contoh dari besaran ini misalnya perpindahan, kecepatan, percepatan, gaya, dan sebagainya. Untuk menggambarkan vektor digunakan garis berarah yang bertitik pangkal. Panjang garis sebagai nilai vektor dah anak panah menunjukkan arahnya. Simbol vektor menggunakan huruf kapital yang dicetak tebal (bold) atau miring dengan tanda panah di atasnya seperti gambar berikut:

2. Penggambaran vektor:

Untuk menyatakan suatu vektor dapat dilakukan pada bidang datar atau bidang koordinat Cartesius XOY dengan menggambar ruas garis dengan anak panah di salah satu ujungnya. Panjang ruas garis mewakili besar (panjang) vektor dan anak panah mewakili arah vektor. Vektor disimbolkan dengan huruf tebal atau dengan huruf yang digaris bawah.

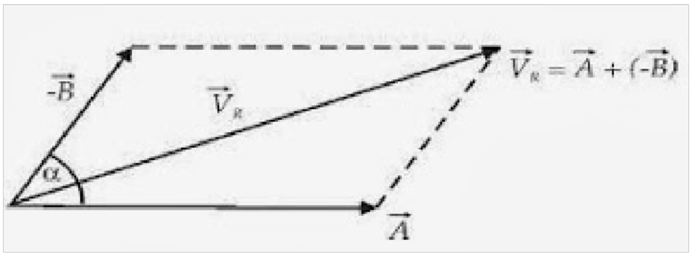
3. Macam-macam vektor:

Vektor Satuan : Vektor yang memiliki arah, meskipun hanya bernilai satu.

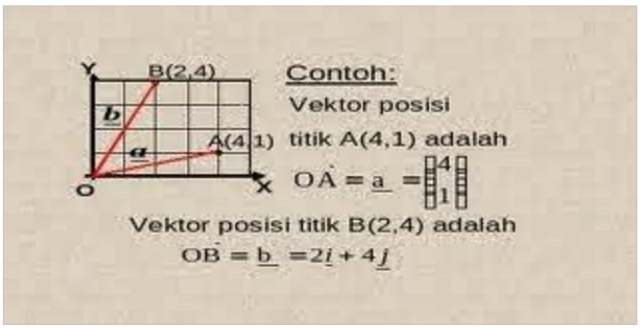


Vektor Nol : Vektor yang titik awal dan akhirnya sama.

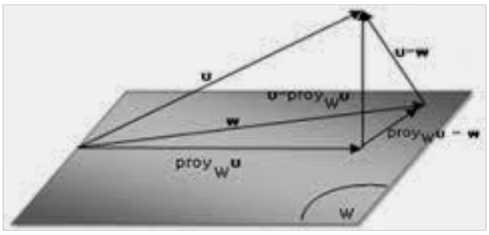
Vektor Negatif : Negatif sebagai penunjuk arahnya.



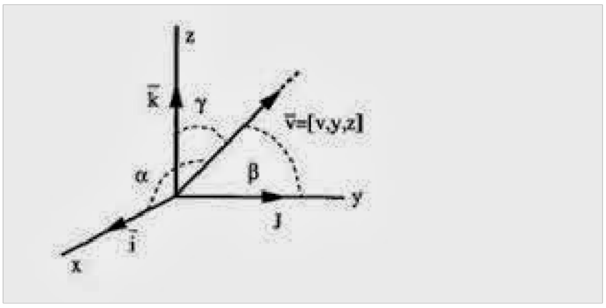
Vektor Posisi : Vektor yang menempati posisi pada bidang kartesius.



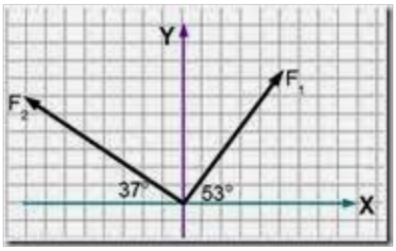
Vektor Ortogonal: Vektor basis pada dimensi tiga.



Vektor Basis : Vektor yang menempati suatu kartesius.



Vektor Resultan : Vektor yang menjadi hasil dari semua vektor.



