BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika adalah salah satu ilmu yang banyak memberikan dasar bagi berkembangnya ilmu pengetahuan dan teknologi. Seiring dengan kemajuan dan perkembangan teknologi, matematika terus berkembang dan bercabang-cabang. Salah satu cabang ilmu matematika yang ditemukan oleh seorang matematikawan Swiss, L. Euler adalah teori graf. (Munir, 2010)

Dalam perkembangan matematika, teori graf merupakan salah satu bidang ilmu yang populer. Perkembangan teori ini tidak hanya secara teoritis, tetapi juga secara aplikatif seperti dalam ilmu transportasi, jaringan komunikasi, ilmu komputer, dan teknik elektro. (Hamdunah, 2011)

Sebuah graf G terdiri dari himpunan obyek-obyek $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ yang disebut simpul (*vertex*) dan himpunan lainnya $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ yang mana unsur ini disebut jalur (*edge*). Himpunan $V(G)$ disebut himpunan simpul dari graf G dan $E(G)$ adalah himpunan jalur. Biasanya graf ditulis dengan $G = (V, E)$. Untuk lebih mudah, di berikan u dan v sebagai simpul di graf dan diberikan uv sebagai pasangan simpul yang disebut jalur. Jalur ini dapat ditulis dengan e. Hal ini menunjukkan bahwa $e = uv$. Dapat juga ditulis dengan $e = vu$. Jika $e = uv$ adalah jalur di graf G, maka u dan v berdekatan (*adjacent*) di G dan e menghubungkan u dan v. Hal ini mengakibatkan e dengan u atau e dengan v dikatakan berselisih (*incident*). (Vasudev, 2007)

Sebagai penekanan, V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai jalur satu buah pun, tetapi simpulnya harus ada, minimal satu. Graf yang hanya mempunyai satu buah simpul tanpa sebuah jalur pun dinamakan graf *trivial*. (Munir, 2010)

Salah satu aplikasi teori graf adalah pewarnaan graf (*graph coloring*). Ada tiga macam persoalan pewarnaan graf, yaitu pewarnaan simpul (*vertex coloring*), pewarnaan jalur (*edge coloring*), dan pewarnaan wilayah (*region*). Pewarnaan simpul graf merupakan pemberian warna untuk setiap simpul pada graf tersebut sedemikian rupa tidak terdapat dua simpul yang berdekatan memiliki warna yang sama. Konsep yang sama juga berlaku untuk pewarnaan jalur dan pewarnaan wilayah. Pewarnaan graf menjadi subyek yang sangat menarik perhatian. Sebagian karena keanekaragaman teoritisnya, masalah-masalahnya yang belum terungkap, dan aplikasinya yang sangat banyak. (Chartrand dan Zhang, 2009)

Salah satu masalah yang dapat diselesaikan dengan pewarnaan graf adalah proses penjadwalan kuliah. Penjadwalan merupakan kegiatan untuk mengalokasikan sejumlah sumber daya yang tersedia untuk memastikan bahwa perencanaan dapat berjalan dengan baik dengan waktu dan tenaga yang digunakan secara efisien. Penjadwalan kuliah yang sederhana yaitu menjadwalkan beberapa komponen yang terdiri dari mata kuliah, dosen, dan kelas mahasiswa dengan memperhatikan sejumlah batasan dan syarat tertentu. (Noor, 2012)

Masalah di pewarnaan graf yang paling banyak mendapat perhatian yaitu yang melibatkan pewarnaan simpul dari graf. Secara matematis, biasanya warna-warna yang digunakan untuk mewarnai suatu graf dinyatakan dengan $1,2,\ldots,k$. Pewarnaan menggunakan paling banyak k warna yang disebut k-*coloring*. Misalkan c adalah suatu pewarnaan simpul pada graf G dengan menggunakan warna-warna $1,2,\ldots,k$ untuk suatu bilangan bulat positif k. Maka dapat diartikan bahwa pewarnaan merupakan sebuah fungsi $c: V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ (dimana $\mathbb{N}$ adalah himpunan bilangan bulat positif) sedemikian rupa $c(u) \neq c(v)$ jika u dan v berdekatan di graf G. Lebih spesifik, sebuah *k-coloring* dari graf G dengan himpunan simpul $V(G)$ merupakan sebuah fungsi $c: V(G) \rightarrow \{1,2,\ldots,k\}$. (Chartrand dan Zhang, 2009)

