

PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF SUPERSTAR

Ismail Kaloko¹, Faiz Ahyaningsih²

¹Mahasiswa Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Medan
E-mail: ismail.kaloko@yahoo.com

²Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Medan

ABSTRAK

Pelabelan graceful didefinisikan sebagai fungsi g dari suatu graf G dengan V simpul, jika g adalah fungsi injektif dari simpul-simpul G ke himpunan $\{0,1,2, \dots, E\}$ sedemikian hingga setiap busur uv diberi label dengan $g(uv) = |g(u) - g(v)|$ menghasilkan label-label yang berbeda pada setiap busur. Suatu graf disebut graf superstar (graf spider dalam beberapa artikel) jika graf tersebut memuat m graf lintasan P_n dengan 1 titik akhir di setiap lintasan P_n saling bersekutu pada 1 titik, yang kemudian titik tersebut disebut titik pusat. Graf superstar dinotasikan dengan $S_{m,n}$ dengan m adalah banyak lintasan dan n adalah banyak titik di setiap lintasan. Pada makalah ini ditunjukkan bahwa graf superstar merupakan graf graceful jika memiliki panjang kaki $n + i$ dengan $i = 0,1$.

Kata Kunci: Pelabelan Graceful, Graf Superstar.

ABSTRACT

Graceful labeling defined as a g function of a G graph with V vertices, if g is injective function of the G vertices to the set $\{0,1,2, \dots, E\}$ such that each arc is labeled with $g(uv) = |g(u) - g(v)|$ produce different labels on each arc. A graph is called superstar graph (spider graph in some articles) if the graph contains m track graph P_n with one end point in each track P_n allied to each other at one point, then this point is called the focal point. Superstar graph denoted by $S_{m,n}$ with m is a lot of track and n is a lot of vertices in each track. This paper pointed out that the superstar graph is graceful graph if it have leg length $n + i$ with $i = 0,1$.

Keywords: Graceful labeling, Superstar graph.

PENDAHULUAN

Dewasa ini semakin banyak hal-hal yang kita alami dalam keseharian kita terkait dengan objek diskrit dan relasi antar objek tersebut. Contohnya jembatan yang menghubungkan satu tempat dengan tempat lainnya. Tempat-tempat dalam hal ini merupakan objek diskrit, sedangkan jembatan merelasikan antar objek tersebut. Teori graf digunakan untuk menyederhanakan suatu masalah dan mempermudah penyelesaiannya.

Pada perkembangannya graf menjadi salah satu cabang matematika yang

berkembang pesat dan menyebabkan banyak penemuan baru. Pelabelan graf merupakan salah satu topik dalam graf. Secara umum kajiannya merupakan graf yang direpresentasikan oleh titik, sisi, dan himpunan bilangan asli yang disebut label. Pertama kali diperkenalkan oleh Sadlack (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970). Pelabelan graf sangat berguna untuk berbagai aplikasi. Pelabelan berguna dalam masalah dekomposisi graf. Pelabelan graf memiliki beberapa aplikasi dalam sinar-X, radar, jaringan komunikasi,

teori desain, astronomi, ilmu komputer, dan kombinatorika.

Pelabelan graceful didefinisikan sebagai fungsi g dari suatu graf G dengan V simpul, jika g adalah fungsi injektif dari simpul-simpul g ke himpunan $\{0,1,2, \dots, |E|\}$ sedemikian hingga setiap busur xy diberi label dengan $g(xy) = |g(x) - g(y)|$ menghasilkan label-label berbeda pada busur. Kemudian Golomb mempopulerkan pelabelan tersebut dengan nama pelabelan graceful. Graf yang memiliki pelabelan graceful disebut graf graceful.

Pada teori graf terdapat beberapa jenis graf, salah satunya graf superstar. Graf Superstar adalah graf yang memuat gabungan m graf lintasan P_n dengan 1 titik akhir di setiap lintasan P_n saling bersekutu pada satu titik, yang kemudian disebut dengan titik pusat.

Terdapat beberapa graf superstar yang merupakan graf graceful, misalnya graf superstar $S_{5,2}$. Graf ini memenuhi definisi graf graceful setelah dilabeli dengan pelabelan graceful. Namun, terdapat juga graf superstar yang sebaliknya merupakan graf non graceful. Misalnya graf superstar $S_{3,(4,2,2)}$. Hal ini membuat penulis bertujuan meneliti ciri-ciri apa saja yang mempengaruhi suatu graf superstar sehingga graf tersebut merupakan graf graceful.

