PENGGUNAAN ALJABAR MATRIKS DALAM SISTEM OPTIK

Oleh
Drs. Henok Siagian,MSi

a. Pendahuluan

Perancang lensa menggunakan optik geometri mencari sinar yang melewati suatu sistem optik untuk menetapkan hasil sistem sebelum lensa tersebut dibentuk. Secara teoritis, sistem optik akan mengumpulkan cahaya dari sebuah titik objek dan memusatkan (mengumpulkan) pada sebuah titik bayang-bayang. Biasanya itik-titik banyangan kabur (blurred). Perancang lensa akan menyetel/menyesuaikan bahan lensa, bentuk dan letaknya guna mencoba mengurangi kekaburan sekaligus untuk menyesuaikan ukuran (size).

Jika pada sistem optik terdapat beberapa elemen- Contohnya, empat atau lima lensa yang merupakan lensa-lensa sebuah foto grafis, kita membutuhkan sistematika pendekatan untuk memudahkan analisa. Sistem pendekatan yang sekarang akan disajikan adalah cara pembentukan bayangan dengan menggunakan matriks untuk menggambarkan perubahan tinggi dan sudut suatu sinar seperti yang dibuat berturut-turut dengan cara pemantulan dan pembiasan melalui sebuah sistem optik. Dengan pendekatan sinar-sinar paraksial, perubahan tinggi dan arah suatu sinar dapat diungkapkan dengan persamaan linier, sehingga pendekatan aljabar matriks ini dapat dilakukan.

Rumus-rumus penentuan sinar yang digunakan oleh perancang lensa dikembangkan dengan menerapkan hukum-hukum pembiasan dan penjalaran sinar, seperti yang didapatkan dari Prinsip Fermat. Persamaan-persamaan yang dihasilkan diganti dengan formalisma matriks karena aljabar matriks memenuhi suatu formalisma yang sangat mudah dipahami sehingga dapat dipakai untuk membahas penjalaran cahaya melalui sistem optik. Dengan menggabungkan matriks-matriks yang menggambarkan pembiasan dan pemantulan, sistem optik yang diberikan dapat dilambangkan dengan satu matriks, sehingga sifat-sifat dasar yang penting dari susunan sistem optik dapat disimpulkan.

B. Matriks Translasi (Translation Matrix)

Kita perhatikan pergeseran sederhana sinar dalam medium homogen seperti gambar 1 berikut :

Gambar 1. Translasi sederhana sebuah sinar.

Pada titik 1, ketinggian dan arah sinar ditunjukkan oleh koordinat (h_1, θ_1). Dari gambar terlihat jelas : $\theta_1 = \theta_2$ (Karena penjalaran sinar seperti garis lurus) dan $h_2 = h_1 + d \tan \theta_1$. Dengan menggunakan pendekatan paraksial : $\tan \theta_1 = \theta_1$; persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk persamaan linier :

$$h_2 = (1)\, h_1 + (d)\, \theta_1$$
$$\theta_2 = (0)\, h_1 + (1)\, \theta_1 \qquad (1)$$

atau dalam notasi matriks :