Pewarnaan jalur dan pewarnaan wilayah merupakan bentuk lain dari pewarnaan simpul dan dapat diubah kembali menjadi model pewarnaan simpul. Masalah yang berkaitan dengan pewarnaan wilayah (peta), seperti peta belahan dunia, dua daerah dengan batas yang sama harus diberikan warna berbeda. Salah satu cara untuk memastikan bahwa dua daerah yang berdekatan tidak memiliki warna sama adalah dengan menggunakan warna yang berbeda untuk masing-masing daerah. Namun, ini tidak efisien, dan pada peta dengan banyak daerah itu akan sulit untuk membedakan warna yang mirip. Sebagai gantinya, sejumlah kecil warna harus digunakan bila memungkinkan. (Rosen, 2007)

Penentuan sedikitnya jumlah warna yang dapat digunakan untuk mewarnai peta sehingga daerah yang berdekatan tidak memiliki warna sama, erat kaitannya dengan penentuan bilangan kromatik (*chromatic number*). Bilangan kromatik yaitu masalah yang menentukan banyaknya warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai suatu graf. Apabila diberikan sebuah graf G, maka bilangan kromatik dari graf G dinyatakan dengan $\chi(G)$. Jika $\chi(G) = k$, disebut *k-colorable*. (Kumar dan Nicholas, 2012)

Dalam teori graf juga dibahas tentang perkalian graf (*graph product*). Terdapat tiga *graph product* yang mendasar dalam teori graf yaitu *cartesian product*, *direct product*, dan *strong product*. *Cartesian product* dari graf G dan H ditulis $G \square H$, *direct product* ditulis $G \times H$, dan *strong product* ditulis $G \boxtimes H$. Perkalian-perkalian ini diteliti secara luas dan memliki banyak aplikasi signifikan. Dalam penelitian ini yang akan dibahas selanjutnya hanya *cartesian product*. Hal ini dikarenakan, dibanding *direct product* dan *strong product*, *cartesian product* dari graf memiliki konstruksi yang sederhana dan biasa. (Hammack, 2011)

Diberikan G dan H adalah graf. *Cartesian product* (ditulis $G \square H$, $\square$ dibaca *square* atau *box product*) dari G dan H adalah graf dengan himpunan simpul $V(G) \times V(H)$ dimana dua simpul (g, h) dan (g', h') berdekatan $g = g'$ dan $hh' \in E(H)$, atau $gg' \in E(G)$ dan $h = h'g = g'$ dan $hh' \in E(H)$, atau $gg' \in E(G)$ dan $h = h'$. Jadi,

$$V(G \square H) = \{(g, h) |\ g \in V(G)\ dan\ h \in V(H)\},$$

$$E(G \square H) = \{(g, h)(g', h') |\ g = g', hh' \in E(H), atau\ gg' \in E(G), h = h'\}.$$

Graf G dan H disebut faktor dari perkalian $G \square H$. (Hammack, 2011)

Teori graf juga membahas tentang graf pangkat (*power*). G^n adalah graf G pangkat ke-n (n-th *power*) dengan himpunan simpul $V(G)$, dimana dua simpul yang berdekatan di G^n memiliki jarak (*distance*) maksimum n di G dimana jarak merupakan panjang lintasan terpendek antara simpul u dan v yang dinotasikan dengan $d_G(u, v)$. (Kabela, 2010)

G^2 merupakan kuadrat dari graf G yang memberikan $V(G^2) = V(G)$ dan $uv \in E(G^2)$ jika dan hanya jika $uv \in E(G)$ atau terdapat $w \in V(G)$ sedemikian rupa $uw, vw \in E(G)$. Dengan kata lain, ada dua simpul dengan jarak paling besar dua di G yang dihubungkan oleh jalur di G^2. (Sopena dan Wu, 2009)

Permasalahan pokok dari penggunaan *cartesian product* adalah memperhitungkan atau mencari batas terkecil dari bilangan *independence.* Bilangan *independence* dari graf G dilambangkan dengan $\alpha(G)$. Bilangan *independence* digunakan jika berhadapan dengan permasalahan komplit dan jika graf G mempunyai himpunan bebas dengan orde terkecilnya n dan jika n dipakai dalam permasalahan tersebut. Untuk alasan ini, banyak penelitian yang meneliti bilangan *independence* dari *cartesian product* dan meletakkan perhatian untuk menemukan batas atas dan batas bawahnya. (Imrich, 2008)