METODE PENELITIAN

Jenis penelitian yang digunakan adalah studi literatur yaitu metode yang penelitiannya dilakukan dengan studi kepustakaan dan mempelajari karya-karya ilmiah yang disajikan dalam bentuk buku, teks dan dokumen yang berkaitan dengan topik pembahasan.

Prosedur Penelitian

Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah

1. Menyajikan beberapa definisi dan konsep dasar teori graf.
 - a) Menyajikan tentang sejarah graf.
 - b) Menyajikan tentang definisi graf.
 - c) Menyajikan tentang terminologi graf.
 - d) Menyajikan tentang jenis-jenis graf.
 - e) Menyajikan tentang jenis-jenis graf khusus.
 - f) Menyajikan tentang pemetaan.
 - g) Menyajikan tentang pelabelan graceful.
2. Melakukan pelabelan graceful pada beberapa jenis graf superstar.
3. Meneliti ciri-ciri graf superstar yang merupakan graf graceful.
4. Menarik kesimpulan.

PEMBAHASAN

Defenisi Graf

Suatu graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) , ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (*Vertices* atau *node*) dan E adalah himpunan sisi (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang simpul.

Simpul pada graf dapat dinomori dengan huruf, seperti $a, b, c, \dots, v, w, \dots$, dengan bilangan asli $1, 2, 3, \dots$, atau gabungan keduanya. Sedangkan sisi yang menghubungkan simpul u dengan simpul v dinyatakan dengan pasangan (u, v) atau dinyatakan dengan lambing e_1, e_2, \dots . Dengan kata lain, jika e adalah sisi yang menghubungkan simpul u dengan simpul v , maka e dapat ditulis sebagai

$$e = (u, v)$$

Secara geometri graf digambarkan sebagai sekumpulan noktah (simpul) di dalam bidang dwimatra yang dihubungkan sekumpulan garis (jalur).

Jenis-Jenis Graf Khusus

Graf Lintasan

Graf dengan $n + 1$ simpul yaitu $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ dan n busur $x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{n-1}x_n$ disebut graf lintasan P_n dengan panjang n .

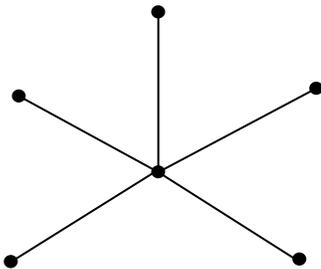
Contoh : 

Gambar 1: Graf Lintasan P_4

Graf Star

Graf Star adalah graf yang dibangun dari 1 simpul pusat dengan menambahkan sejumlah n simpul daun pada simpul pusat tersebut. Graf star memiliki $E + 1$ simpul dan E jalur. Graf star dinotasikan dengan S_n .

Contoh :

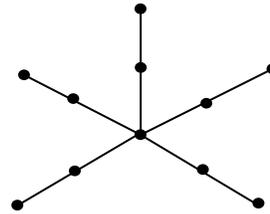


Gambar 2. Graf Star S_5

Graf Superstar

Suatu graf disebut graf superstar (graf spider dalam beberapa artikel) jika graf tersebut memuat m graf lintasan P_n dengan 1 titik akhir di setiap lintasan P_n saling bersekutu pada 1 titik, yang kemudian titik tersebut disebut titik pusat. Graf superstar dinotasikan dengan $S_{m,n}$ dengan m adalah banyak lintasan dan n adalah banyak titik di setiap lintasan (Shiu dkk : 1998).

Contoh :

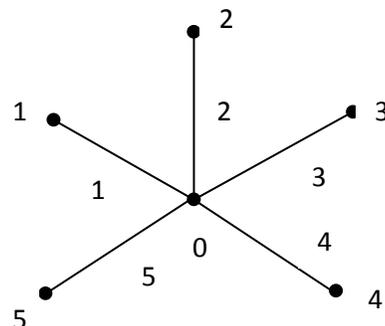


Gambar 3: Graf Superstar $S_{5,2}$

Pelabelan Graceful

Pelabelan graceful didefinisikan sebagai fungsi g dari suatu graf G dengan V simpul, jika g adalah fungsi injektif dari simpul-simpul G ke himpunan $\{0,1,2, \dots, E\}$ sedemikian hingga setiap busur xy diberi label dengan $g(xy) = |g(x) - g(y)|$ menghasilkan label-label yang berbeda pada setiap busur. Selanjutnya Golomb menyebut pelabelan ini sebagai pelabelan graceful.