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

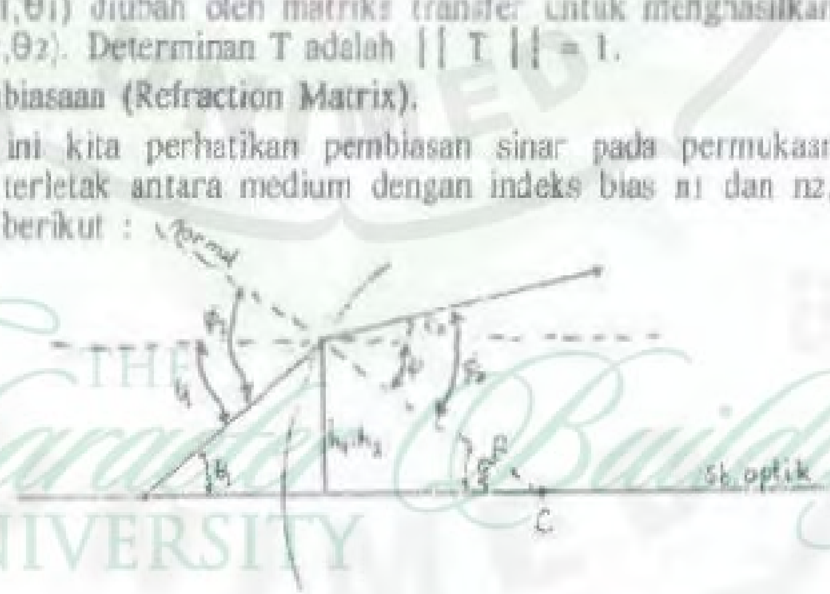
Matriks ini menggambarkan penjalaran sinar dari suatu permukaan ke permukaan yang lain dan disebut "Matriks Transfer".

$$T = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Sinar masuk (h_1, θ_1) diubah oleh matriks transfer untuk menghasilkan sinar keluar (h_2, θ_2). Determinan T adalah $\| T \| = 1$.

C. Matriks Pembiasaan (Refraction Matrix).

Berikut ini kita perhatikan pembiasan sinar pada permukaan lengkung yang terletak antara medium dengan indeks bias n_1 dan n_2, seperti gambar berikut :



Gambar 2. Pembiasan sinar pada permukaan lengkung

Kita perlu menghubungkan koordinat sinar sesudah pembiasan (h_2, θ_2) dengan koordinat sebelum pembiasan (h_1, θ_1). Karena pembiasan terjadi pada satu titik, maka tidak ada perubahan tinggi yaitu $h_1 = h_2$. Sudut θ_2 diperiksa dari gambar 2.

$$\theta_2 = \phi_2 - \psi = \phi_2 - \frac{h_2}{R} \quad \text{dan } \theta_1 = \phi_1 - \psi = \phi_1 - \frac{h_1}{R}$$

Dengan menggabung pendekatan paraksial dan bentuk Hk. Snellius $n_1\phi_1 = n_2\phi_2$, diperoleh :

$$\theta_2 = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)\phi_1 - \frac{h_1}{R} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)\left(\theta_1 + \frac{h_1}{R}\right) - \frac{h_1}{R}$$

$$\text{atau } \theta_2 = \frac{1}{R}\left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right) h_1 + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)\theta_1$$

Persamaan liniernya dapat ditulis :

$$\begin{aligned} h_2 &= (1)\, h_1 + (0)\, \theta_1 \\ \theta_2 &= \frac{1}{R}\left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right) h_1 + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)\theta_1 \end{aligned} \qquad (4)$$

atau bentuk matriks :

$$\begin{bmatrix} h_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R}\left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right) & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Matriks ini mendefinisikan arah baru sinar sesudah sinar tersebut mengalami pembiasan. Determinan M_1 adalah $|M_1| = \frac{n_1}{n_2}$.

Kita gunakan kesepakatan tanda yang sama, jika permukaan pembiasnya cekung, R (jejari) adalah negatif.

Selanjutnya, akan dipenuhi $R \longrightarrow \infty$ menghasilkan matriks pembiasan yang cocok untuk sebuah antarmuka datar (planeinterface), yaitu :

$$M = \begin{bmatrix} h_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

D. Matriks Pemantulan (Reflection Matrik).

Kita perhatikan pemantulan pada permukaan lengkung berikut dimana pada kasus ini diambil cermin cekung (R negatif). Perlu ditambah kesepakatan tanda untuk sudut-sudut yang menggambarkan arah sinar. Sudut-sudut dianggap positif untuk semua sinar yang arahnya ke atas, sebelum atau sesudah dipantulkan, sudut untuk sinar-sinar yang arahnya ke bawah dianggap negatif.