4. Sifat-sifat vektor

a. Komutatif

a + b = b + a

b. Assosiatif

a + (b + c) = (a + b) + c

c. Memiliki elemen satuan atau elemen identitas

a + 0 = 0 + a = a

d. Memiliki elemen inverse

a + (-a) = (-a) + a = 0

e. Distributive dengan perkalian skalar

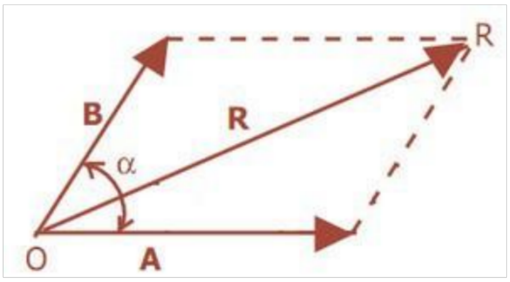
K(a + b) = ka + kb , dengan k= scalar

5. Penjumlahan Vektor

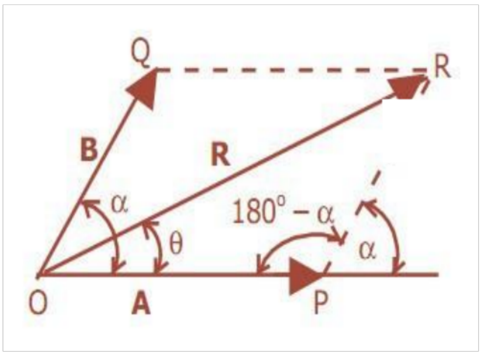
Inti dari operasi penjumlahan vektor ialah mencari sebuah vektor yang komponen- komponennya adalah jumlah dari kedua komponen-komponen vektor pembentuknya atau secara sederhana berarti mencari resultan dari 2 vektor. Untuk vektor segaris, resultannya

R = A + B + C + n dst…

untuk penjumlahan vektor yang tidak segaris misalnya seperti gambar di bawah ini



rumus penjumlahan vektor bisa didapat dari persamaan berikut.



Menurut aturan cosinus dalam segitiga,

(OR)2 = (OP)2 + (PR)2 – 2(OP)(PR) cos (180– α)

(OR)2 = (OP)2 + (PR)2 – 2(OP)(PR) cos (-cos α)

(OR)2 = (OP)2 + (PR)2 – 2(OP)(PR) cos α

Jika OP = A, PR = B, dan Resultan ‘R’ = OR

Maka didapat persamaan R2 = A2 + B2 – 2AB cos α

Rumus menghitung resultan vektornya

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2ABcosa}$$

Dalam penjumlahan vektor sobat hitung bisa menggunakan 2 cara meliputi :

1. Penjumlahan Vektor dengan Cara Jajar Genjang

Yaitu seperti yang dijelaskan di atas. Metode yang digunakan adalah dengan mencari diagonal jajar genjang yang terbentuk dari 2 vektor dan tidak ada pemindahan titik tangkap vector.

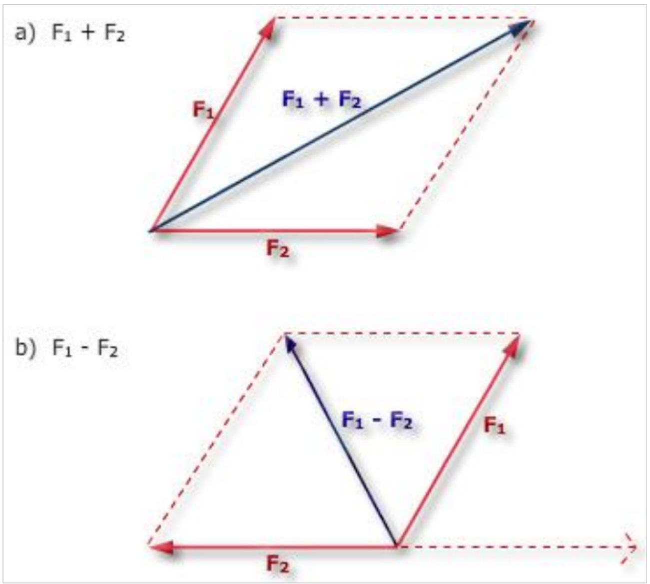
Dua buah vektor atau lebih dapat dijumlahkan dengan melukis sebuah jajaran genjang dengan kedua vektor tersebut sebagai sisi-sisinya. Adapun resultannya diperoleh dari diagonal jajaran genjang, yaitu titik pangkalnya sama dengan kedua titik pangkal vektor tersebut. Cara melukiskan gambar resultan dua buah vektor dengan metode jajaran genjang sebagai berikut:

- Letakkan titik tangkap vektor 1 dan 2 pada satu titik sesuai nilai dan arah masing-masing vektor.

- Tariklah garis dari ujung vektor satu sejajar dengan vektor yang lain dan sebaliknya.

- Tariklah garis dari titik pangkal kedua vektor sampai ke titik potong garis sejajar vektor tersebut.