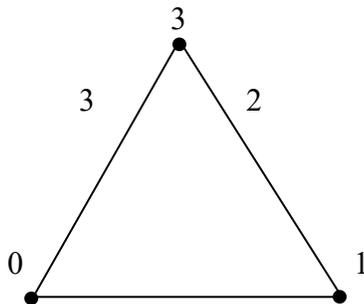
Galian telah menuliskan beberapa graf yang dapat dilabeli dengan pelabelan graceful. Beberapa diantaranya adalah graf lintasan, graf caterpillar, dan graf star. Graf bintang jelas merupakan graf graceful dengan konstruksi pelabelan simpul pusat diberikan label 0 dan simpul-simpul ujungnya diberikan label 1, 2, 3, dan seterusnya. Pada gambar berikut akan diberikan contoh pelabelan graceful pada graf star S_5 .



Gambar 4: Pelabelan Graceful pada Graf Star S_5 .

Pada pelabelan graceful setiap simpul diberikan label dari $0, 1, 2, \dots, E$ maka terdapat $E + 1$ nilai untuk melabelkan simpulnya. Pada graf yang memiliki $V < E + 1$ maka tidak semua label harus digunakan. Sebagai contoh adalah graf lingkaran.

Pada gambar berikut diberikan contoh pelabelan graceful pada graf lingkaran C_3 . Terlihat bahwa label 2 tidak dipergunakan dalam melabeli simpulnya.



Gambar 5: Pelabelan Graceful pada Graf lingkaran C_3 .

Graf graceful tidak mungkin dikonstruksi pada graf yang memiliki $V > E + 1$. Untuk graf jenis ini harus dilabeli dengan pelabelan yang lain.

Metode Pelabelan Graceful

Metode pelabelan graceful pada graf superstar $S_{m,n}$ ($m = \text{ganjil}$).

1. Notasikan setiap kaki pada graf dengan $L_1, L_2, L_3, \dots, L_m$.
2. Notasikan titik tengah pada graf dengan v^* dan $v_{i,j}$ dinotasikan untuk simpul yang berada pada L_i dan berjarak j dari v^* .
3. Labeli setiap simpul dengan pelabelan \emptyset yang didefinisikan sebagai berikut :
 - i. $\emptyset(v^*) = 0$

- ii. Jika i dan j ganjil, $\emptyset(v_{i,j}) = E - \frac{i-1}{2} - \frac{(j-1)l}{2}$,
- iii. Jika i dan j genap, $\emptyset(v_{i,j}) = E - \frac{l-1}{2} - \frac{i}{2} - \frac{(j-2)l}{2}$,
- iv. Jika i genap dan j ganjil, $\emptyset(v_{i,j}) = \frac{i}{2} + \frac{(j-1)l}{2}$, dan
- v. Jika i ganjil dan j genap, $\emptyset(v_{i,j}) = \frac{l-1}{2} + \frac{i+1}{2} + \frac{(j-2)l}{2}$,

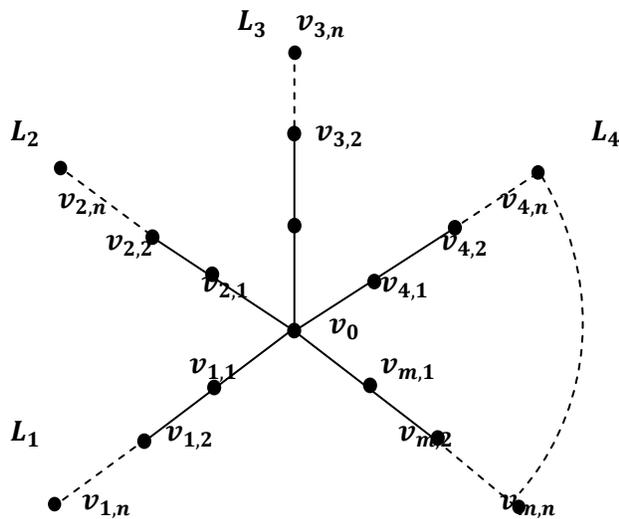
Aplikasi Pelabelan Graceful

Pelabelan graceful sampai saat ini dapat diaplikasi ke beberapa problem di kehidupan sehari-hari. Pelabelan graceful dapat diaplikasikan di bidang sektor komunikasi dan transportasi, navigasi geografis, radar, penyimpanan data, dan membuat kode rahasia. Pada bab ini hanya akan dibahas mengenai aplikasi pelabelan graceful pada graf superstar $S_{9,3}$ dalam hal menjaga keamanan data-data khususnya dalam dunia internet.

