ISSN 0853-3792

Aplikasi Nilai Eigen pada Pemecahan Persamaan Diferensial

Henok Siagian

Jurusan Fisika, FMIPA, Universitas Negeri Medan
Jl. Willem Iskandar Pasar V, Medan 20221

Abstract

[THE APPLICATION OF EIGEN VALUE TO SOLVE DIFFERENTIAL EQUATIONS] *A simple differential equation system can be written in a matrix notation of $Y' = AY$, where A is a matrix coefficient that can be diagonalized. Eigen values of A is used to find a P matrix that diagonalize A. By substitution of $Y = PU$ and $Y' = PU'$ to find "a new diagonalize system" of $U' = DU$, where $D = P^{-1}AP$. Solution of $U' = DU$ is then used to determine Y from $Y = PU$ equation. These results has been use to solve linear differential equation and its application.*

Kata kunci : Nilai Eigen, persamaan diferensial, matriks

(J. Sains Indon., 28(4): 156-160, 2004)

Pendahuluan

Banyak hukum-hukum fisika dijelaskan dalam persamaan diferensial, yakni persamaan yang melibatkan fungsi-fungsi dan turunan-turunannya. Dari sistem persamaan diferensial yang diketahui disusun sebuah matriks koefisien dan dicarilah nilai-nilai eigen dari matriks tersebut. Persoalan mencari nilai-nilai eigen sebuah matriks atau suatu operator (diferensial) pada umumnya, muncul dalam beragam masalah fisika. Sebagai contoh seperti penentuan frekuensi dan keadaan getar sistem benda banyak yang digandengkan dengan gaya pegas. Mengingat pentingnya persoalan nilai-eigen operator diferensial ini, berikut diberikan definisi umumnya.

Persamaan $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, dimana A adalah suatu matriks nxn sering ditemukan pada aplikasi aljabar linear. Jika persamaan ini mempunyai penyelesaian taknol $\mathbf{x}$, maka λ disebut nilai eigen (*eigenvalue*) dari A dan $\mathbf{x}$ disebut vektor eigen (*eigenvector*) yang dimiliki oleh λ.

Misalkan : $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

karena

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3\mathbf{x}$$

Dari persamaan di atas terlihat bahwa $\lambda = 3$ adalah nilai eigen dari A dan $\mathbf{x} = (1, 2)^T$ merupakan vektor eigen dari λ. Sesungguhnya, sembarang kelipatan taknol dari $\mathbf{x}$ akan menjadi vektor eigen, karena $A(k\mathbf{x}) = kA\mathbf{x} = k\lambda\mathbf{x} = \lambda(k\mathbf{x})$.

Persamaan $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ dapat dituliskan dalam bentuk:

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0. \qquad (1)$$

dengan I matriks satuan. Persamaan *(1)* akan mempunyai penyelesaian taktrivial jika dan hanya jika $A - \lambda I$ singular, atau secara ekivalen :

$$\det(A - \lambda I) = 0 \qquad (2)$$

Persamaan *(2)* ini disebut persamaan karakteristik untuk matriks A. Jika determinan pada persamaaan *(2)* diuraikan, akan didapatkan suatu polinom berderajat ke-n dalam peubah λ dan polinom ini disebut polinom karakteristik:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) \qquad (3)$$

Akar dari polinom karakteristik adalah nilai eigen dari A.

Jika dihitung akar menurut kelipatannya, maka polinom karakteristik pasti mempunyai n akar. Jadi A, akan mempunyai n nilai eigen dimana beberapa diantaranya kemungkinan akan berulang dan beberapa nilai eigen lainnya kemungkinan berupa bilangan kompleks. Namun dalam hal ini yang menjadi nilai eigen hanyalah bilangan riel.

Berikut ini akan dibahas aplikasi dari nilai Eigen yang berperan penting dalam menyelesaikan sistem persamaan diferensial linear dan aplikasi dalam fisika, seperti berbagai masalah campuran.