Contoh :

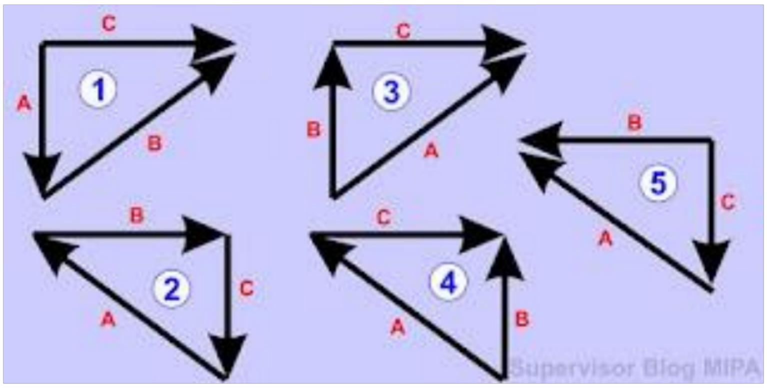


2. Penjumlahan Vektor dengan Cara Segitiga

Metode segitiga adalah cara menggambarkan penjumlahan dua buah vektor dimana salah satu titik tangkap vektor dipindahkan keujung vektor yang lain kemudian ditarik garis lurus dari pangkal ke ujung vektor tersebut sehingga terbentuklah bangun datar segitiga.

Perhatikan cara menentukkan vektor resultan dengan metode segitiga berikut :

Dari gambar - gambar ini, yang menunjukkan besar vektor A = B - C adalah



Penyelesaian:

Nah, disini untuk mempermudah dalam menyelesaikan soal, maka persamaan A = B - C kita ubah dulu ke bentuk penjumlahan yaitu sebagai berikut :

A = B - C

B = A + C

Nah, dari penjumlahan tersebut maka yang menjadi vektor resultannya adalah Vektor B. Dari gambar yang kita lihat diatas, Cari vektor B yang ujungnya bertemu dengan ujung vektor lain dan pangkal vektor B bertemu dengan pangkal vektor lain. Gambar yang sesuai adalah gambar nomor 1,4 dan 5.

A => C

Dari gambar 1,4 dan 5 maka gambar yang paling sesuaiadalah gambar 4.Sehingga gambar yang menunjukkan besar vektor A= B - C adalah gambar 4.

3. Pengurangan Vektor

Pengurangan Vektor pada prinsipnya sama dengan penjumlahan, cuma yang membedakan adalah ada salah satu vektor yang mempunyai arah yang berlawanan. Misalnya vektor A bergerak ke arah timur dan B bergerak ke arah barat maka resultannya

R = A + (-B) = A – B

Rumus Cepat Vektor

Berikut rumus cepat panduan mengerjakan soal vektor fisika

Jika α = 0° maka $R = V_1 + V_2$

Jika α = 90° maka $R = \sqrt{(V_1^2 + V_2^2}$

Jika α = 180o maka R = | V1 + V2 | –> nilai mutlak

Jika α = 120o dan V1 = V2 = V maka R = V

Contoh Soal

Dua buah vektor sebidang erturut-turut besarnya 8 satuan dan 6 satuan, bertitik tangkap sama dan mengapit sudut 30^o Tentukan besar dan arah resultan vektor tersebut tersebut!

Jawaban :

$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2ABcosa}$

$R = 8^2 + 6^2 + 2.6.8.\cos 30$

$R = 64 + 36 + 96.\ 0,5\sqrt{3}$

$R = 100 + 48\sqrt{3}$

4. Perkalian Vektor dengan Skalar

Perkalian antara vektor dan skalar adalah hasil kali suatu skalar k dengan sebuah vektor A, sehingga dapat dituliskan kA dan didefinisikan sebagai sebuah vektor baru yang besarnya adalah besar k dikalikan dengan besar A. Arah vektor yang baru ini sama dengan arah vektor A jika k positif dan berlawanan arah dengan vektor A jika k negatif.+

Contoh soal :

1. Sebuah kelereng mempunyai massa 10 gram bergerak dengan persamaan kecepatan v = (3i + 3 j) m/s. Besar momentum yang dimiliki kelereng tersebut adalah…kg m/s

Penyelesaian

Diketahui:

Massa = 10 g = 0,01 kg = 1 × 10-2 kg

Persamaan kecepatan v = v = (3i + 3 j) m/s

Ditanya: momentum

Momentum adalah hasil kali antara massa dengan kecepatan, secara matematis dirumuskan sebagai berikut:

$$p = mv$$

Massa merupakan besaran skalar, sedangkan kecepatan adalah besaran vektor, maka momentum merupakan hasil kali antara vektor dengan skalar dengan demikian momentum adalah besaran vektor.

p = (1 × 10-2)(3i + 3j)

p = (3i + 3j) × 10-2

maka besar momentumnya adalah

p = {√(32 + 32)} × 10-2

p = {√(9 + 9)} × 10-2

p = (√18) × 10-2

p = 3√2 × 10-2

jadi momentum yang dimiliki kelereng tersebut adalah 3√2 × 10-2 kg m/s

5. Perkalian Titik (Dot Product)

Perkalian titik diantara dua vektor A dan B dapat ditulis A • B. Perkalian skalar dua vektor dapat dikitang sebagai perkalian antara besar salah satu vektor dengan komponen vektor lain dalam arah vektor yang pertama tadi. Maka pada perkalian vektor ini ada ketentuan, yaitu :

Perkalian komponen vektor yang sejenis (searah) akan menghasilkan nilai 1, seperti : i • i = j • j = k • k = 1Perkalian komponen vektor yang tidak sejenis (saling tegak liris) akan menghasilkan nilai 0, seperti : i • j = j • k = k • i = 0.