Contoh kasus sebuah perusahaan yang ingin mengirim pesan singkat misalnya "Matematika" melalui jaringan internet. Untuk menjaga keamanan data dikarenakan seringnya terjadi kasus pembobolan data maka perusahaan mengubah pesannya tersebut menjadi sebuah kode rahasia sehingga pesan tersebut hanya bisa dibaca oleh pengirim dan penerima. Dalam kasus ini, bisa digunakan teori pelabelan graceful pada graf superstar $S_{9,3}$.

Pelabelan Graceful pada Graf Superstar

$S_{m,n}$



Gambar 6: Graf Superstar $S_{m,n}$

Setelah graf superstar $S_{m,n}$ dilabeli dengan metode pelabelan graceful maka diperoleh

$$\begin{aligned} \emptyset(V(S_{m,n})) = \{ & 0, 1, 2, \dots, \\ & \frac{l-1}{2} + 1, \frac{l-1}{2} + 2, \frac{l-1}{2} + 3, \dots, l + 1, l + \\ & 2, l + 3, \dots, \frac{l-1}{2} + l + 1, \frac{l-1}{2} + l + 2, \frac{l-1}{2} + \\ & l + \frac{m+1}{2}, \dots, \frac{(n-1)l}{2} + 1, \frac{(n-1)l}{2} + 2, \dots, \frac{l-1}{2} + \\ & \frac{(n-3)l}{2} + 1, \frac{l-1}{2} + \frac{(n-3)l}{2} + 2, \dots, \frac{l-1}{2} + \\ & \frac{(n-3)l}{2} + \frac{m+1}{2}, mn - \frac{l-1}{2} - \frac{(n-3)l}{2} - \\ & \frac{m-1}{2}, \dots, mn - \frac{l-1}{2} - \frac{(n-3)l}{2} - 2, mn - \frac{l-1}{2} - \\ & \frac{(n-3)l}{2} - 1, mn - \frac{(n-1)l}{2} - \frac{m-1}{2}, \dots, mn - \\ & \frac{(n-1)l}{2} - 2, mn - \frac{(n-1)l}{2} - 1, mn - \frac{(n-1)l}{2}, \\ & mn - l - \frac{l-1}{2} - \frac{m-1}{2}, \dots, mn - l - \frac{l-1}{2} - \\ & 2, mn - l - \frac{l-1}{2} - 1, mn - l - \frac{m-1}{2}, \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & mn - l - 2, mn - l - 1, mn - \frac{l-1}{2} - \\ & \frac{m-1}{2}, \dots, mn - \frac{l-1}{2} - 2, mn - \frac{l-1}{2} - 1, \\ & mn - \frac{m-1}{2}, \dots, mn - 2, mn - 1, mn \}. \end{aligned}$$