Persamaan Diferensial Linear

Salah satu persamaan diferensial yang paling sederhana adalah :

$$y' = ay \qquad (4)$$

dengan, $y = f(x)$ adalah suatu fungsi takdiketahui yang akan ditentukan dan $y' = dy/dx$ adalah turunannya sedangkan a adalah konstanta. Pemecahan dari pers *(4)* adalah:

$$y = ce^{ax} \qquad (5)$$

Pemecahan ini disebut pemecahan umum (*general solution*).

Kadang-kadang soal fisis yang menghasilkan sebuah persamaan diferensial menentukan juga kondisi tambahan tertentu yang memungkinkan untuk mencari satu pemecahan khusus (*particular solution*) dari pemecahan umum. Misalnya, pemecahan persamaan *(4)* memenuhi kondisi tambahan $y(0) = 2$, yaitu $y = 2$ bila $x = 0$, maka dengan mensubsti- tusikan nilai-nilai ini ke pemecahan umum maka didapat nilai $c = 2$. Jadi persamaan *(5)* menjadi: $y = 2e^{ax}$.

Di sini akan dijelaskan bagaimana nilai-nilai eigen tersebut digunakan dalam menyelesaikan sistem persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan.

Berikut ini akan dijelaskan bagaimana pemecahan sistem persamaan diferensial yang berbentuk.

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{aligned} \qquad (6)$$

dengan $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, ..., $y_n = f_n(x)$ adalah fungsi yang akan ditentukan dan a_{ij} adalah konstanta. Persamaan *(6)* dapat ditulis dengan notasi matriks sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} \qquad (7)$$

secara singkat: $\mathbf{Y}' = A\,\mathbf{Y}$ *(8)*

Pemecahan secara umum untuk kasus ini adalah sebagai berikut.

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} x_1e^{\lambda t} \\ x_2e^{\lambda t} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_ne^{\lambda t} \end{bmatrix} = e^{\lambda t}\,\mathbf{x} \qquad (9)$$

dengan $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$. Sebagai bukti bahwa fungsi vektor ini merupakan pemecahan dari sistem adalah dengan mendiferensiasi **Y** terhadap t :

$$\mathbf{Y}' = \lambda e^{\lambda t}\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{Y} \qquad (10)$$

Jika λ dipilih sebagai nilai eigen dari A dan x sebagai vektor eigen milik λ, maka :

$$A\mathbf{Y} = e^{\lambda t}A\mathbf{x} = \lambda e^{\lambda t}\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{Y} = \mathbf{Y}' \qquad (11)$$

Jelaslah bahwa Y adalah pemecahan dari sistem tersebut.

Jika $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n$ merupakan pemecahan dari $\mathbf{Y}' = A\,\mathbf{Y}$, maka berdasarkan induksi matematika semua kombinasi linear $k_1\mathbf{Y}_1 + k_2\mathbf{Y}_2 + \dots + k_n\mathbf{Y}_n$ juga merupakan pemecahan sistem.

Aplikasi Nilai Eigen pada Persamaan Diferensial

Diberikan suatu sistem persamaan orde satu: $y_1' = y_1 + y_2$

$$y_2' = -2\,y_1 + 4\,y_2$$

Carilah: a) Pemecahan umum dari sistem di atas, dan b) Pemecahan khusus dengan kondisi awal $y_1(0) = 3$, $y_2(0) = 1$

Pemecahan:

a) Pemecahan umum (general solution):

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

matriks koefisien untuk sistem tersebut adalah

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

maka nilai-nilai eigen A adalah: $\lambda = 2$, $\lambda = 3$.

Untuk $\lambda = 2$, sistem ini menjadi:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dengan memecahkan sistem ini akan menghasilkan $x_1 = x_2$ sehingga $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

jadi, $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah sebuah basis untuk ruang eigen dengan $\lambda = 2$. Dengan cara yang sama diperoleh, $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ adalah sebuah basis untuk ruang eigen dengan $\lambda = 3$.