Contoh Soal:

1. Vektor gaya dan perpindahan mempunya persamaan F = (i + j + k) N dan s = (3i + 4j + 6k) m. tentukan usaha yang dilakukan oleh gaya!

Penyelesaian:
Diketahui:
F = (i + j + k)
s = (3i + 4j + 6k)
ditanya: usaha (W)
Jawab:
Usaha merupakan hasil perkalian titik antara gaya dengan perpindahan, jadi
W = F . s
W = (i + j + k) . (3i + 4j + 6k)
W = (1)(3) + (1)(4) + (1)(6)
W = 3 + 4 + 6
W = 13
Jadi usaha yang dilakukan oleh gaya tersebut adalah 13 joule.

6. Perkalian Silang (Cross Product)

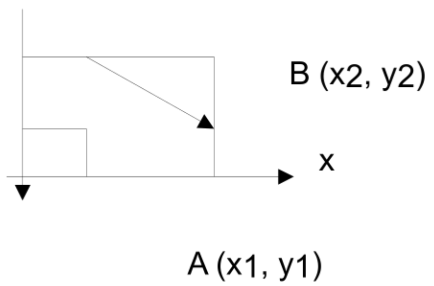
Perkalian silang diantara dua vektor A dan B dapat ditulis A X B dan hasilnya adalah sebuah vektor lain C. Arah dari C sebagai hasil perkalianvektor A dan B didefinisikan tegak lurus pada bidang yang dibentuk oleh A dan B. Pada perkalian vektor ini ada ketentuan sebagai berikut :

i x i = 0	i x j = k	j x i = -k
j x j = 0	j x k = i	k x j = -i
k x k = 0	k x i = j	i x k = -i

7. Vektor pada Bidang Datar R^2 (Dimensi Dua)

Di dalam bidang datar (R^2) suatu vektor yang titik pangkalnya di A (x_1, y_1) dan titik ujungnya di B (x2, y2)

Dilukiskan sebagai : y y



1.6 Modulus Vektor

Modulus vektor yaitu besar atau panjang suatu vektor. Jika suatu vektor dengan koordinat titik A (x_1 , y_1 ,z_1) dan B (x_2 , y_2 , z_2) maka modulus (besar) atau panjang vector dapat dinyatakan sebagai jarak antara titik A dan yaitu :

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Contoh soal :

1. Modulus dari titik (3,4) adalah

Jawab:

Pakai Rumus Phytagoras

Misalkan titik yang di cari adalah z

z= $\sqrt{((3)^2 + (4)^2)}$

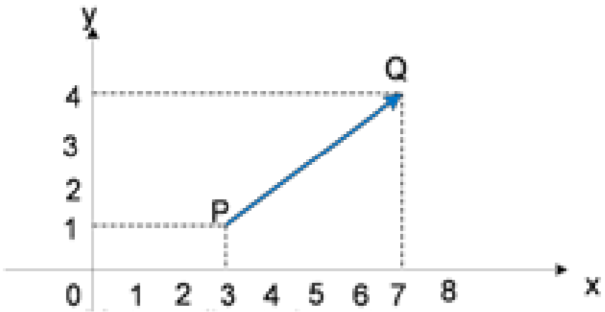
z= $\sqrt{(9 + 16)}$

z= $\sqrt{25}$

z= 5

Jadi, panjang vektor atau modulus nya adalah 5

2. Perhatikan gambar berikut, PQ adalah sebuah vektor dengan titik pangkal P dan titik ujung Q.



a) Nyatakan PQ dalam bentuk vektor kolom

b) Nyatakan PQ dalam bentuk i, j (vektor satuan)

c) Tentukan modulus atau panjang vektor PQ

Pembahasan

Titik P berada pada koordinat (3, 1)

Titik Q berada pada koordinat (7,4)

a) PQ dalam bentuk vektor kolom

$$\boldsymbol{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{PQ} = \begin{pmatrix} 7-3 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) PQ dalam bentuk i, j (vektor satuan)

PQ = 4i + 3j

c) Modulus vektor PQ

$$|\mathrm{PQ}| = \sqrt{4^2 + 3^2}$$
$$|\mathrm{PQ}| = \sqrt{25} = 5$$

1.7 Fungsi Vektor Secara Matematika

Secara matematisnya, dijelaskan dungsi dari vektor itu ialah sebagai berikut:

Jika untuk setiap nilai skalar u dikaitkan dengan suatu vektor A, maka A dinamakan suatu fungsi u yang dilambangkan dengan A(u). Dalam tiga dimensi ditulis A(u) = A1(u)i + A2(u)j + A3(u)k.

