ISSN 1410 - 4520

Buletin Utama Teknik

VOLUME 4 NO. 2 APRIL 2000

DAFTAR ISI

FAKULTAS TEKNIK
UNIVERSITAS ISLAM SUMATERA UTARA

Buletin Utama Teknik

FAKULTAS TEKNIK

UNIVERSITAS ISLAM SUMATERA UTARA

BULETIN UTAMA TEKNIK ADALAH MEDIA PUBLIKASI ILMIAH FAKULTAS TEKNIK UNIVERSITAS ISLAM SUMATERA UTARA TERBIT SEKALI DALAM 3 (TIGA) BULAN

VOL. 4 NO. 2 APRIL 2000

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Syukur Alhamdulillah dengan Rahmat dan Karunia Allah SWT telah terbit Buletin Teknologi FT-UISU Vol. 4 No. 2 April 2000, yang menyangkut bidang science dan keteknikan. Baik ini merupakan tulisan hasil Penelitian maupun karya Ilmiah Populer yang dilakukan oleh Staff Pengajar .

Kami mengharapkan untuk terbitan bulan berikutnya Staff Pengajar dapat meningkatkan kualitas maupun mutu dari tulisan, sehingga memungkinkan sebagai bahan rujukan dalam melakukan kegiatan penelitian atau karya ilmiah lainnya.

Hal ini juga tidak menutup kemungkinan bagi mahasiswa yang telah melakukan kegiatan penelitian atau kegiatan ilmiah untuk dapat berperan serta dalam mengirimkan tulisannya pada redaksi.

Pada kesempatan ini Redaksi juga mengucapkan *"Selamat Tahun Baru Hijriyah 1421 H"* Semoga kinerja Dosen semakin meningkat.

Wabillahi Taufiq Walhidayah
Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Wassalam,

Redaksi

Utama Teknik 2000, Volume 4, No. 2 : 98 - 102

PEMODELAN MATEMATIKA DIRELASIKAN TERHADAP METODE NUMERIK DALAM BIDANG TEKNIK

Oleh :

* Ir. Suhardi Napid ** Ir. Batu Mahadi Siregar

* Staff Pengajar Jurusan Teknik Elektro FT-UISU

** Staff Pengajar Jurusan Teknik Mesin FT-UISU

ABSTRAK

Masalah teknik umumnya ditransformasikan dahulu kedalam suatu formula atau bentuk yang disebut model matematika. Model matematika dalam bidang teknik umumnya merupakan persamaan differensial, Dengan metode numerik dapat pula diselesaikan masalah nilai awal, nilai batas, menghitung integral pada suatu interval tertentu dan lain sebagainya.

Kata Kunci : Nilai batas, model matematik, interpolasi parabola dan algoritma dissection

PENDAHULUAN

Model matematika untuk masalah teknik, khususnya Teknik Elektro, Mesin dan Sipil banyak menggunakan persamaan differensial. Apabila persamaan differensial cukup rumit dan tidak dapat diintegralkan dalam suatu interval tertentu, maka diperlukan suatu metode pencarian aproksimasi solusi. Metode numerik untuk mencari solusi persamaan differensial telah menjadi sesuatu yang penting akhir-akhir ini bagi para insinyur karena masalah teknik modern semakin bertambah kompleks, disamping kenyataan akan semakin mudahnya mendapatkan komputer elektronik serta pemakaian komputer yang bukan lagi merupakan hal yang tidak mudah.

Keuntungan lain dari penggunaan metode numerik adalah bahwa metode ini untuk persamaan differensial parsial dua dimensi dapat dijalankan pada komputer oleh seorang operator tanpa harus menguasai bidang ilmu matematika. Solusi numerik dari persamaan differensial diperlukan juga untuk menghasilkan nilai numerik dari integral yang tidak diketahui pada suatu integral, garis sepanjang *sumbu x* untuk persamaan differensial biasa dan di dalam *bidang xy*, Untuk mendapatkan solusi dari *integral f* pada suatu interval, turunan *fungsi f* yang berbentuk persamaan differensial diaproksimasikan dengan turunan *orde n* dari suatu parabola yang melalui titik-titik tertentu atau dapat juga dengan menggunakan pengembangan *deret Taylor* dari suatu *fungsi* yang tidak diketahui.