Jadi $\mathrm{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ mendiagonalisasi A.

$$\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}A\mathrm{P} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Substitusi $\mathbf{Y} = \mathrm{PU}$ dan $\mathbf{Y}' = \mathrm{PU}'$ menghasilkan sistem diagonal yang baru, yaitu:

$$\mathrm{U}' = \mathrm{DU} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

atau

$$u_1' = 2u_1,\ u_2' = 3u_2$$

Dari persamaan *(5)* pemecahan sistem ini adalah:

$$u_1 = c_1 e^{2x};\ u_2 = c_2 e^{3x} \text{ atau } \mathrm{U} = \begin{bmatrix} c_1 e^{2x} \\ c_2 e^{3x} \end{bmatrix}$$

sehingga persamaan $\mathbf{Y} = \mathrm{PU}$ menghasilkan $\mathbf{Y}$ sebagai pemecahan baru menjadi

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{2x} \\ c_2 e^{3x} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \\ c_1 e^{2x} + 2c_2 e^{3x} \end{bmatrix}$$

atau

$$y_1 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

$$y_2 = c_1 e^{2x} + 2c_2 e^{3x}$$

b) Pemecahan khusus (particular solution):

Jika kondisi-kondisi awal disubstitusikan maka didapatkan:

$$c_1 + c_2 = 3$$

$$c_1 + 2c_2 = 1$$

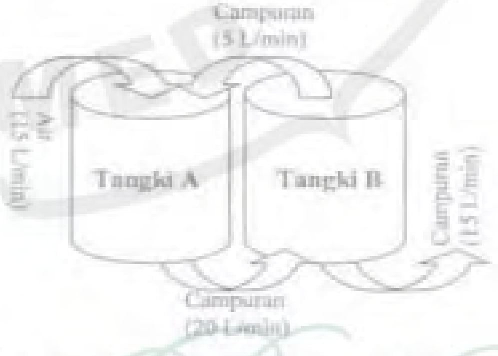
dengan memecahkan sistem ini diperoleh:

$$c_1 = 5;\ c_2 = -2$$

sehingga pemecahan yang memenuhi kondisi awal adalah:

$$y_1 = 5e^{2x} - 2e^{3x}$$

$$y_2 = 5e^{2x} - 4e^{3x}$$



Gambar 1. Laju campuran air dan pupuk.

Aplikasi Nilai Eigen pada Campuran

Dua buah tangki A dan B masing-masing berisi 100 liter campuran . Mula-mula tangki A mengandung 40 gram pupuk dan tangki B mengandung 20 gram pupuk. Cairan dipompakan ke dalam dan ke luar dari kedua tangki dengan kecepatan pemompaan seperti terlihat pada Gambar 1. Tentukanlah jumlah pupuk dalam setiap tangki pada waktu t.

Pemecahan:

Mula-mula jumlah total cairan dalam setiap tangki akan tetap 100 liter karena jumlah cairan yang dipompa ke dalam sama dengan yang dipompa ke luar. Kecepatan perubahan jumlah pupuk pada setiap tangki adalah sama dengan kecepatan penambahan dikurangi dengan kecepatan pemompaan ke luar. Misalkan $y_1(t)$ dan $y_2(t)$ masing-masing adalah jumlah pupuk (dalam gram) di dalam tangki A dan B pada waktu t.