Konsep fungsi ini dapat dengan mudah diperluas. Jadi kita untuk setiap titik (x, y, z) dikaitkan dengan suatu vektor A, maka A adalah fungsi dari (x, y, z) dan dinyatakan dengan A(x, y, z) = A1(x, y, z)i + A2(x, y, z)j + A3(x, y, z)k.

Kita kadang-kadang menyatakan bahwa sebuah fungsi vektor A(x, y, z) mendefinisikan suatu medan vektor karena mengaitkan suatu vektor dengan setiap titik di suatu daerah. Dengan cara yang sama 4(x, y, z) mendefinisikan suatu medan skalar karena mengaitkan suatu skalar dengan setiap titik di suatu daerah.

Limit, kontinuitas dan turunan fungsi vektor mengikuti aturan yang serupa untuk fungsi skalar yang bersangkutan. Pernyataan berikut menunjukkan kesamaan yang ada.

1. Fungsi vektor A(u) dikatakan kontinu di u0 jika diberikan suatu bilangan positif , kita dapat menentukan suatu bilangan positif. Sehingga < bilamana < . Hal ini ekivalen dengan pernyataan = A(u0).
2. Turunan dari A(u) didefinisikan sebagai dengan syarat limit ini ada. Jika A(u)=A1(u)i+A2(u)j+A3(u)k.

Contoh fungsi vektor, misalnya persamaan dari gerakan bebas suatu partikel dalam ruang. Jika setiap titik dalam suatu ruang (R3) dikaitkan dengan suatu vektor, maka ruang tersebut disebut medan vektor.

Contoh soal Fungsi Vektor Secara Matematika

1. Agar vector $\vec{a}$ = $2\hat{\imath}$ + $p\hat{\jmath}$ + $\hat{k}$ dan $\vec{b}$ = $3\hat{\imath}$ + $2\hat{\jmath}$ + $4\hat{k}$ saling tegak lurus, maka nilai p adalah ….

a. 5

b. -5

c. -8

d. -9

e. -10

Penyelesaian :

Vector $\vec{a}$ dan vector $\vec{b}$ saling tegak lurus jika sudut antara kedua vector adalah 90^0.

Ingat perkalian vector.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\theta$

(2, p, 1) (3, 2, 4) = 0 → cos 90^0 = 0

6 + 2p + 4 = 0

2p = - 10

P = -5

2. Jika $\vec{u}$ dan vector $\vec{v}$ adalah dua vector satuan membentuk sudut 30^0 maka ($\vec{u}$ + $\vec{v}$) . $\vec{v}$ = …

a. $\frac{3}{2}$

b. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ + 1

c. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ - 1

d. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ + 1

e. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ + 1

Penyelesaian :

Panjang dari vector satuan = 1

$\overrightarrow{(u + v)} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} + \vec{u}$

$= |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cos\theta + |\overrightarrow{v}|^2$

$= 1.1.\frac{1}{2}\sqrt{3} + 1$

$= \frac{1}{2}\sqrt{3} + 1$

3. Agar kedua vector $\vec{a}$ = (x, 4, 7) dan $\vec{b}$ = (6, y, 14) segaris, haruslah nilai x – y sama dengan …..

a. -5

b. -2

c.3

d.4

e. 6

Penyelesaian :

Vector $\vec{a}$ koliner dengan vector $\vec{b}$, sehingga :

Vector $\vec{a}$ = k. vector $\vec{b}$

$(x, 4, 7) = k(6, y, 14)$

$(x, 4, 7) = (6k, ky, 14k)$

$7 = 14k$

$k = ½$

$x = 6k$

$x = 6.1/2$

$x = 3$

$4 = ky$

$4 = ½ y$

$y = 8$

$x-y = 3 – 8$

$x-y = -5$

1.8 Contoh-contoh Vektor dalam kehidupan sehari-hari

Berikut ini adalah beberapa contoh vektor dalam kehidupan sehari-hari yang mungkin tidak asing lagi bagi kita semua :

