ISBN:978-602-17980-9-6

PERILAKU SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL LOGISTIK DENGAN PEMBERIAN DELAY

Syafari[1], Tanyel Sinaga[2]
Jurusan Matematika FMIPA-Unimed
Email: fari0929@gmail.com

Abstrac .Many phenomenons in life can be analised using mathematics. There are some population growth models which are continued; population model expontial and population model logistic. Population model logistic is a growth model which counts logistic factor that is food and live space. This research discussed the behaviour of logistic diferential equation solution with delay time. Research methodology used here is descriptive and literature. Data acquired by observing numeric simulation research from logistic diferential equation solution with delay and logistic equation without delay. Observation result showed that fuction and delay interval given effect towards logistic equation solution. The span interval delay which relative big caused the solution in lacking of balancing point. However for the relative small interval delay still heading to balacing point y = 1 fluctuatively.

Keywords: logistic diffential equation, delay, balancing.

Abstrak. Banyak fenomena dalam kehidupan dapat dianalisis dengan menggunakan pemodelan matematika. Terdapat beberapa macam model pertumbuhan populasi yang kontinu diantarnya model populasi eksponensial dan model populasi logistik. Model populasi logistik merupakan model pertumbuhan yang memperhitungkan faktor logistik berupa ketersediaan makanan dan ruang hidup. Penelitian ini membahas perilaku solusi persamaan diferensial logistik dengan waktu delay. Metode penelitian yang digunakan dalam penulisan ini adalah penelitian deskriptif dan kepustakaan. Dengan mengamati hasil simulasi numerik dari solusi persamaan diferensial logistik dengan delay dan persamaan logistik tanpa delay. Hasil pengamatan menunjukkan bahwa fungsi dan interval delay yang diberikan berpengaruh terhadap perilaku solusi persamaan logistik. Panjang interval delay yang relatif besar menyebabkan solusinya tidak memiliki titik kesetimbangan. Namun untuk interval delay yang relatif kecil tetap menuju titik kesetimbangan y = 1 dengan cara berfluktuasi.

Kata kunci: logistik, Kesetimbangan, Populasi, Delay, dan Interval.

A. PENDAHULUAN

Dalam perkembangan zaman saat ini yang terus maju, diperlukan suatu analisis yang dapat diterima secara ilmiah terhadap setiap fenomena yang terjadi dalam kehidupan manusia. Dari fenomena yang ada dapat dianalisis dengan menggunakan berbagai macam sudut pandang, salah satunya peristiwa yang ada dapat dipandang dalam bentuk model matematika. Contoh aplikasi matematika yang dapat diterapkan dalam kehidupan nyata adalah pemodelan dengan persamaan diferensial khususnya model populasi kontinu. Terdapat beberapa macam model pertumbuhan populasi yang kontinu diantarnya model populasi eksponensial dan model populasi logistik. Kontinu dalam hal ini berarti populasi bergantung waktu tanpa putus. Dari waktu ke waktu bentuk tiap model dimodifikasi sehingga dapat menggambarkan dengan lebih teliti keadaan sebenarnya. (Murray 2011)

ISBN:978-602-17980-9-6

Persamaan Diferensial logistik pertama kali diperkenalkan oleh PierreFrancois Verhulst pada tahun 1838. Pierre Francois Verhulst (1804-1849) adalah seorang guru besar Matematika di Universitas Libre de Bruxelles dan di Ecole Royale Militaire (juga terletak di Brussels) pada tahun 1835. Model populasi logistik adalah model pertumbuhan yang memperhitungkan faktor logistik berupa ketersediaan makanan dan ruang hidup. Model ini mengasumsikan bahwa pada waktu tertentu jumlah populasi akan mendekati titik kesetimbangan (equilibrium).Pada titik ini jumlah kelahiran dan kematian sama sehingga laju pertumbuhannya 0. Bentuk umum persamaan diferensial logistik adalah

$$\frac{dy}{dt} = ky(1 - \frac{y}{K})$$

Dengan y merepresentasikan populasi pada saat sekarang, k merupakan faktor pertumbuhan dan K sebagai kapasitas dari lingkungan untuk menampung spesies yang ada.

Delay merupakan waktu tunda yang disebabkan oleh transmisi atau perpindahan dari satu titik ke titik lain yang menjadi tujuannya. Delay penting dalam pemodelan masalah nyata sebab keputusan biasanya dibuat berdasarkan informasi pada keadaan sebelumnya. Haberman (1998), menyatakan bahwa delay penting untuk dipertimbangkan dalam memodelkan pertumbuhan populasi karena laju pertumbuhan populasi tidak hanya bergantung pada jumlah populasi pada waktu sekarang t tetapi juga bergantung pada jumlah populasi pada waktu sebelumnya atau pada waktu ($t - \tau$)

Model pertumbuhan logistik dengan pemberian delay sebelumnya pernah dibahas oleh Henny. M. Timuneno,dkk dari UNDIP Semarang. Berdasarkan pembahasan Henny. M. Timuneno,dkk model pertumbuhan logistik dengan delay dan waktu tunda 1 dapat disimpulkan bahwa penundaan dalam pertumbuhan populasi yang mengikuti model pertumbuhan logistik menyebabkan terjadinya osilasi sehingga mempengaruhi kestabilan di sekitar titik kesetimbangan. Model pertumbuhan logisitik dengan delay setimbang pada jumlah populasi nol dan pada jumlah populasi yang sama dengan daya tampungnya. (Timuneno 2007).