Untuk tangki A: kecepatan penambahan pupuk adalah

$$(5\text{ L/min})\left(\frac{y_2(t)}{100}\text{ g / L}\right) = \frac{y_2(t)}{20}\text{ g/min}$$

kecepatan pemompaan pupuk ke luar adalah

$$(20\text{ L/min})\left(\frac{y_1(t)}{100}\text{ g / L}\right) = \frac{y_1(t)}{5}\text{ g/min}$$

Maka kecepatan perubahan untuk tangki A diberikan oleh persamaan ,

$$y_1'(t) = \frac{y_2(t)}{20} - \frac{y_1(t)}{5} = -\frac{y_1(t)}{5} + \frac{y_2(t)}{20}$$

dengan cara yang sama, untuk tangki B, kecepatan perubahan menurut persamaan ,

$$y_2'(t) = \frac{y_1(t)}{5} - \frac{y_2(t)}{5}$$

untuk dapat menentukan $y_1(t)$ dan $y_2(t)$ harus menyelesaikan masalah nilai awal.

$\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y}$, $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}_0$

Matriks koefisien untuk sistem di atas adalah:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{Y}_0 = \begin{bmatrix} 40 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + \frac{1}{5} & -\frac{1}{20} \\ -\frac{1}{5} & \lambda + \frac{1}{5} \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + \frac{1}{5})^2 - \frac{1}{100} = 0$$

$$= (\lambda + \frac{3}{10})(\lambda + \frac{1}{10}) = 0$$

nilai eigen dari A adalah:

$$\lambda = -\frac{3}{10}\ ,\ \lambda = -\frac{1}{10}$$

untuk $\lambda = -\frac{3}{10}$, sistem ini menjadi:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & -\frac{1}{20} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dengan memecahkan sistem ini akan menghasilkan $x_2 = -2x_1$; sehingga:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

jadi, $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ adalah basis untuk ruang eigen untuk $\lambda = -\frac{3}{10}$. Dengan cara yang sama diperoleh, $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ adalah basis untuk ruang eigen dengan $\lambda = -\frac{1}{10}$

Jadi $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ mendiagonalisasi A.

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

Substitusi $\mathbf{Y} = P\mathbf{U}$ dan $\mathbf{Y}' = P\mathbf{U}'$ menghasilkan sistem diagonal baru, yaitu :

$$\mathbf{U}' = D\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{10} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

atau

$$u_1' = -\frac{3}{10}u_1 ;\ u_2' = -\frac{1}{10}u_2$$

Maka, $u_1 = c_1 e^{-3t/10}$; $u_2 = c_2 e^{-t/10}$ sehingga persamaan $\mathbf{Y} = P\mathbf{U}$ menghasilkan $\mathbf{Y}$ sebagai pemecahan baru:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{-3t/10} \\ c_2 e^{-t/10} \end{bmatrix}$$

atau

$$y_1(t) = c_1 e^{-3t/10} + c_2 e^{-t/10}$$
$$y_2(t) = -2c_1 e^{-3t/10} + 2c_2 e^{-t/10}$$

Bila: t = 0, Y = Y_0, maka: $c_1 + c_2 = 40$, $-2c_1 + 2c_2 = 20$. Penyelesaian dari kedua persamaan ini didapat:

$$c_1 = 15;\ c_2 = 25.$$

Maka pemecahan masalah nilai awal, yaitu jumlah pupuk dalam setiap tangki pada waktu t, adalsh:

- *di dalam tangki A:*

$$y_1(t) = 15e^{-3t/10} + 25e^{-t/10}$$

- *di dalam tangki B:*

$$y_2(t) = -30e^{-3t/10} + 50e^{-t/10}$$

Penutup

Dari uraian di atas telah diperlihatkan bagaimana nilai-nilai eigen tersebut digunakan dalam pemecahan masalah sistem persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan. Maka sistem persamaan diferensial linear dapat dicari pemecahannya dengan menerapkan nilai eigen dari matriks koefisien serta diterapkan untuk pemecahan masalah campuran.

Daftar Pustaka

Anton, Howard (1987) *Elementary linear algebra*. New York: Jhon Wiley

Boas, Mary L. (1983) *Mathematical methods in the Physical Sciences*. New York: Jhon Wiley

Leon, Steven J. (1998) *Linear algebra with applications*. Singapore: Prentice-Hall