Gambar 3. Pemantulan sinar pada permukaan lengkung

Dari gambar di atas θ_1 dan θ_2 positif, sehingga :

$$\theta_1 = \phi_1 - \phi = \phi_1 - \frac{h_1}{R}$$

$$\theta_2 = \phi_2 + \phi = \phi_2 + \frac{h_2}{R}$$

Dengan menerapkan hukum pemantulan, $\phi_1 = \phi_2$ dan $h_1 = h_2$, persamaan di atas dapat ditulis menjadi:

$$\theta_2 = \phi_2 + \frac{h_2}{R} = \phi_1 + \frac{h_1}{R} = \theta_1 + \frac{2h_1}{R}$$

dan persamaan liniernya :

$$h_2 = (1)\ h_1 + (0)\ \theta_1$$

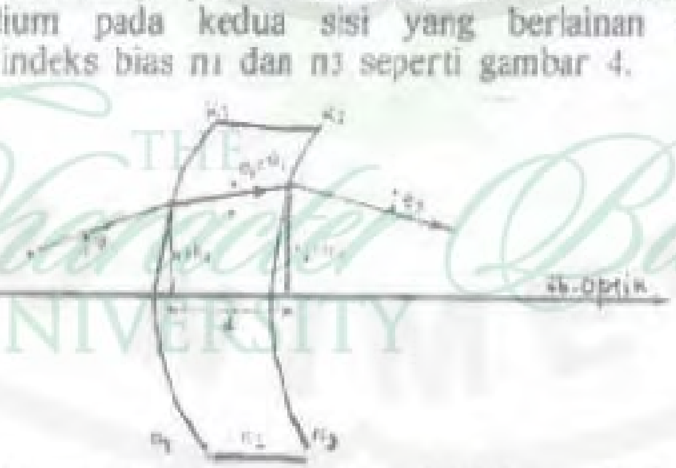
$$\theta_2 = \left(\frac{2}{R}\right) h_1 + (1)\ \theta_1 \qquad (7)$$

Dalam bentuk matriks :

$$\begin{bmatrix} h_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \qquad (8)$$

E. Matriks Lensa Tebal dan Lensa Tipis

Sekarang kita bentuk sebuah matriks yang menggambarkan perjalanan sinar/cahaya pada suatu lensa tebal. Pada umumnya dianggap bahwa medium pada kedua sisi yang berlainan adalah berbeda, mempunyai indeks bias n_1 dan n_3 seperti gambar 4.



Gambar 4. Perjalanan sinar melalui lensa tebal

Sinar yang melewati lensa mengalami dua pembiasan dan satu translasi. Selanjutnya kita memilih lensa sederhana, dengan jejari kurva positif, sehingga kita dapat menuliskan matriks sinar yang melewati lensa tersebut :

$$\mathcal{R}_1 = \begin{bmatrix} h_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = M_1 \begin{bmatrix} h \\ \theta \end{bmatrix} \text{ untuk pembiasan I} \longrightarrow \begin{bmatrix} h_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2 R_1} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \theta \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} h_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = M_2 \begin{bmatrix} h_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \text{ untuk translasi} \longrightarrow \begin{bmatrix} h_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}_2 = \begin{bmatrix} h_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = M_3 \begin{bmatrix} h_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \text{ untuk pembiasan II} \longrightarrow \begin{bmatrix} h_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_3}{n_3 R_2} & \frac{n_2}{n_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Persamaan matriks lensa ini menghasilkan :

$$\begin{bmatrix} h_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} h \\ \theta \end{bmatrix} \quad \text{dengan } M = M_3 M_2 M_1$$