1. Ketika Upacara bendera dihari senin, pasukan paskibra mengibarkan bendera dari bawah ke atas. Aplikasi vektor bendera seperti sudut 90 derajat.
2. Ketika seorang melakukan olahraga tersebut, mereka akan terjun dengan kemiringan tertentu hingga menginjak tanah.
3. Ketika penerjun menjatuhkan diri dari kapal, tempat ia jatuh tidak tepat di bawah kapal, tetapi jauh melenceng karena adanya dua vektor gaya yaitu gaya gravitasi dan gaya dorong angin.
4. Dalam sains komputer vektor digunakan untuk pembuatan gravis. Grafis adalah gambar yang tersusun dari koordinat-koordinat. Dengan demikian sumber gambar yang muncul pada layar monitor komputer terdiri atas titik-titik yang mempunyai nilai koordinat. Contoh software yang menggunakan vektor adalah CorelDRAW dan Adobe Illustrator. Dalam software komputer seperti AutoCAD, Google SketchUp dll, terdapat penghitungan vektor yang terkomputerisasi.
5. Kapal selam: kapal. Selam ini di beri rongga udara yang berfungsi sebai tempat masuk dan kluarnya air atau udara. Ketika rongga tersebut berisi udara ,volume air di yang pindahkan sama dengan berat kaPal sehingga kapal selam bisa

mengapung.dan jika tutup udara Pada rongga di buka kembali maka volume air pada rongga akan bertambah sehingga kapal selam tenggelam.

Soal Pilihan Berganda Vektor

1. Diketahui a = t **i** - 8 **j** + h **k** dan b = (t +2) **i** + 4 **j** + 2 **k**. Jika a = - b maka vektor a dapat dinyatakan ...

A. i + 8j + 2 k

B. i + 8 j - 2k

C. i - 8j + 2k

D. - i - 8j + 2k

E. - i - 8j - 2k

2. Jika vektor a = 10i + 6 j - 3k dan b = 8 i + 3 j + 3k serta c = a - b, maka vektor satuan yang searah dengan c adalah...

A. 6/7 i + 2/7 j + 3/7 k

B. 2/7 i + 3/7 j - 6/7 k

C. 2/7 i - 3/7 j + 6/7 k

D. 6/7 i - 3/7 j - 2/j k

E. -2/7 i + 6/7 j - 3/7 k

3. Diketahui titik-titik **A** (2, 5, 2), **B** (3, 2, -1), **C** (2, 2, 2). Jika a = AB dan b = CA dan c = b - a maka vektor c adalah...

A. (1,5,3)

B. (-1,5,3)

C. (-1,0,3)

D. (-1,3,5)

E. (-1,-3,5)

4. Diketahui U = 3 i + 2 j + k dan v = 2i + j dimana W = 3 U - 4 V maka besar W =...

A. $\sqrt{5}$

B. $\sqrt{7}$

C. $\sqrt{11}$

D. $\sqrt{13}$

E. $\sqrt{14}$

5. Diketahui vektor u = 2 i - 3 j + 5 k dan v = - 3 i - 5 j + 2 k menga[it sudut Θ. Maka nilai tan Θ adalah...

A. √2

B. √3

C. √5

D. √6

E. 1

6. Jika a = i - 2j + k, b = 2i - 2j - 3k dan c = -i + j + 2k, maka 2a - 3b - 5 c sama dengan...

A. i + j + k

B. 2i - 5j + k

C. 5i - 2j + k

D. 5i + 2j + k

E. 5 i - 2 j - k

7. Jika vektor u dan vektor v membentuk sudut 60 derajat dimana IuI = 4 dan IvI = 2, maka u (v + u) =

A. 13

B. 15

C. 17

D. 19

E. 20

8. Diketahui titik-titik A (3,-1,0), B(2,4,1) dan C(1.0,5). Maka panjang proyeksi vektor AB pada vektor BC adalah...

A. 1/5 √30

B. 2/5 √30

C. 3/5 √30

D. 4/5 √30

E. $\sqrt{30}$

9. Vektor-vektor u = 2i - mj + k dan v = 5i + j - 2k saling tegak lurus. Maka harga m haruslah...

A. 2

B. 4

C. 6

D. 8

E. 10

10. Diketahui D adalah titik berat segitiga ABC dimana A(2,3,-2), B(-4,1,2) dan C(8,5,-3). Maka panjang vektor posisi d sama dengan:

A. 1

B. 2

C. $\sqrt{5}$

D. $\sqrt{10}$

E. $\sqrt{14}$

Soal Essay Vektor

1. Dua buah gaya saling tegak lurus, besarnya masing-masing 3 N dan 4 N. Besar resultan kedua gaya tersebut adalah …
2. Jika besar vektor A = 4 satuan, membentuk sudut 30o dengan sumbu x positip, maka besar vektor tersebut dalam sumbu x dan sumbu y adalah …
3. Dua buah vektor gaya F1 dan F2 masing-masing besarnya 5 N dan 12 N, bertitik tangkap sama dan saling mengapit sudut 60°, berapakah nilai resultan dari kedua vektor tersebut?
4. V1 = 20 satuan dan V2 = 20 satuan. Berapa besar vektor resultan ?
5. Seorang anak berlari menempuh jarak 80 m ke utara, kemudian membelok ke timur 80 m dan ke selatan 20 meter. Berapakah besar perpindahan yang dilakukan anak tersebut

DAFTAR PUSTAKA

Aidi, M. N., & Djuraidah, A. (2012). Pengantar Peluang. Bogor: IPB Press.