Dalam penentuan batas atas dan batas bawah tersebut, bilangan *independence* akan saling berkaitan dengan *clique* juga bilangan *clique*nya. *Clique* merupakan subgraf komplit dari graf yang dilambangkan dengan $\omega(G)$. Sementara orde maksimum dari *clique* disebut bilangan *clique*. Orde maksimum dari himpunan bebas dalam graf itulah yang disebut bilangan *independence*. Himpunan bebas sendiri disebut himpunan bagian dari himpunan simpul pada graf yang tidak mengandung sepasang simpul yang berelasi. (Nieuwoudt, 2007)

Penentuan batas atas dan batas bawah juga menjadi permasalahan menarik dalam pembahasan pewarnaan dan bilangan kromatik $\chi(G)$ sebuah graf. Beberapa literatur menyatakan bahwa untuk graf G berorde n dengan bilangan *clique* $\omega(G)$ dan bilangan *independence* $\alpha(G)$, telah diketahui bahwa $\omega(G)$ dan $n/\alpha(G)$ merupakan batas bawah dari $\chi(G)$, sementara $n - \alpha(G) + 1$ merupakan batas atas dari $\chi(G)$. Tentu saja n juga merupakan batas atas dari $\chi(G)$. Lebih khusus ditulis $\omega(G) \leq \chi(G) \leq n$. (Chartrand dan Zhang, 2009)

Operasi yang digunakan dalam penelitian ini adalah *cartesian product* dan graf yang dikaji adalah graf pohon (*tree*). Graf pohon di definisikan sebagai graf tak-berarah terhubung yang tidak memuat sirkuit. Konsep graf pohon merupakan konsep yang paling penting, karena terapannya yang luas dalam berbagai bidang ilmu. Graf pohon dikaji secara intensif sebagai objek matematika. Dalam kehidupan sehari-hari, graf pohon digunakan untuk menggambarkan hirarki. Misalnya, silsilah keluarga, struktur organisasi, organisasi pertandingan, dan lain-lain. Graf pohon sudah lama digunakan sejak tahun 1857, ketika mate-matikawan Inggris Arthur Cayley menggunakan graf pohon untuk menghitung jumlah senyawa kimia. (Munir, 2010)

Penelitian mengenai pewarnaan graf dengan menggunakan operasi *cartesian product* telah dilakukan oleh beberapa peneliti, seperti Sopena dan Wu (2009) pada dua graf lingkaran, Kumar dan Nicholas (2012) juga pada dua graf lingkaran. Kajian pewarnaan kuadrat dan permasalahan dalam menentukan bilangan kromatik kuadrat dari graf khusus juga sudah mulai menarik banyak perhatian. Dari hasil kajian literatur, sampai saat ini penelitian mengenai bilangan kromatik graf kuadrat merupakan penelitian yang cukup baru dan jarang ditemukan. Oleh karena itu, penelitian mengenai bilangan kromatik dari kuadrat graf pohon dilakukan. Dimana graf pohon merupakan graf khusus yang unik dan memiliki konsep yang sangat penting di dalam teori graf. Graf pohon juga graf yang sangat menarik karena strukturnya berbeda-beda. Berdasarkan latar belakang diatas, penelitian ini dikemas dalam judul "Pewarnaan Kuadrat *Cartesian Product* Pohon".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, masalah yang akan diselesaikan dalam penelitian ini adalah bagaimana menentukan bilangan kromatik kuadrat dari graf pohon dengan menggunakan operasi *cartesian product* serta menentukan batas atas dan batas bawah dari bilangan kromatik kuadrat graf pohon.

1.3 Batasan Masalah

Agar permasalahan dapat diselesaikan dengan baik dan sesuai dengan tujuan yang ingin dicapai, maka dibuat batasan masalah sebagai berikut:

1. Graf yang digunakan adalah graf pohon
2. Operasi yang digunakan adalah *cartesian product*.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah diatas, maka penelitian yang telah dilakukan ini bertujuan untuk menentukan bilangan kromatik dari kuadrat graf pohon dengan menggunakan operasi *cartesian product* serta menentukan batas atas dan batas bawah bilangan kromatik dari kuadrat graf pohon tersebut.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini adalah:

1. Bagi penulis

   Penelitian ini digunakan sebagai tambahan informasi dan wawasan pengetahuan tentang teori graf, khususnya tentang pewarnaan graf, graf kuadrat, operasi pada graf, dan klasifikasi graf.

2. Bagi lembaga

   Hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai tambahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan matematika untuk mata kuliah matematika diskrit .

3. Bagi pengembang ilmu

   Hasil penelitian ini dapat dijadikan sebagai bahan kajian keilmuan untuk wawasan keilmuan.