Hal ini memberi inspirasi untuk mengkaji keadaan kesetimbangan persamaan logistik tanpa delay, dan keadaan kesetimbangan persamaan logistik dengan delay. Penelitian ini difokuskan pada perilaku solusi persamaan Logistik dengan delay berhingga pada faktor logistik, fungsi delay yang diteliti dibatasi pada fungsi konstan dan fungsi linear positif dan perilaku solusi akan diselidiki dari hasil simulasi numerik. Tujuan penelitian ini adalah (1) meneliti perilaku solusi persamaan logistik dengan delay dan (2) meneliti perilaku solusi pada saat t menuju tak hingga.

B. KAJIAN LITERATUR

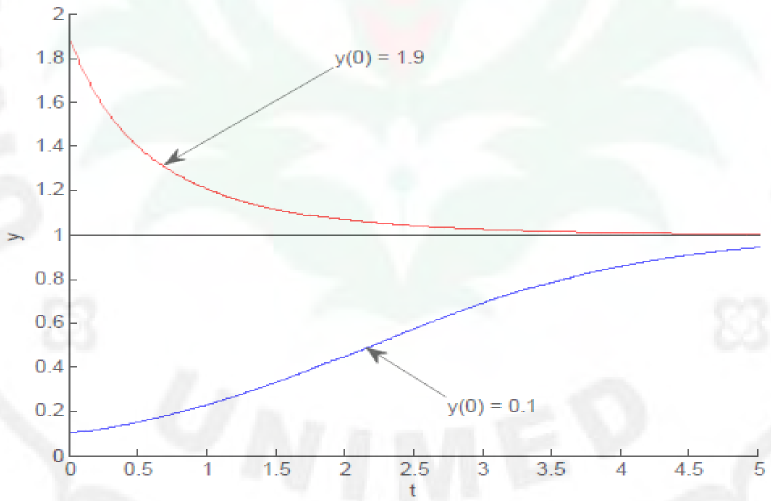
a. Persamaan Diferensial Logistik

Model populasi logistik adalah model pertumbuhan yang memperhitungkan faktor logistik berupa ketersediaan makanan dan ruang hidup. Dengan demikian model ini menjelaskan suatu ekosistem dengan suatu batas kemampuan menanmpung sejumlah populasi. Jika kepadatan populasi masih di bawah ambang batas ekosistem maka pertumbuhan populasi bernilai positif dalam arti masih terjadi pertambahan populasi. Namun jika sudah di atas ambang batas maka pertumbuhan populasi bernilai negtif dalam arti akan terjadi penurunan populasi. Bentuk umum persamaan diferensial logistik adalah:

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1)$$

Dengan y merepresentasikan populasi pada saat sekarang, k merupakan faktor pertumbuhan dan K sebagai kapasitas dari lingkungan untuk menampung spesies yang ada.

Persamaan (1) menggambarkan bahwa pada saat y sangat kecil dibandingkan dengan K, maka $\frac{y}{K}$ mendekati 0 sehingga $\frac{dy}{dt} \approx ky$. Hal ini berarti bahwa pertumbuhan y mendekati eksponensial. Namun, jika y → K (populasi mendekati kapasitas tampungnya), maka $\frac{y}{K}$ → 1, sehingga $\frac{dy}{dt}$ = 0, hal ini berarti bahwa pertumbuhan semakin melambat. Dengan demikaian, jika y berada diantara 0 dan K maka ruas kanan persamaan (1) bernilai positif, sehingga kepadatan populasi mengalami kenaikan. Disisi lain jika populasi melampaui kapasitas tampungnya (y > K), maka 1 - $\frac{y}{K}$ negatif, sehingga populasi menurun, seperti ditunjukkan pada gambar 1.



Gambar 1. Solusi persamaan (1) untuk nilai awal y(0) = 0,1 dan y(0) = 1, 9. (William 2008)

b. Metode Numerik

Metode numerik merupakan suatu metode untuk menyelesaikan problem matematika secara numerik dengan menggunakan operasi-operasi aritmatika yang efisien. Metode numerik tidak mengutamakan diperolehnya jawaban yang eksak (tepat), tetapi mengusahakan metode pendekatan. Tujuan menggunakan metode numerik adalah memperoleh metode terbaik untuk memberikan jawaban dari suatu problema matematika. Adapun prosedur menggunakan metode numerik adalah sebagai berikut:

1). Pendekatan/penyederhanaan perumusan problema sehingga dapat menyerupai penyelesaian secara eksak.

2). Penyelesaian pendekatan dari problem yang perumusannya eksak.