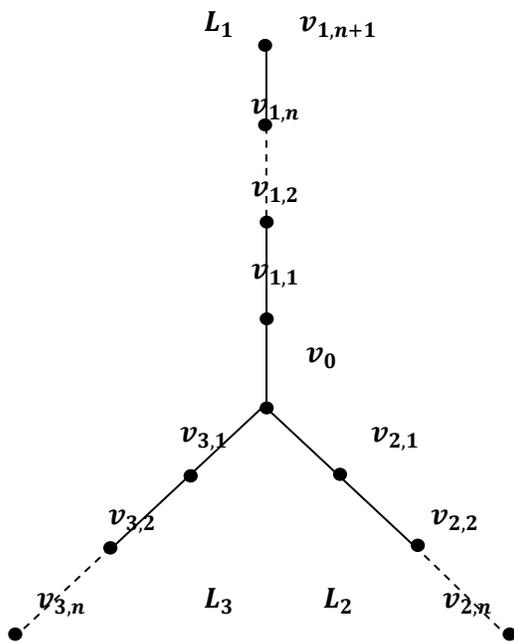
Kemudian diperoleh

$$\begin{aligned} \{\emptyset'(v_{i,j}v_{i,j+1}) | v_{i,j}v_{i,j+1} \in E(S_{m,n})\} = \\ \{ & mn - 2 - \frac{l-1}{2}, mn - 2 - \frac{l-1}{2} - l, mn - 2 - \\ & \frac{l-1}{2} - 2l, \dots, mn - 2 - \frac{l-1}{2} - nl, mn - 4 - \\ & \frac{l-1}{2}, mn - 4 - \frac{l-1}{2} - l, mn - 4 - \frac{l-1}{2} - \\ & 2l, \dots, mn - 4 - \frac{l-1}{2} - nl, mn - 6 - \frac{l-1}{2}, \\ & mn - 6 - \frac{l-1}{2} - l, mn - 6 - \frac{l-1}{2} - 2l, \dots, \\ & mn - 6 - \frac{l-1}{2} - nl, \dots, mn - (m-1) - \frac{l-1}{2}, \\ & mn - (m-1) - \frac{l-1}{2} - l, mn - (m-1) - \\ & \frac{l-1}{2} - 2l, \dots, mn - (m-1) - \frac{l-1}{2} - nl \}. \end{aligned}$$

Berdasarkan pelabelan \emptyset yang didefinisikan pada persamaan (3.1 - 3.5) terlihat bahwa setiap label simpul injektif terhadap himpunan $\{0, 1, 2, \dots, |E|\}$. Kemudian pelabelan \emptyset yang ada pada persamaan (3.6-3.9) menghasilkan label-label yang berbeda pada setiap jalur. Dengan demikian telah ditunjukkan bahwa graf superstar $S_{m,n}$ memiliki pelabelan graceful.

Pelabelan Graceful pada Graf Superstar

$S_{3,(n+1,n,n)}$



Gambar 7: Graf Superstar $S_{3,(n+1,n,n)}$

Setelah graf superstar $S_{3,(n+1,n,n)}$ dilabeli dengan metode pelabelan graceful maka diperoleh $\phi(V(S_{3,(n+1,n,n)})) = \left\{ 0, 1, \frac{l-1}{2} + 1, \frac{l-1}{2} + 2, 1 + l, \frac{l-1}{2} + 1 + l, \frac{l-1}{2} + 2 + l, 1 + 2l, \frac{l-1}{2} + 1 + 2l, \frac{l-1}{2} + 2 + 2l, \dots, 1 + \frac{(n-1)l}{2}, \frac{l-1}{2} + 1 + \frac{(n-3)l}{2}, \frac{l-1}{2} + 2 + \frac{(n-3)l}{2}, \frac{l-1}{2} + 1 + \frac{(n-1)l}{2}, 3n - \frac{(n-1)l}{2} - 1, 3n - \frac{(n-1)l}{2}, 3n - \frac{(n-1)l}{2}, 3n + 1 - \frac{(n-1)l}{2}, \dots, 3n - \frac{l-1}{2} - 2l - 1, 3n - \frac{l-1}{2} - 2l, 3n - 2l, 3n - 2l + 1, 3n - \frac{l-1}{2} - l - 1, 3n - \frac{l-1}{2} - l, 3n - l, 3n - l + 1, 3n - \frac{l-1}{2} - 1, 3n - \frac{l-1}{2}, 3n, 3n + 1 \right\}$

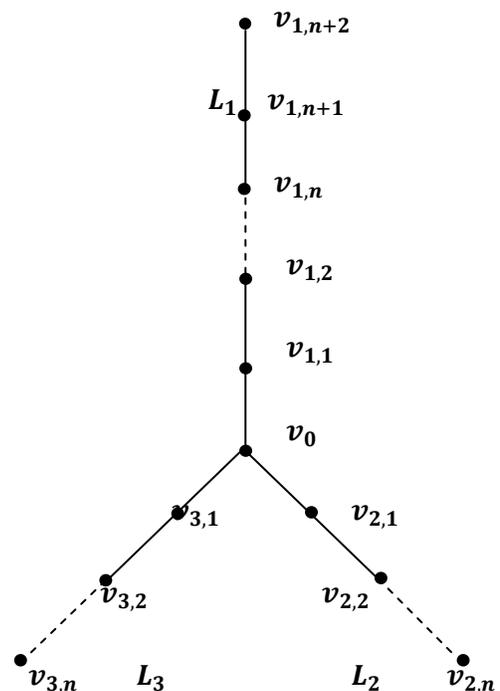
Kemudian diperoleh $\{\phi'(E(S_{3,(n+1,n,n)}))\} = \left\{ 3n - 1 - \frac{l-1}{2}, 3n - 1 - \frac{l-1}{2} - l, 3n - 1 - \frac{l-1}{2} - 2l, 3n - 1 - \frac{l-1}{2} - \dots \right\}$