Andi Wijaya dkk. 2014. Matematika Ekonomi I. Jakarta: Mitra Wacana Media.

Ardianti, R. 2020. Bahan Ajar Modul Determinan Matriks. Sukabumi. file:///C:/Users/acer/Downloads/155727-1601476139%20(3).pdf

Arianto, N. 2013. *Matematika Terapan Untuk Ekonomi*. Bandug: Pustaka Setia Bandung

Ashwat. 2018. Matematika Ekonomi.

file:///C:/Users/acer/Downloads/4.-Matriks-dan-Determinan%20(1).pdf

Assauri, S. 2009. *Matematika Ekonomi* Edisi 2. Jakarta : Rajawali Pers.

Astuti, D. 2019. Matriks. Barito Timur: Direktorat Pembinaan SMA - Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan. file:///C:/Users/acer/Downloads/MATRIK%20(4).pdf

B, Mesra. 2016. *Penerapan Ilmu Matematika dalam Ekonomi & Bisnis*. Yogyakarta : Deepublish https://images.app.goo.gl/VdXeXT1qCDSL1p4D7

Ciang, A. C., & Wainwright, K. (2005). Dasar-Dasar Matematika Ekonomi Edisi Keempat Jilid 1. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Djohan, Warsoma, dan Wono Setya Budhi. 2007. Dikdat Kalkulus 1. Bandung : Institut Teknologi Bandung

Dumairy, N. dkk. (2013). *Matematika Terapan Untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta: BPFE.

Dumairy. 2015. Matematika Terapan Untuk Bisnis dan Ekonomi. Yogyakarta. BPFE-Yogyakarta.

Grasindo, T. (2015). Super Book Ringkasan Materi & Soal Jawab. Jakarta: Gramedia Widiasarana Indonesia.

Haryatmi, S. 2017. Metode Statistika Multivariat. Jakarta: Prentice Hall Inc file:///C:/Users/acer/Downloads/matrikss%20(6).pdf

Hasanah, N. 2017. Relasi dan Fungsi file:///C:/Users/acer/Downloads/Matematika%20Diskrit%202%20(2).pdf

Hayati, I. (2021). Matematika Ekonomi. Bandung: Media Sains Indonesia.

Heri, R. (2009). *Buku Ajar Kalkulus 1*. Semarang : Universitas Diponegoro

Heri, Robertus. 2009. Buku Ajar Kalkulus 1. Semarang : Universitas Diponegoro

Hidayat, W. (2012). *Matematika Ekonomi*. Jakarta : Universitas Terbuka.

Hidayat, Wahyu. 2012. Matematika Ekonomi. Jakarta : Universitas Terbuka

Jakaria, E. (2009). *Matematika Ekonomi Untuk Ilmu Ekonomi dan Bisnis Edisi kedua*. Jakarta : Andrea.

Jakaria, Eleonora. 2019 Matematika Ekonomi Untuk Ilmu Ekonomi dan Bisnis, edisi Kedua. Jakarta : Andrea Publisher

Kalangi, J. (2005). *Matematik Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta : Penerbit Salemba Empat.

Kalangi, J.B. 2012. Matematika Ekonomi dan Bisnis. Jakarta: Salemba Empat

Kanginan, M. (2005). Cerdas Belajar Matematika untuk Kelas XI Sekolah Menengah Atas/Madrasah Aliyah. Bandung: Grafindo Media Pratama.

Kurniadi, E., & dkk. (2021). Master Matematika SMA. Purwodadi: CV Sarnu Untung.

Lubis, A. 2019. *Himpunan dan Logaritma.* Medan : Unimed Press.

Makmur, & Afrizal, A. (2019). Matematika Ekonomi. Riau: Karoteh Utama.

Makmur, & Afrizal, A. (2019). Matematika Ekonomi. Riau: Karoteh Utama.

Markaban. 2009. Relasi dan Fungsi. Depok: Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan Matematika file:///C:/Users/acer/Downloads/RELASIDANFUNGSI%20(2).pdf

Mesra. (2016). Penerapan Ilmu Matematika dalam Ekonomi & Bisnis. Yogyakarta: Deepublish.

Murtalib. (2020). Matematika Diskrit Berkarakter KKNI. Nusa Tenggara Barat: STKIP Bima.

Nuryanto. 2017. *Matematika Ekonomi* I. Jakarta: Universitas Gunadarma

Pesta, & Anwar, C. (2008). Matematika Aplikasi untuk SMA dan MA kelas XII. Jakarta: Pusat Perbukuan.