Untuk memudahkan pemahaman akan metoda penyelesaian suatu masalah secara numerik, berikut ini akan diberikan dahulu contoh suatu metode numerik yang paling sederhana yaitu metode untuk mencari akan suatu fungsi secara numerik.

METODE NUMERIK

Metode Bisection

Dalam bagian ini akan dibahas cara-cara mencari akar dari suatu persamaan $f(x) = 0$ atau nilai x yang memenuhi $f(x) = 0$ secara numerik. Misalkan $f(x)$ kontinu dalam interval $[a,b\}$, $f(a)$ dan $f(b)$ mempunyai tanda yang berbeda. Dari teorema nilai tengah maka terdapat suatu titik

P, a<p<b, dimana *f(b) = 0.* Untuk memudahkan pengertian akan konsep metode bisection ini, disini diasumsikan bahwa akar dari *f)x)=o* dalam interval *[a,b]* unik.

* Defenisikan $a1 = a$ dan $b1 = b$, dan misalkan $p1$ adalah titik tengah dari $[a,b]$ yaitu : P1 = $\frac{1}{2}$(a1+b1)
* Jika $f(p1) = 0$, maka $p=p1$, jika tidak maka $f(p1)$ mempunyai tanda yang sama dengan $f(a1)$ atau $f(b1)$
* Jika $f(p1)$ dan $f(a1)$, mempunyai tanda yang sama, maka $p \in (p1, b1)$ didefinisikan $a_2 = p_1$ dan $b_2 = b_1$
* Jika $f(p1)$ dan $f(a1)$, mempunyai tanda berbeda, maka $p \in (a1, p1)$ defenisikan $a_2 = a_1$ dan $b_2 = p_1$ Ulangi proses terhadap interval $[a_2, b_2]$.

Algoritma

1. Set i = 1
2. While i $\leq N_0$ lakukan 3 - 6
3. set p = a + (b-a)/2 (hitung p_i)
4. If f (p) = 0 or (b-a)/2 < $\in$ then
   output (p) ; (akar persamaan = p, proses selesai).
   Stop
5. Set i = i + 1
6. If f (a) f(p) > 0 then set a=p (hitung a_i, b_i) else set b = p
7. Output (proses berhenti / gagal dilaksanakan setelah N_0 iterasi, N_0 = ',N_0) (proses tidak dapat diselesaikan)

STOP

Beberapa kriteria berhenti yang dapat digunakan pada langkah 4 dari algoritma, dengan memilih toleransi $\varepsilon > 0$, cari $p_1 ,..., p_n$ sampai salah satu dari kriteria berikut ini dipenuhi :

a. $|P_n - P_{n-1}| < \varepsilon$

b. $\frac{|P_n - P_{n-1}|}{|P_n|} < \varepsilon \quad P_n \neq 0$

c. $|f(P_n)| < \varepsilon$

Contoh : Fungsi $f(x) = x^2$=4x-10 mempunyai akar dalam interval [1,2] karena f(1) = -5 f(2) = 14

Algoritma bisection dapat dilihat dari tabel dibawah ini :

A_n	B_n	P_n	$F(P_n)$
1.0	2.0	1.5	2.375
1.0	1.5	1.25	-1.79687
1.25	1.5	1.375	0.16211
1.25	1.375	1.3125	-0.84839
1.3125	1.375	1.34375	-0.35098
1.34375	1.375	1.359375	-0.09641
1.359375	1.375	1.3671875	0.03236
1.359375	1.3671875	1.36328125	-0.03215
1.36328125	1.3671875	1.365234375	0.000072
1.36328125	1.365234375	1.364257813	-0.01605
1.364257813	1.365234375	1.364746094	-0.00799
1.364746094	1.365234375	1.364990235	-0.00396
1.364990235	1.365234375	1.365112305	-0.00194

Setelah 13 iterasi, P13 = 1.365112305 mengaproksimasi P dengan error.

$||P-P_{13}| < |B_{14}-A_{14}| \quad = |1.365234375 - 1.365234375| = 0.000122070$

karena $|A_{14}| < |P|$,

$$\frac{|P - P_{13}|}{|P|} < \frac{|B_{14} - A_{14}|}{|A_{14}|} \leq 9.0x10^{-5}$$

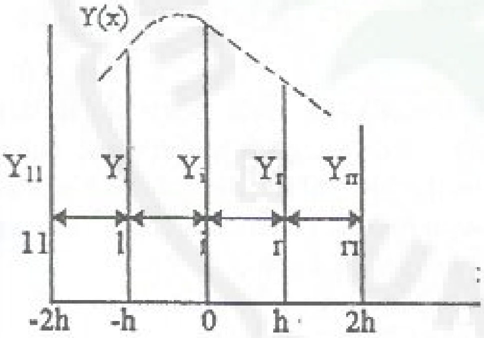
Jadi aproksimasi dari P benar pada paling sedikit 4 digit ketelitian.