$3l, \dots, 3n - 1 - \frac{l-1}{2} - (n-1)l, 3n + 1, 3n, 1, 3n - \frac{l-1}{2}, 3n - l - \frac{l-1}{2}, 3n - 2l - \frac{l-1}{2}, 3n - 3l - \frac{l-1}{2}, \dots, 3n - (n-1)l - \frac{l-1}{2}, 3n - nl - \frac{l-1}{2}, 3n - 2 - \frac{l-1}{2}, 3n - 2 - \frac{l-1}{2} - l, 3n - 2 - \frac{l-1}{2} - 2l, 3n - 2 - \frac{l-1}{2} - 3l, \dots, 3n - 2 - \frac{l-1}{2} - (n-1)l \}$.

Berdasarkan pelabelan ϕ yang didefinisikan pada persamaan (3.1 - 3.5) terlihat bahwa setiap label simpul injektif terhadap himpunan $\{0, 1, 2, \dots, |E|\}$. Kemudian pelabelan ϕ yang ada pada persamaan (3.10 - 3.14) menghasilkan label-label yang berbeda pada setiap jalur. Dengan demikian telah ditunjukkan bahwa graf superstar $S_{3,(n+1,n,n)}$ memiliki pelabelan graceful.

Pelabelan Graceful pada Graf Superstar

$S_{3,(n+2,n,n)}$



Gambar 8:Graf Superstar $S_{3,(n+2,n,n)}$

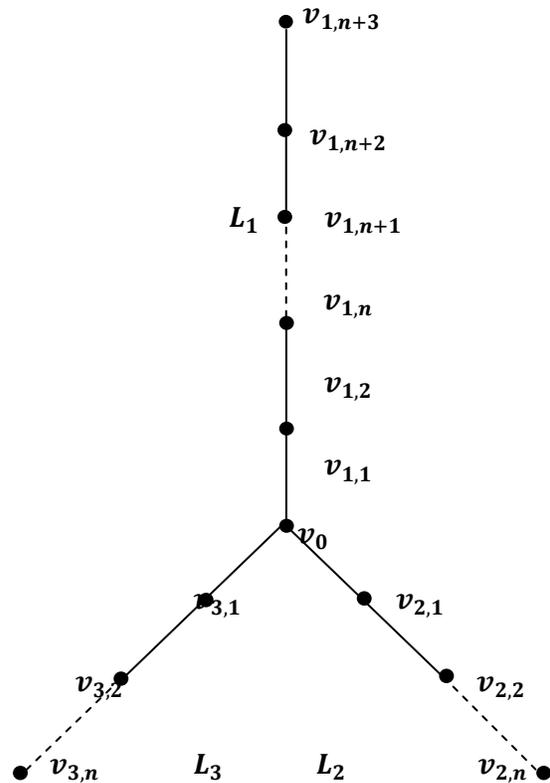
Setelah graf superstar $S_{3,(n+2,n,n)}$ dilabeli dengan metode pelabelan graceful

maka diperoleh $\emptyset(V(S_{3,(n+2,n,n)})) =$

$$\left\{ 1, \frac{l-1}{2} + 1, \frac{l-1}{2} + 2, 1 + l, \frac{l-1}{2} + 1 + l, \frac{l-1}{2} + 2 + l, 1 + 2l, \frac{l-1}{2} + 1 + 2l, \frac{l-1}{2} + 2 + 2l, \dots, 1 + \frac{(n-1)l}{2}, \frac{l-1}{2} + 1 + \frac{(n-3)l}{2}, \frac{l-1}{2} + 2 + \frac{(n-3)l}{2}, \frac{l-1}{2} + 1 + \frac{(n-1)l}{2}, 3n - \frac{l-1}{2} - \frac{(n-3)l}{2} + 1, 3n + 2 - \frac{(n+1)l}{2}, 3n + 1 - \frac{(n-1)l}{2}, 3n + 2 - \frac{(n-1)l}{2}, \dots, 3n - \frac{l-1}{2} - 2l + 1, 3n + 1 - 2l, 3n + 2 - 2l, 3n - \frac{l-1}{2} - l + 1, 3n + 1 - l, 3n + 2 - l, 3n - \frac{l-1}{2} + 1, 3n + 1, 3n + 2 \right\}.$$

Terdapatnya 2 simpul yaitu $v_{1,n+1}$ dan $v_{1,n+2}$ dengan label yang sama ini menunjukkan bahwa pemetaan \emptyset dari himpunan V ke himpunan $\{0, 1, 2, \dots, |E|\}$. Dengan demikian telah ditunjukkan bahwa graf superstar $S_{3,(n+2,n,n)}$ bukan merupakan graf graceful.