3). Penggabungan dari langkah-1 dan langkah-2

Keuntungan dari penggunaaan metode numerik ini adalah diperolehnya metode terbaik untuk memberikan jawaban masalah dari problem matematika dan diperoleh informasi dari berbagai jawaban yang ada. (Sangadji 2008)

ISBN:978-602-17980-9-6

c. Persamaan Diferensial Delay

Delay adalah sebagian waktu yang tidak dapat dimanfaatkan sesuai dengan rencana, sehingga menyebabkan beberapa kegiatan tertunda atau tidak dapat dilaksanakan sesuai jadwal yang telah direncanakan. Namun dalam hal ini pengertian delay adalah adanya pengaruh masa lalu terhadap masa sekarang. Persamaan diferensial delay adalah masalah yang menggambarkan suatu sistem yang pada prosesnya terdapat pengaruh masa lalu. Delay penting dalam pemodelan masalah nyata sebab keputusan biasanya dibuat berdasarkan informasi pada keadaan sebelumnya. Persamaan diferensial delay ini penting untuk dipertimbangkan dalammemodelkan pertumbuhan populasi karena laju pertumbuhan populasi tidak hanya bergantung pada jumlah populasi pada waktu sekarang t tetapi juga bergantung pada jumlah populasi pada waktu sebelumnya atau pada waktu (t - τ) .(Haberman 1998)

Definisi 1. Suatu persamaan diferensial disebut persamaan diferensial delay (Differential Delay Equation), jika pada persamaan terdapathubungan ketergantungan antara waktu sebelumnya dan waktu sekarang.

Dalam hal ini solusi persamaaan diferensial delay diperoleh jika diberikan nilai awal $y(0) = y_o$ dan data historis selama waktu $-\tau \leq t < 0$. Sebagai contoh persamaan diferensial:

$$\frac{dy}{dt} = ky, \quad y(0) = 1 \text{ dimana}$$

solusinya merupakan fungsi eksponensial sebagai berikut:

$$y(t) = \exp(kt):$$

Dalam hal ini nilai y berikutnya ditentukan oleh nilai y sekarang, dan tidak bergantung pada masa lalu. (Forde 2005)

Untuk penyederhanaan dapat dilakukan penskalaan $y^* = yK$ terhadap persamaan diferensial logistik (1) sehingga diperoleh:

$$\frac{dy}{dt} = ky\ (1 - y) \quad \text{....................}(2)$$

Pada persamaan diferensial delay masa lalu memberikan pengaruh terhadap keadaan saat ini dan masa depan. Persamaan diferensial logistik (2) dengan waktu delay pada faktor logistiknya, dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dt} = ky\ (1 - y(t - \tau))$$

Dengan demikian bentuk umum masalah diferensial logistik dengan waktu delay adalah sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dt} = ky(t)\ (1 - y(t - \tau)),$$
$$\delta = \delta(t), \quad -\tau \leq t < 0 \quad \text{......................}(3)$$

dengan δ merupakan fungsi delay pada $-\tau \leq t < 0$, $\tau > 0$. . Dalam hal ini τ disebut sebagai waktu delay. Pada masalah persamaan diferensial delay, nilai awal sudah tercakup dalam fungsi delay yang diberikan, sehingga tidak diperlukan lagi informasi nilai awal.

Skema numerik untuk persamaan (3) akan dibangun sebagai berikut.

Misalkan [-τ, 0] dipartisi sebanyak N partisi, dengan kata lain ditetapkan $\Delta t = \frac{\tau}{N}$

Dari fungsi delay yang diberikan didefinisikan

$$y - i = \delta(-i\,\Delta t),$$
$$i = 0,1,2,3, \ldots, N$$

Selanjutnya untuk $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ diperoleh:

$$y_{n+1} = y_n + k\,\Delta t y_n (1 - y_n - N) \ldots (4)$$

Skema (4) ini selanjutnya akan digunakan untuk mendekati solusi persamaan diferensial logistik dengan waktu delay. (Ruan 2006)

ISBN:978-602-17980-9-6

C. METODE PENELITIAN

Penelitian ini tergolong pada jenis penelitian simulasi, yakni melihat pengaruh beberapa parameter terhadap solusi suatu persamaan. Simulasi yang dilakukan dilakukan menggunakan bahasa pemrograman Matlab. Penelitian dilakukan di Perpustakaan Universitas Negeri Medan dan Laboratorium komputer matematika Universitas Negeri Medan selama kurang lebih dua bulan.

Prosedur penelitian ini adalah sebagai berikut :

- Mengumpulkan teori-teori pendukung dalam penelitian ini.
- Mencoba memahami penelitian-penelitian yang telah dilakukan sebelumnya yang berhubungan dengan judul penelitian ini.
- Memilih dan menetapkan kondisi persamaan yang akan diamati.
- Membangun suatu program untuk membantu pengamatan solusi persamaan diferensial logistik dengan delay maupun persamaan logistik tanpa delay.
- Mengamati hasil simulasi numerik dari solusi persamaan diferensial logistik dengan delay dan persamaan logistik tanpa delay. Pengamatan difokuskan terhadap perilaku solusi persamaan diferensial delay logistik dengan delay maupun persamaan logistik tanpa delay dengan kondisi yang berbeda dikaitkan dengan fungsi dan interval delay yang berbeda seperti pada tabel 1.
- Akhirnya dari hasil pengamatan terhadap kondisi ini akan ditarik suatu kesimpulan tentang perilaku solusi persamaan diferensial dengan delay.