Metode Beda Terbatas

Bentuk Differensial Dengan Interpolasi Parabola

Metode sederhana untuk mendapatkan aproksimasi untuk turunan fungsi *Y(x)*, gambar fungsi tersebut yang melalui titik-titik tertentu diaproksimasikan kedalam bentuk parabola yang melalui titik yang sama. Hasil perhitungan turunan fungsi parabola tersebut merupakan aproksimasi dari nilai turunan fungsi Y. Sebagai contoh untuk menghitung turunan kedua Y" dari Y, jika Y diketahui pada 3 titik *l*, *i* dan *r* dimana jarak antara titik-titik tersebut sama yaitu *h* pada *sumbu x*. Secara iteratif misalkan titik-titik tersebut menjadi titik-titik Y1, Yi, Yr, selanjutnya ketiga titik pivot ini juga dilalui oleh parabola dengan persamaan :

$$Yp = Ax^2 + Bx + C \;...... (1)$$



Gambar 1. Interpolasi Parabola

Dengan memilih absis titik ke i sebagai titik pusat kita dapatkan :

$$Y(-h) = Y1 = Ah^2 - Bh + C$$
$$Y(0) = Yi = C$$
$$Y(h) = Yr = Ah^2 + Bh + C$$
$$Y1 - 2Yi + Yr = 2Ah^2$$

Karena turunan kedua dari parabola diatas sama dengan 2A, turunan kedua Yi" dari Y pada i diaproksimasikan oleh :

$$Yi'' = (1/h^2)(Y_l - 2Y_i + Y_r)$$

Ekspresi yang sama untuk turunan orde yang lebih tinggi dapat dihasilkan melalui aproksimasi dengan interpolasi orde tinggi dari suatu parabola yang dapat dibuat melalui titik-titik pivot, baik simetri maupun asimetri. Parabola :

$$Y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \;... (2)$$

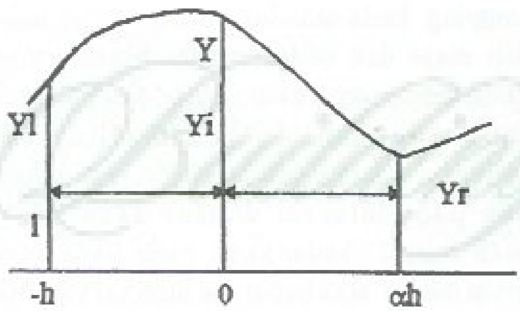
yang melalui titik-titik 1, i dan r dan titik rr di sebelah kanan dari titik r, dan dengan memilih titik i sebagai pusat, dihasilkan :

$$Y(-h) = Y1 = -Ah^3 + Bh^2 - Ch + D$$
$$Y(o) = Y_i = D$$
$$Y(h) = Y_r = Ah^3 + Bh^2 + Ch + D$$
$$Y(2h) = Y_{rr} = 8Ah^3 + 4Bh^2 + 2Ch + D$$

Dengan eliminasi B, C dan D pada ketiga persamaan diatas dihasilkan 6 A dari turunan ke - 3 dari parabola (2), sehingga aproksimasi dari Y_i'' adalah :

$$Yi'' = (1/h^3)(-Y1 + 3Y_i - 3Y_r + Y_{rr})$$

Jika pembagian interval tidak sama panjang seperti gambar dibawah ini.



Gbr 2. Jarak titik Pivot dengan interval tak sama panjang

Perhatikan gambar 2 diatas, misalkan turunan kedua pada I dari suatu fungsi diketahui di tiga titik pivot yang berjarak h dan αh, maka persamaan parabola yang melalui titik ini adalah :

$$Y(-h) = Y_1 = Ah^2 - Bh + C$$
$$Y(o) = Y_1 = C$$
$$Y(\alpha h) = Y_r = \alpha^2 Ah^2 + \alpha Bh + C$$

Beda Mundur

Diberikan nilai fungsi :
Y0, y1, y2, ..., Y11,Y1,Yi,Yr. Yrr, ... , Yn-2, Yn-1, Yn dari fungsi Y(x) pada titik-titik pivot dari suatu interval yang dibagi h sama panjang.