Pelabelan Graceful pada Graf Superstar $S_{3,(n+3,n,n)}$



Gambar 9: Graf Superstar $S_{3,(n+3,n,n)}$

Setelah graf superstar $S_{3,(n+2,n,n)}$ dilabeli dengan metode pelabelan graceful maka diperoleh $\emptyset(V(S_{3,(n+3,n,n)})) =$

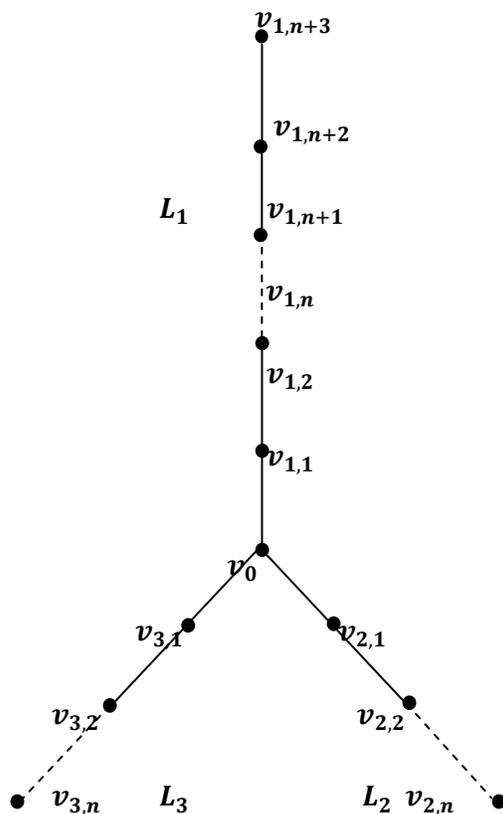
$$\left\{ 1, \frac{l-1}{2} + 1, \frac{l-1}{2} + 2, 1 + l, \frac{l-1}{2} + 1 + l, \frac{l-1}{2} + 2 + l, 1 + 2l, \frac{l-1}{2} + 1 + 2l, \frac{l-1}{2} + 2 + 2l, \dots, 1 + \frac{(n-1)l}{2}, \frac{l-1}{2} + 1 + \frac{(n-3)l}{2}, \frac{l-1}{2} + 2 + \frac{(n-3)l}{2}, \frac{l-1}{2} + 1 + \frac{(n-1)l}{2}, \frac{l-1}{2} + 1 + \frac{(n+1)l}{2}, 3n - \frac{l-1}{2} - \frac{(n-3)l}{2} + 2, 3n + 3 - \frac{(n+1)l}{2}, 3n + 2 - \frac{(n-1)l}{2}, 3n + 3 - \frac{(n-1)l}{2}, \dots, 3n - \frac{l-1}{2} - 2l + 2, 3n + 2 - 2l, 3n + 3 - 2l, 3n - \frac{l-1}{2} - l + 2, 3n + \right.$$

$$2 - l, 3n + 3 - l, 3n - \frac{l-1}{2} + 2, 3n + 2, 3n + 3 \}.$$

Terdapatnya 2 simpul yaitu $v_{1,n+2}$ dan $v_{2,n}$ dengan label yang sama menunjukkan bahwa pemetaan \emptyset dari himpunan V ke himpunan $\{0, 1, 2, \dots, |E|\}$. Dengan demikian telah ditunjukkan bahwa graf superstar $S_{3(n+3,n,n)}$ bukan merupakan graf graceful.