Tabel 1: Parameter yang dipergunakan untuk simulasi matlab pada persamaan logistik tanpa delay dan persamaan logistik dengan delay

τ(waktu Delay)	Fungsi Delay
0,5	$1.5+t$
0,5	$1.5-t$
0,5	$1.4-0.2t$
0,5	$0,4$
0,5	$1.4+0.2t$
1	$1.5+t$
1	$1.4+0.2t$
1,5	$1.5+t$
1,5	$1.4+0.2t$
1,5	$0,4$
2	$1,9$
2	$1,5$
2	$1,5+0,2t$
2	$1,5+0,2t$
2	$-t+1,8$
2	$-0,4t+0,1$
2	$1.5+t$
2	$1.4+0.2t$
3	$0,4$
3	$1.4+0.2t$
5	$1.4+0.2t$

D. Pembahasan

Persamaan diferensial delay merupakan salah satu jenis dari permasalahan persamaan diferensial. Permasalahan persamaan diferensial delay tidak hanya melibatkan suatu nilai di di waktu aktual x(t), namun juga melibatkan di waktu yang telah lalu, sehingga dapat ditulis masalahnya menjadi x'(t) = f(t,x(t),x(t- τ)) dengan τ ϵ R.

Fungsi delay pada suatu sistem dapat beragam, bergantung pada keadaan sistem tersebut, dan begitu juga dengan waktu delay yang diberikan. Dalam pembahasan ini akan dilihat pengaruh dari pemberian fungsi delay berupa linier naik, linier turun dan fungsi konstan. Perilaku solusi juga akan diperhatikan pemberian lamanya delay atau panjang interval delay yang diberikan. Waktu delay dan fungsi delay yang akan diamati adalah waktu delay dan fungsi delay pada tabel 1.

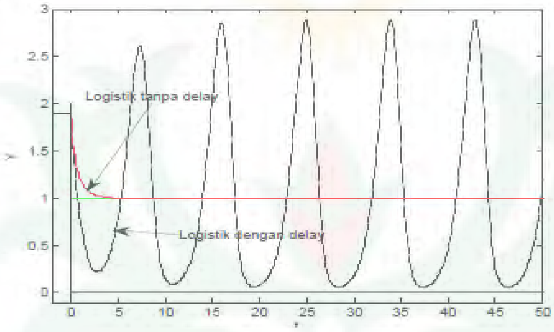
a. Pengaruh Jenis Fungsi Delay Terhadap Solusi Persamaan

Pada simulasi ini diberikan waktu delay $\tau = 2$ dengan fungsi delay δ(t)= 1, 9. Sehingga masalah persamaan delay adalah:

$\frac{dy(t)}{dt} = ky(t)(1 - y(t-2),$

δ(t)= 1, 9 , t ϵ [-2 , 0]........................(5)

Solusi masalah persamaan (5) ditunjukkan pada gambar 2.



Gambar 2: Grafik solusi persamaan logistik dan persamaan logistik delay untuk fungsi delay δ(t)= 1,9 dengan nilai parameter α = 1 dan waktu delay τ = 2

Dengan fungsi delay ini, nilai awal pada masalah ini adalah y(0) = 1,9. Pada grafik terlihat bahwa solusi persamaan (5) turun lalu berfluktuasi dengan besar amplitudo yang semakin besar, namun akan menuju pada suatu titik dimana besar skala amplitudonya tetap. Pada saat turun pertama kali, turunnya lebih cepat dibandingkan solusi persamaan logistik tanpa delay. Hal ini karena persamaan delay masih menggunakan informasi masa lalu y(0) = 1,9

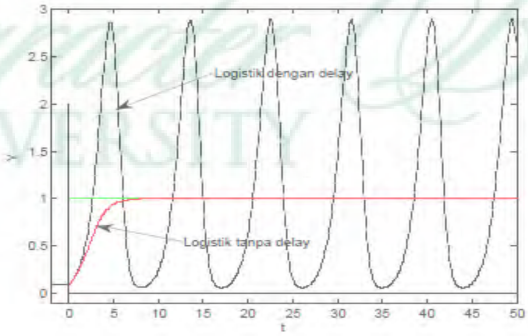
Simulasi berikutnya diberikan waktu delay $\tau = 2$ dengan fungsi delay δ(t)= 0,5

Sehingga masalah persamaan delay adalah:

$$\frac{dy(t)}{dt} = ky(t)(1 - y(t-2),$$

δ(t)= 0,5 , t ϵ [-2 , 0] ....(6)

Solusi masalah persamaan (6) ditunjukkan pada gambar 3.