Beda mundur pertama dari Y dititik i adalah :

$$\nabla Y_i = Y_i - Y_I$$

Beda mundur kedua adalah beda mundur dari beda mundur pertama yaitu :

$$\nabla(\nabla Y_i) = \nabla^2 Y_i = (Y_i - Y_I) - (Y_I - Y_{II})$$
$$= Y_i - 2Y_I + Y_{II}$$

Dengan cara yang sama, beda mundur ke n adalah perbedaan ke (n-1):

$$\nabla^n Y_i = \nabla(\nabla^{n-2} Y_i)$$

Selanjutnya dapat dicari dengan mudah koefisien dari titik pivot pada beda ke n :

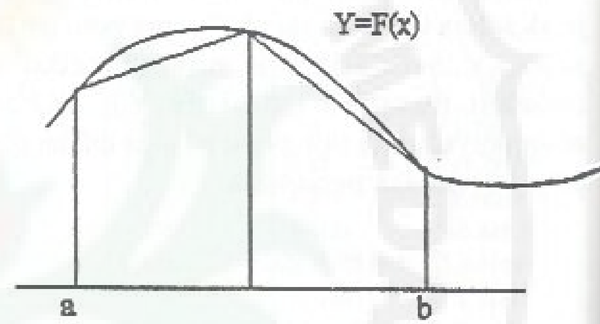
$$\nabla^3 Y_i = Y_i - 3Y_{i-1} + 3Y_{i-2} - 3Y_{i-3}$$

$$\nabla^4 Y_i = Y_i - 4Y_{i-1} + 6Y_{i-2} - 4Y_{i-3} + 4Y_{i-4}$$

Disamping beda mundur, terdapat juga metode bedan maju dan beda tengah. Masing-masing metode mempunyai keunggulan dan kelemahan. Untuk beda maju dilakukan selisih yang sebaliknya dari beda mundur, yaitu kearah kanan pada interval dimana akan dihitung tuunan fungsi. Sedangkan pada beda tengah, interval dibagi atas beberapa interval yang sama, dan selanjutnya beda tengah dibuat dengan patokan titik tengah dari setiap interval bagi.

Secara umum metode diatas juga merupakan dasar pengembangan metode untuk menghitung integral suatu fungsi dimana juga menghitung luas suatu fungsi.
Dalam menghitung luas dibawah suatu kurva, dibuat juga aproksimasi.

Dengan demikian hasil perhitungan mempunyai penyimpangan.
Gambar dibawah ini adalah contoh aproksimasi perhitungan luas dibawah suatu kurva.



Gambar 3. Aproksimasi Integral Fungsi Y

Aproksimasi yang digunakan adalah dengan metode trapesium, yaitu membuat beberapa trapesium dibawah kurva, Penjumlahan luas trapesium tersebut merupakan aproksimasi integral yang akan dicari.

KESIMPULAN

1. Untuk menghitung luas bawah suatu kurva berarti berinteraksi dengan integral. Pendekatan yang digunakan adalah dengan cara membuat beberapa trapesium, sehingga luasnya dapat dicari dengan penjumlahan beberapa luas trapesium.
2. Metode beda mundur menggunakan suatu Biaya operator sebagai simbol suatu bilangan atau variabel, sehingga fungsi Y dapat diekspresikan dalam turunan dengan menggunakan ekspansi deret Taylor.

3. Agar penyimpangan (error) didalam menghitung luas di bawah suatu kurva dapat dikurangi sekecil mungkin dimana $n \to \sim$
4. Proses perhitungan yang dilakukan mesin hitung, kalkulator, maupun komputer diperoleh bukan solusi eksak tetapi berupa aproksimasi. Dalam hal ini perlu dipertimbangkan dengan menentukan batas toleransi penyimpangan (ε) yang dapat diterima, biasanya ditentukan suatu interval untuk batas toleransi penyimpangan.

Daftar Pustaka

1. Burden, R and Faires, JP
   Numerical Analysis
   PWS-KENT Publishing Company 1989
2. Salvadori, M and Baron, M.
   Numerical Methods Engineering
   Prentice Hall Inc. 1961
3. Wendroff, B
   Theoritical Numerical Analysis
   Academic Press Inc, New York 1966