Pelabelan Graceful pada Graf Superstar

$S_{3,(n+4,n,n)}$



Gambar 10: Graf Superstar $S_{3,(n+4,n,n)}$

Setelah graf superstar $S_{3,(n+2,n,n)}$ dilabeli dengan metode pelabelan graceful

maka diperoleh $\emptyset(V(S_{3,(n+4,n,n)})) = \left\{ 1, \frac{l-1}{2} + 1, \frac{l-1}{2} + 2, 1 + l, \frac{l-1}{2} + 1 + l, \frac{l-1}{2} + 2 + l, 1 + 2l, \frac{l-1}{2} + 1 + 2l, \frac{l-1}{2} + 2 + 2l, \dots, 1 + \frac{(n-1)l}{2}, \frac{l-1}{2} + 1 + \frac{(n-2)l}{2}, \frac{l-1}{2} + 2 + \frac{(n-3)l}{2}, \frac{l-1}{2} + 1 + \frac{(n-1)l}{2}, \frac{l-1}{2} + 1 + \frac{(n+1)l}{2}, 3n + 4 - \frac{(n+3)l}{2}, 3n - \frac{l-1}{2} - \frac{(n-3)l}{2} + 3, 3n + 4 - \frac{(n+1)l}{2}, 3n + 3 - \frac{(n-1)l}{2}, 3n + 4 - \frac{(n-1)l}{2}, \dots, 3n - \frac{l-1}{2} - 2l + 3, 3n + 3 - 2l, 3n + 4 - 2l, 3n - \frac{l-1}{2} - l + 3, 3n + 3 - l, 3n + 4 - l, 3n - \frac{l-1}{2} + 3, 3n + 3, 3n + 4 \right\}$.

Terdapatnya 2 simpul yaitu $v_{1,n+4}$ dan $v_{3,n}$ dengan label yang sama menunjukkan bahwa pemetaan \emptyset dari himpunan V ke himpunan $\{0, 1, 2, \dots, |E|\}$. Dengan demikian telah ditunjukkan bahwa graf superstar $S_{3(n+4,n,n)}$ bukan merupakan graf graceful.

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

1. Ciri-ciri dari Graf superstar merupakan graf graceful yaitu jika graf tersebut memiliki panjang kaki $n + i$ dengan $i = 0, 1$.
2. Graf superstar yang memiliki panjang kaki $n + i$ dengan $i \geq 2$ bukan merupakan graf graceful karena terdapat 2 simpul yang memiliki nilai label yang sama.

Saran

Berdasarkan pengkajian yang telah dilakukan, penelitian lebih lanjut dapat dilakukan terhadap pelabelan graceful pada kombinasi graf superstar ataupun graf-graf lainnya. Selain itu, penelitian ini juga bisa

dikembangkan pada aplikasi dari pelabelan graceful.

[12] Saragih, S. (2012). *Struktur Aljabar 1*. Medan : Larispa.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Ahmad, M. (2012). *Pelabelan Graceful dan Pelabelan ρ pada Graf Pot Bunga dan Graf Pohon Palem*. Jakarta : Jurusan Matematika Fakultas MIPA. UI.
- [2] Ali, Gohar. (2005). *Graph Labelings*. Abdus Salam School of Mathematical Sciences GC University Lahore : Pakistan.
- [3] Amri, Z. (2011). *Pelabelan Graceful, Skolem Graceful, dan Pelabelan ρ pada Keluarga Graf Bintang*. Jakarta : Fakultas MIPA. UI.
- [4] Bofill, X. M. (2012). *Graceful Tree Labeling*. Escola Tecnica Superior d'Enginyers de Camins : Barcelona
- [5] Choudum, S. A., Kishore, S. P. (1996). *All 5-Star are skolem graceful*. Indian J. Pure and Appl. Math, 27, 1101-1105.
- [6] Galian, J. A. (2013). *A Dynamic Survey of Graph Labelling*. The Electronic Journal of Combinatorics. 16: ds6.
- [7] Hartsfield, N., Ringel, G. (1994). *Pearls in Graph Theory : A Comprehensive Introduction*. Academic Press.
- [8] Jhonsonbaugh, R. (2001). *Discrete Mathematics, Fifth Edition*. United State of America : Prentice-Hall.
- [9] Munir, R. (2005). *Matematika Diskrit*. Bandung : Informatika.
- [10] Murugan, M. (2013). *(k, d)-Balanced of Uniform k-Distant Trees*. Department of Mathematical Sciences, UTM.
- [11] Shiu, W.C dkk. 1998. *Some k-fold Graceful Labeling of (p, p-1)-graphs*. <http://www.math.hkbu.edu.hk/~wcshiu/PDF/p9830.pdf>. Diakses pada tanggal 6 Oktober 2015.