Mengingat perkalian matriks adalah assosiatif dan bukan komutatif , orde yang menurun harus dipertahankan.
Umumnya persamaan matriks dilambangkan oleh

$$\begin{bmatrix} h' \\ \theta' \end{bmatrix} = M_N M_{N-1} \cdots M_2 M_1 \begin{bmatrix} h \\ \theta \end{bmatrix} \tag{9}$$

dengan n = jumlah dari translasi, pemantulan dan pembiasan.
Matriks transfer sinar suatu sistem elemen optik dilambangkan :

$$M = M_N M_{N-1} \cdots M_2 M_1 \tag{10}$$

Hasil ini kita terapkan pada lensa tebal (gambar 4), dengan indeks bias lensa dan ketebalan untuk sinar paraksial adalah d. Dengan mengambil $\mathcal{R}$ lambang matriks pembiasan dan $\mathcal{T}$ lambang matriks translasi, maka matriks lensa tebal tersebut adalah:

$$M = \mathcal{R}_2 \mathcal{T} \mathcal{R}_1 \tag{11}$$

atau

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_3}{n_3 R_2} & \frac{n_2}{n_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2 R_1} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Produk matriks pers (11) disebut juga Matriks Sistem atau Matriks ABCD, sehingga :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2-n_3}{n_3 R_2} & \frac{n_2}{n_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1-n_2}{n_2 R_1} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \qquad (13)$$

Elemen-elemen matriks ABCD diketahui sebagai konstanta Gaussian.

$$A = 1 + \frac{d(n_1-n_2)}{n_2 R_1} \; ; \; C = \frac{1}{n_3} \left[\frac{n_2-n_3}{R_2} + \frac{n_1-n_2}{R_1} + \frac{d(n_1-n_2)(n_2-n_3)}{n_2 R_1 R_2} \right]$$

$$B = \frac{d\, n_1}{n_2} \; ; \; D = \frac{n_2}{n_3} \left[1 + \frac{d(n_2-n_3)}{n_2 R_2} \right]$$

Determinan matriks ABCD adalah :

$$\| M \| = \| R_2 \| \| T \| \| R_1 \| = AD - BC = \frac{n_1}{n_3}$$

Jika indeks bias sama pada awal dan akhir lintasan sinar, maka determinan matriks sistem (matriks ABCD) adalah 1.

Pendekatan yang tepat untuk lensa mengabaikan d (d $\rightarrow$ 0) dan lensa dikelilingi oleh medium yang sama pada tiap sisi ($n_1 = n_3$), maka dapat ditulis :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2-n_1}{n_1 R_2} & \frac{n_2}{n_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1-n_2}{n_2 R_1} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \qquad (14)$$

Jika ketiga matriks dikalikan akan diperoleh :

$$M = \begin{bmatrix} [illegible] & 0 \\ \frac{n_1-n_2}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) & 1 \end{bmatrix} \qquad (15)$$

Elemen matriks pada kolom pertama baris kedua dari pers. (15) dapat diungkapkan sebagai panjang fokus lensa (f), dengan rumus pembuatan lensa :

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2-n_1}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

sehingga matriks transfer lensa tipis disederhanakan menjadi

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \qquad (16)$$

Biasanya, f diambil positif untuk lensa cembung dan negatif untuk lensa cekung.

F. Arti Elemen-elemen Matriks Sistem.

Penggunaan matriks ABCD atau matriks sistem dalam mengevaluasi sistem optik adalah langkah pertama yang diambil dalam mendesain optik. Matriks ini dapat digunakan untuk menentukan ukuran sistem optik, sifat umum komponen-komponen optik dan meramalkan cahaya yang keluar melalui sistem optik. Sekarang kita kaji pengertian berikut, jika tiap elemen matriks sistem adalah nol. Dari pers (9) :

$$\begin{bmatrix} h_f \\ \theta_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_i \\ \theta_i \end{bmatrix} \qquad (17)$$

yang sama dengan persamaan aljabar sebagai berikut:

$$\begin{aligned} h_f &= A\,h_i + B\,\theta_i \\ \theta_f &= C\,h_i + D\,\theta_i \end{aligned} \qquad (18)$$