Gambar 3: Grafik solusi persamaan logistik dan persamaan logistik delay untuk

ISBN:978-602-17980-9-6

fungsi delay δ(t)= 0,5 dengan nilai parameter $\alpha = 1$ dan waktu delay $\tau = 2$

Dari grafik terlihat bahwa solusi persamaan (6) menunjukkan perilaku solusi persamaan logistik dengan delay bergerak ke atas dan berfluktuasi dengan amplitudo yang semakin besar, dan akan menuju suatu keadaan dimana amplitudo tetap.

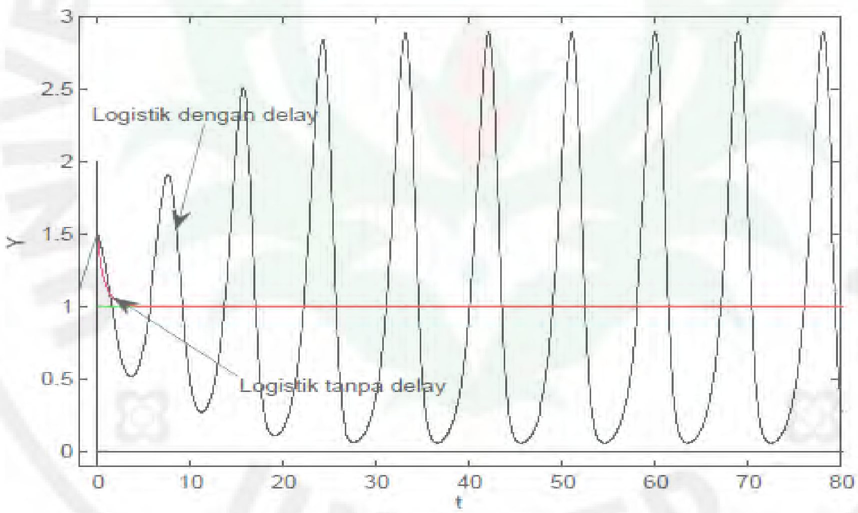
Simulasi berikutnya diberikan waktu delay $\tau = 2$ dengan fungsi delay δ(t) = 1,5 + 0,2t.

Sehingga masalah persamaan delay adalah:

$$\frac{dy(t)}{dt} = ky(t)(1 - y(t-2)),$$

δ(t)= 1,5 + 0,2t , $t \in [-2, 0]$ ....(7)

Solusi masalah persamaan (7) ditunjukkan pada gambar 4.



Gambar 4: Grafik solusi persamaan logistik dan persamaan logistik delay untuk fungsi delay δ(t) = 1,5 + 0,2t dengan nilai parameter $\alpha = 1$ dan waktu delay $\tau = 2$

Grafik pada gambar 4 menunjukkan bahwa perilaku solusi persamaan logistik dengan delay grafik turun lalu berfluktuasi dengan amplitudonya semakin besar, dan akan menuju pada suatu keadaan atau titik tertentu dimana besar amplitudonya tetap.

Pada simulasi yang diberikan waktu delay $\tau = 2$ dengan fungsi delay δ(t) = 0,4 + 0,2t, masalah persamaan delay berbentuk:

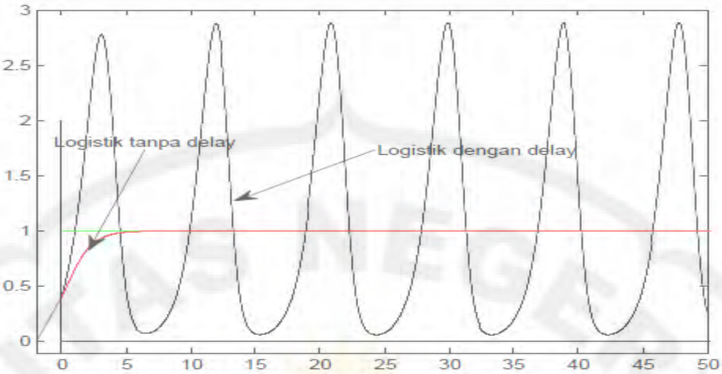
$$\frac{dy(t)}{dt} = ky(t)(1 - y(t-2)),$$

δ(t)= 0,4 + 0,2t , $t \in [-2, 0]$................(8)

Solusi masalahnya seperti pada gambar (5).

Grafik terlihat bahwa perilaku solusi persamaan logistik dengan delay grafik bergerak ke atas dan berfluktuasi namun amplitudo semakin besar, dan akan menuju suatu keadaan dimana amplitudo tetap

ISBN:978-602-17980-9-6



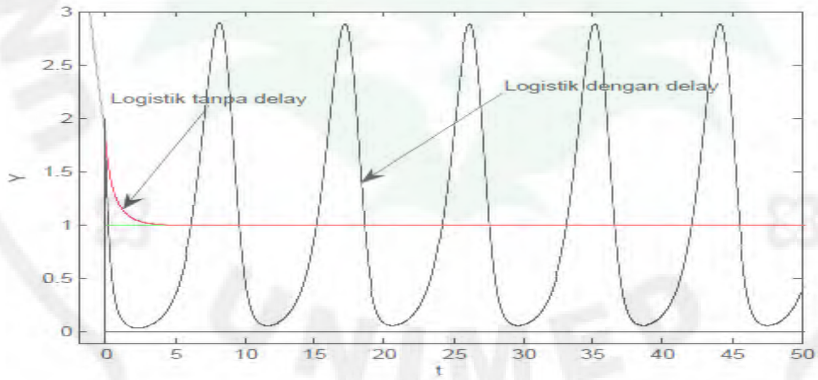
Gambar 5: Grafik solusi persamaan logistik dan persamaan logistik delay untuk fungsi delay $\delta(t) = 0,4 + 0,2t$, dengan nilai parameter $\alpha = 1$ dan waktu delay $\tau = 2$.