Prasetyawan, E. Dameis, A. 2019. *Matematika Ekonomi*. Banten: UNPAM PRES

Prayudi. 2006. Kalkulus: Fungsi Satu Variabel. Jogjakarta: Graha Ilmu

Program Teknik Informatika. 2011. Relasi dan Fungsi. Padang file:///C:/Users/acer/Downloads/4.RelasidanFungsi%20222%20(3).pdf

Purcell, E.J, dan Dale Varberg. 2005. Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1. Jakarta: Erlangga

R., W. H., & Jihadi, M. (2018). Matematika Ekonomi. Malang: Universitas Muhammadiyah Malang.

Raharjo, M. 2009. Vektor. Yogyakarta: Departemen Pendidikan Nasional file:///C:/Users/acer/Downloads/marsudi-vektor-sma-lanjut%20(2)%20(1).pdf

Rahayu,S. Dinarosi, -. *Buku Ajar Teori Ekonomi Mikro*. Palembang: Universita Muhammadiyah Palembang

Rianto, M. (2013). *Matematika Terapan Untuk Ekonomi. Bandung*: Pustaka Setia.

Rianto, M. 2013. *Matematika Terapan Untuk Ekonomi.* Bandung : Pustaka Setia.

Rosjanuardi, R. 2017. Himpunan dan Fungsi.
file:///C:/Users/acer/Downloads/MPMT5104-M1%20(2).pdf
file:///C:/Users/acer/Downloads/relasi-dan-fungsi%20(2).pdf
file:///C:/Users/acer/Downloads/RELASI_DAN_FUNGSI%20(2).pdf
file:///C:/Users/acer/Downloads/las-relasi-dan-fungsi%20(2).pdf

Rusli, M., dkk. 2018. *Logika & Matematika.* Denpasar : Penerbit Andi.

Samuel, H. (2020). Matematika Ekonomi. Depok: PT Rajagrafindo Persada.

Samuel, H. (2020). Matematika Ekonomi. Depok: Rajawali.

Septiana, A., & Tsulutsya, F. B. (2018). Matematika Untuk Ekonomi dan Bisnis Konsep Dasar dan Aplikasi. Pamekasan: Duta Media Publishing.

Setyawan, F. (2012). Sejarah Teori Peluang dan Genetika Peluang. Jakarta: Balai Pustaka.

Siang, J. 2014. *Logika Matematika.* Yogyakarta : Andi Yogyakarta.

Siswanto, & Supraptinah, U. (2009). *Matematika Inovatif Konsep dan Aplikasinya 2.* Jakarta: Pusat Perbukuan.

SMA Negeri 5 Malang. 2017. Modul Matematika. Malang
file:///C:/Users/acer/Downloads/modul%20matriks%20smk%20kelas%20x%20(4).pdf

Soedarmadi. 2019. *Matematika Ekonomi*. Semarang: Universitas Press

Subanti, S.2015. *Matematika Ekonomi*. SurakEarta: UNS Press

Subanti, Sri. 2015. *Matematika Ekonomi*. Jawa Tengah: UNS

Sujalu, A. (2021). *Matematika Ekonomi.* Yogyakarta : Zahir Publishing.

Sujalu, A. P., Soegiarto, E., & Ruliana, T. (2021). Matematika Ekonomi. Yogyakarta: Zahir Publishing.

Sumani; Sulistyowati. 2017. Matriks. Pasuruan: E-learning matematika.
file:///C:/Users/acer/Downloads/Modul_matematika_matriks%20(2)%20(6).pdf

Sunaryo. 2017. *Aplikasi Matematika Untuk Ekonomi dan Bisnis*. Malang: UB Press

Sunyoto, D. (2009). *Dasar-Dasar Matematika Ekonomi Terapan*. Jakarta : Total Media

Sunyoto, Danang. 2009. *Dasar-Dasar Matematika Ekonomi Terapan*. Jakarta : Total Media

Susanti, R. D. (2019). *Matematika Penerapannya dalam Ekonomi.* Malang: UMMPress.

Susilo, F. 2012. *Landasan Matematika.* Yogyakarta : Graha Ilmu.

Triyawan, A., Nashruddin, Z., & S, T. W. (2020). *Matematika Ekonomi.* Makasar: Yayasan Barcode.

Tsulutsya,F; Septiana,A. 2017. *Matematika Untuk Ekonomi dan Bisnis*. Jawa Timur: Dita Media Publishing

Wirawan, N. 2017. *Cara Mudah Memahami Matematika Ekonomi dan Bisnis*. Bali: Kerara Emas

Wivrawan, N. 2017*. Matematika Ekonomi dan Bisnis*. Bali: Keraras Emas