Berikut ini kita analisa pers. (18) sebagai berikut

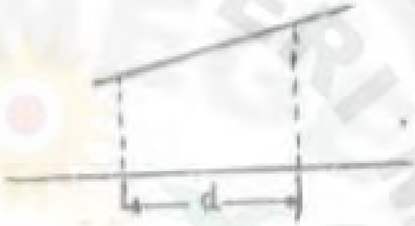
1. Jika $D = 0$, dalam kasus ini $\theta_f = C\,h_i$ tidak bergantung θ_i.
   Karena h_i tetap, ini artinya bahwa semua sinar yang meninggalkan suatu titik dalam bidang masuk akan mempunyai sudut yang sama θ_f pada bidang keluar (tidak bergantung pada sudut datangnya).
2. Jika $A=0$, kasus ini hampir sama seperti kasus 1 di atas.
   Disini $h_f = B\,h_i$, artinya h_f tidak bergantung h_i, sehingga semua sinar yang meninggalkan bidang masuk pada sudut yang sama, bagaimanapun tingginya akan tiba pada tinggi yang sama h_f pada bidang keluar.
3. Jika $B=0$, maka $h_f=A\,h_i$, tidak bergantung pada θ_i.
   Sehingga semua sinar dari satu titik pada ketinggian h_i dalam bidang masuk akan tiba pada titik yang sama dengan ketinggian h_f dalam bidang keluar. Selanjutnya karena $A=h_f/h_i$, maka elemen matriks A menggambarkan perbesaran linier
4. Jika $C=0$, sekarang $\theta_f = D\,\theta_i$, tidak bergantung h_i.
   Kasus ini analog dengan kasus 3, dengan arah diganti tinggi sinar. Sinar datang semua satu arah akan menghasilkan sinar keluar sejajar dalam beberapa arah lain. Disini $=\theta_f/\theta_i$ menggambarkan perbesaran anguler

Kesimpulan.

Dari penjabaran yang telah disajikan di atas, dapat diambil kesimpulan bahwa aljabar matriks sangat tepat dipakai untuk membicarakan penjalaran/perambatan cahaya melalui suatu sistem optik. Berikut ini ringkasan beberapa matriks yang digunakan pada sistem optik:

1. Matriks Translasi.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



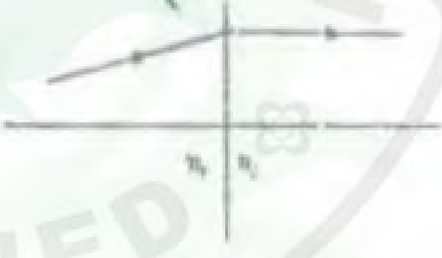
2. Matriks Pembiasan

a. Antarmuka lengkung

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$$

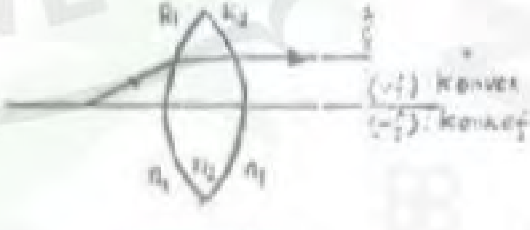
b. Antarmuka datar

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$$



3. Matriks Lensa tipis.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$$



$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

4. Matriks Cermin lengkung.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$$

DAFTAR PUSTAKA

Azzam,R.M.A and Bashara,N.M., 1987. Ellipsometry and Polarization Light, Elsevier Science Publishing Co, Netherlands.

Anton, Howard, 1981. Elementary Liniear Algebra, 3rd Ed., John Willey, New York.

Guenther, Robert D., 1990, Modern Optics, John Willey, New York.

Pedroti-Pedroti, 1993, Intoduction to Optics, Prentice-Hall, New Jersey.

Supranto,J., 1978. Pengantar Matriks, UI Press, Jakartan.

oooOOooo