Untuk simulasi dengan waktu delay $\tau = 2$ dengan fungsi delay $\delta(t) = -t + 1,8$ dan masalah persamaan delay berbentuk

$$\frac{dy(t)}{dt} = ky(t)(1 - y(t-2)),$$

$\delta(t) = -t + 1,8$, $t \in [-2, 0]$ ....(9)

Solusi masalahnya terlihat pada gambar 6.



Gambar 6: Grafik solusi persamaan logistik dan persamaan logistik delay untuk fungsi delay $\delta(t) = -t + 1,8$, dengan nilai parameter $\alpha = 1$ dan waktu delay $\tau = 2$.

Pada grafik terlihat bahwa perilaku solusi persamaan logistik langsung turun lalu berfluktuasi dan menuju pada suatu keadaan amplitudonya yang tetap.

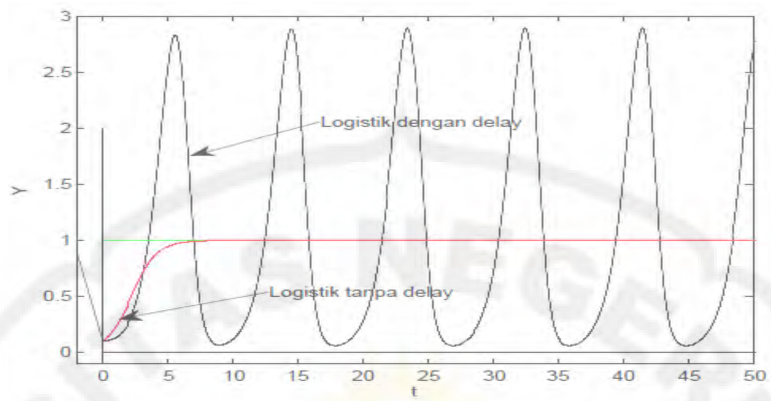
Untuk simulasi dengan waktu delay $\tau = 2$ dengan fungsi delay $\delta(t) = -0,4t + 0,1$ dan masalah persamaan delay berbentuk:

$$\frac{dy(t)}{dt} = ky(t)(1 - y(t-2)),$$

$\delta(t) = -0,4t + 0,1$, $t \in [-2, 0]$ ....(10)

Solusi masalah persamaan ini terlihat pada gambar 7.

ISBN:978-602-17980-9-6



Gambar 7: Grafik solusi persamaan logistik dan persamaan logistik delay untuk fungsi delay δ(t) = -0,4t + 0,1, dengan nilai parameter α = 1 dan waktu delay τ = 2.

Gambar 7 menunjukkan bahwa perilaku solusi persamaan logistik dengan delay naik lalu berfluktuasi dimana besar amplitudonya hampir sama besar.

b. Pengaruh Interval Delay Terhadap Solusi Persamaan Logistik

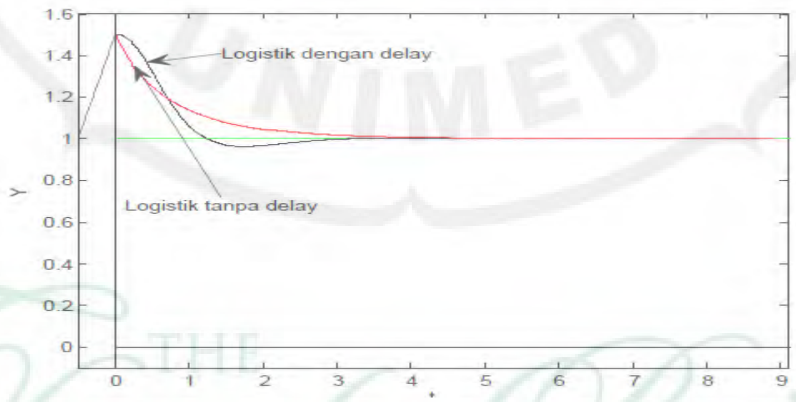
Untuk melihat pengaruh interval atau panjang delay terhadap solusi persamaan logistik tanpa delay dan persamaan logistik dengan delay dilakukan simulasi seperti di bawah ini.

Pada simulasi ini diberikan waktu delay τ = 0,5 dengan fungsi delay δ(t) = 1,5 + t, dan masalah persamaan delay berbentuk.

$$\frac{dy(t)}{dt} = ky(t)(1 - y(t-(0{,}5)),$$

δ(t)= 1,5 + t, t ϵ [-0,5 , 0] ....(11)

Solusi masalah persamaannya ditunjukkan pada gambar 8.



Gambar 8: Grafik solusi persamaan logistik dan persamaan logistik delay untuk fungsi delay δ(t) = -0,4t + 0,1, dengan nilai parameter α = 1 dan waktu delay τ = 2.

Dari gambar 8 terlihat bahwa pengaruh interval delay yang diberikan terhadap solusi masalah persamaan (11) menunjukkan bahwa perilaku solusi persamaan diferensial logistik dengan delay grafik turun lalu berfluktuasi dengan besar amplitudo semakin kecil dan menuju ke titik kesetimbangan.

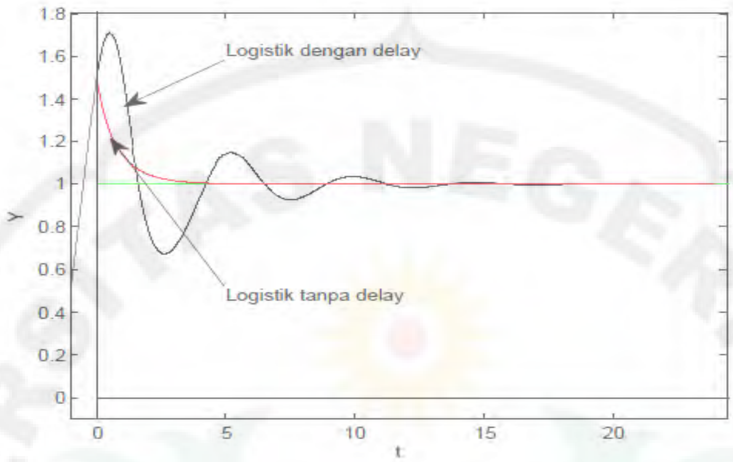
Pada simulasi ini diberikan waktu delay τ = 1 dengan fungsi delay δ(t) = 1,5 + T, dan persamaan delay berbentuk:

$$\frac{dy(t)}{dt} = ky(t)(1 - y(t-1),$$

δ(t)= 1,5 + t , t ϵ [-1 , 0] ....(12)

ISBN:978-602-17980-9-6

Solusi masalah persamaan (12) seperti pada gambar 9.



Gambar 9: Grafik solusi persamaan logistik dan persamaan logistik delay untuk fungsi delay δ(t) = 1,5 + t, dengan nilai parameter α = 1 dan waktu delay τ = 1

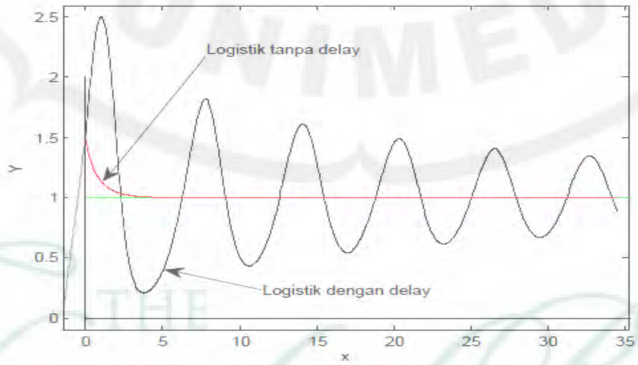
Grafik pada gambar 9 terlihat bahwa pengaruh interval delay yang diberikan terhadap solusi masalah persamaan (12) menunjukkan bahwa, perilaku solusi persamaan diferensial logistik dengan delay grafik naik lalu berfluktuasi dengan amplitudo semakin kecil dan menuju ke titik kesetimbangan.

Pada simulasi ini diberikan waktu delay τ = 1,5 dengan fungsi delay δ(t) = 1,5 + t dan masalah persamaan delay adalah:

$$\frac{dy(t)}{dt} = ky(t)(1 - y(t-(1,5))),$$

δ(t)= 1,5 + t, t ϵ [-1,5 , 0] ....(13)

Solusi masalah persamaan (13) ditunjukkan pada gambar 10.



Gambar 10: Grafik solusi persamaan logistik dan persamaan logistik delay untuk fungsi delay δ(t) = 1,5 + t, dengan nilai parameter α = 1 dan waktu delay τ = 1,5

Pada grafik yang ditunjukkan gambar 10 terlihat bahwa pengaruh interval delay yang diberikan terhadap solusi masalah persamaan (13) menunjukkan perilaku solusi persamaan diferensial logistik dengan delay menunjukkan bahwa naik lalu berfluktuasi dengan amplitudo semakin kecil dan lebih lambat dibandingkan gambar 9 sebelum menuju menuju ke titik kesetimbangan.

c. Pengaruh Jenis Fungsi Delay Terhadap Kesetimbangan

Untuk pengaruh jenis fungsi delay terhadap kesetimbangan dilihat dari grafik yang terdapat pada:

- Gambar 2, laju pertumbuhan dengan fungsi delay $\delta(t) = 1{,}9$, parameter $\alpha = 1$ dan waktu delay $\tau = 2$, solusi dari pesamaan diferensial dengan delay tidak bergerak menuju titik kesetimbangan, akan tetapi grafik tersebut berfluktuasi semakin besar, sebelum pada titik tetentu akan berfluktuasi dengan besar amplitudo tetap.
- Gambar 3, fungsi delay yang diberikan adalah $\delta(t) = 0{,}5$ dengan parameter yang diberikan sama dengan parameter yang diberikan pada gambar 3, grafik fungsi delay tidak menuju pada titik kesetimbangan, akan tetapi kurva berfluktuasi dengan amplitudo yang tetap.
- Gambar 4, dengan fungsi delay $\delta(t) = 1{,}5 + 0{,}2\,t$, parameter $\alpha = 1$ dan waktu delay $\tau = 2$, grafik solusi persamaan logistik dengan delay tersebut tidak menunjukkan akan menuju pada titik kesetimbangan, akan tetapi grafik tersebut berfluktuasi dengan amplitudo semakin besar sebelum pada titik tertentu akan memiliki besar amplitudo yang hampir sama.
- Gambar 5, dengan dengan fungsi delay $\delta(t) = 0{,}4 + 0{,}2\,t$ dengan parameter lain yang sama dengan gambar 4 sehingga dilihat perilakusolusi dengan delay tidak menuju pada titik kesetimbangan, akan tetapi grafik persamaan tersebut berfluktuasi dengan besar amplitudo yang hampir sama.
- Gambar 6, dengan fungsi delay $\delta(t) = -t + 1{,}8$ parameter $\alpha = 1$ waktu delay $\tau = 2$, dan perilaku solusi dengan delay tidak menuju pada titik kesetimbangan, akan tetapi bergerak dengan berfluktuasi dengan amplitudo yang sama atau stabil.
- Gambar 7, dengan fungsi delay $\delta(t) = 1{,}5 + 0{,}2\,t$, dan parameter lainnya sama dengan gambar 6, perilaku solusi dengan delay tidak menuju pada titik kesetimbangan, akan tetapi bergerak dengan berfluktuasi dengan amplitudo yang sama atau stabil.

E. Simpulan

Dari pembahasan dapat disimpulkan:

1. Solusi persamaan logistik dengan delay bergantung pada panjang interval delay dan fungsi delay yang diberikan.
2. Panjang interval delay yang relatif kecil berpengaruh pada solusi yakni pada titik kesetimbangan $y = 1$ didekati secara berfluktuasi.
3. Panjang interval delay yang relatif besar menyebabkan solusi tidak menuju pada titik kesetimbangan $y = 1$, namun berfluktuasi dengan tingkat fluktuasi hampir sama.

DAFTAR PUSTAKA

Anna Maria Spagnuolo, Meir Shillor, L. K. A. T., (2012): A logistic delay differential equation model for Chagas disease with interrupted spraying schedules, Journal of Biological Dynamic, 6(2), 377394.

Asfiji, N. S., (2012): Analyzing the Population Growth Equation in the Solow Growth Model Including the Population Frequency:Case Study: USA, International Journal of Humanities and Social Science, 2(10), 303–328.

Doust., R. M., (2015): The Logistic Modeling Population, Having Harvesting Factor, Yugoslav Journal of Operations Research, 25(1), 107–115.

Forde, J. E., (2005): Delay Differential Equation Models in Mathematical Biology, Journal of

Applied Mathematics, 2005(586454).

Haberman, R., (1998): Mathematical Models Mechanical Vibration Population Dynamics, Vol. 2, Slam Texas, New York.

Murray, J., (2011): Mathematical Biology: I. An Introduction,, Vol. 17 of 3, Interdisciplinary Applied Mathematics, Springer.

Oladotun, Matthew, O., (2015): Solution of Delay Differential Equations Using a Modified Power Series Method, Scientific Research Publishing, 6, 670–674.

Olvera, D., (2014): Approximate Solutions of Delay Differential Equations with Constant and Variable Coefficients by the Enhanced Multistage Homotopy Perturbation Method, Hindawi Publishing Corporation, 2015(7), 343–348.

Ramos., R. A., (2012): Logistic Function As A Forecasting Model: It's Aplication To Business and Economics, International Journal of Engineering and Applied Sciences, 2(3).

Ruan, S., (2006): Delay Diferential Equation In Single Species Dynamics, Delay Dierential Equations and Applications, 4, 7–12.

Sangadji (2008): Metode Numerik, 1, Graha Ilmu, Yogyakarta.

Shoja, A., (2016): The spectral iterative method for Solving Fractional-Order Logistic Equation, Int. J. Industrial Mathematics, 8(3).

Teschl, G., (2011): Ordinary Diferential Equations and Dynamical Systems, Vol. xxx, American Mathematical Society Providence Rhode Island.

Timuneno, H. M., (2007): Model Pertumbuhan Logistik Dengan Waktu Tunda 1, FMIPA Undip, Semarang.

Tveito, A., W. R., (1998): Introduction to Partial Diferential Equation: A Computational Approach, Vol. 45, Springer-Verlag, New York.

William, E. Boyce., R. C. D., (2008): Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, 9, Department of Mathematical Sciences Rensselaer Polytechnic Institute, New York.