Volume 32 | Nomor I | Januari - Juni 2008 | ISSN 1978-3841

Jurnal Sains Indonesia

Media Komunikasi Hasil Penelitian Sains dan Matematika

Diterbitkan Oleh
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Medan

ISSN 1978-3841

Jurnal Sains Indonesia

Media Komunikasi Hasil Penelitian Sains dan Matematika

Jurnal Sains Indonesia *(dahulu bernama Majalah Pendidikan Science) diterbitkan sejak tahun 1976, dengan SK Menteri Penerangan Republik Indonesia STT Penerbit Khusus tanggal 9 Desember 1976, No. 276/SK/Ditjen PPG/STT/1976. Jurnal ini diterbitkan untuk dapat digunakan sebagai media komunikasi bagi dosen, peneliti, mahasiswa semua strata bidang sains dan matematika. Pengelola menerima artikel hasil penelitian, catatan penelitian dan/atau telaah pustaka dalam bidang ilmu yang relevan. Petunjuk penulisan naskah dapat dilihat pada kulit belakang bagian dalam dari jurnal ini. Naskah dikirimkan ke alamat redaksi untuk dievaluasi dan disunting. Naskah yang tidak memenuhi persyaratan akan dikembalikan kepada penulis.*

Diterbitkan oleh:
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Medan

Alamat Redaksi:
Jurnal Sains Indonesia
Jl. Willem Iskandar Pasar V, Medan 20221
Telp. 061-6625970
E-mail: fmipa-unimed@medan .wasantara.net.id

Dari Pengelola

Volume 32 Nomor 1 Jurnal Sains Indonesia tahun 2008 ini hadir kembali di hadapan sejawat dengan 12 artikel hasil penelitian dari bidang biologi, kimia, fisika, dan matematika. Masing-masing artikel memuat informasi baru yang sangat menarik dan penting untuk dirujuk dalam upaya pengembangan sains dan matematika.

Pengelola menanti artikel-artikel orisinal yang bermutu dari kita semuanya. Namun demikian, sebelum menulis artikel, sangat diharapkan para penulis mempelajari terlebih dahulu, dan selanjutnya mengikuti, petunjuk penulisan artikel yang tertera pada sampul belakang bagian dalam dari jurnal ini. Pengelola juga mengharapkan agar gambar, foto, atau diagram yang akan dimuat dalam artikel dibuat dalam lembaran terpisah dan sudah dalam bentuk *camera ready*. Untuk memudahkan editing, sejawat penulis sangat diharapkan *hanya menggunakan* fasilitas konstruksi tabel standar yang tersedia pada *software* Microsoft Word atau Exel, dan *tidak menggunakan* fasilitas *drawing* yang ada pada software tersebut. Untuk memperkecil kerusakan file akibat gangguan virus, ada baiknya jika sejawat penulis mengirimkan *soft copy* dalam bentuk *rich text format* (rft) menyertai *hard copy* artikelnya masing-masing.

Untuk nomor berikutnya, artikel yang tidak memenuhi persyaratan berdasarkan petunjuk penulisan tersebut tidak akan dimuat dan akan dikembalikan kepada penulis untuk diperbaiki.

Selamat berkarya.

Medan, Juni 2008

Pengelola

Volume 32 | Nomor 1 | Januari – Juni 2008
Jurnal Sains Indonesia
Media Komunikasi Hasil Penelitian Sains dan Matematika

Daftar Isi

Model Penelitian Matematika

Zul Amry
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Medan
Jl. Willem Iskandar Pasar V, Medan 20221

Diterima 03 April 2008, disetujui untuk publikasi 23 April 2008

Abstract *Model of research in mathematic usually very difference toward others model of research, because the model of research in general still to need empirical prove in analysis of the problem for taking of conclusion, whereas model of research in mathematic only use the logical principle and proved according of analytically which can performed with theories as definition, lemma or theorem. The object of this paper is to explain some model of research in mathematic which accompanied examples* [MATHEMATICAL RESEARCH MODEL] *(J. Sains Indon., 32(1): 27 - 32, 2008)*

Kata kunci: Logical principle, mathematic, model of research, prove analytically

Pendahuluan

Salah satu tujuan belajar matematika adalah menyelesaikan masalah yang ada dalam matematika itu sendiri yang pada awalnya bisa dilakukan dengan menggu-nakan suatu aturan seperti definisi. Sayangnya, pemecahan masalah dengan definisi tidak selalu mudah untuk dilakukan atau bahkan ada masalah-masalah matematika yang tidak dapat diselesaikan hanya dengan definisi saja, sehingga berdasarkan definisi yang ada itu para pakar coba membuat teori-teori baru seperti torema untuk menyelesaikan masalah tersebut. Kegiatan para pakar dalam menemukan teori-teori baru inilah yang merupakan salah satu model penelitian dalam bidang matematika.

Penelitian dalam bidang matematika umumnya dilakukan berdasarkan pengertian-pengertian dasar atau teori-teori yang sudah ada sebelumnya, baik itu berupa aksioma, definisi, lemma maupun teorema. Teori-teori dasar yang sudah ada inilah yang manjadi pijakan atau landasan untuk membangun teori-teori baru yang dibutuhkan dalam menyelesaikan masalah baik dalam matematika maupun diluar metematika itu sendiri. Karena permasalahan senantiasa terus berkembang menjadi masalah baru, tidak jarang teori yang sudah ada tidak lagi mampu untuk menyelesaikan masalah yang baru tersebut, sehingga diperlukan pula teori-teori baru untuk dapat menyelesaikannya.

Sebagai ilustrasi, jika $X_1, X_2, \dots, X_n$ sampel random dari dari suatu populasi berdistribusi normal $X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$, maka uji hipotesis untuk parameter μ, apabila σ_2 diketahui dapat diselesaikan dengan menggunakan statistik Z:

$$Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

karena berdasarkan teorema Lindenberg-Levy (Dudewicz dan Mishra, 1988: 375), statistik:

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

berdistribusi normal standar N(0,1). Sedangkan dari fakta ini dapat muncul permasalahan baru, yaitu *statistik apa yang digunakan apabila σ^2 tidak diketahui*. Untuk menyelesaikan masalah baru ini diperlukan teori-teori berikut.

Teorema 1:

Jika $Z \sim N(0,1)$, $V \sim \chi^2(v)$; Z dan V independen, maka:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{V/v}} \sim t(v)$$

Teorema 2:

Jika $X_1, \dots, X_n$ sampel random dari $N(\mu,\sigma^2)$, maka:

$$Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Teorema 3:

Jika $X_1,\dots,X_n$ sampel random dari $N(\mu,\sigma^2)$, maka:

$$V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

Dengan menggunakan konklusi dari teorema 2 dan teorema 3 sebagai premis pada teorema 1, diperoleh statistik:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{V/n-1}}$$

$$= \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \Bigg/ \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{(n-1)\sigma^2}}$$

$$= \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \; \frac{\sigma}{S}$$

$$= \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

berarti permasalahan baru di atas dapat diselesaikan dengan statistik:

$$\dot{T} = \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$$

Penelitian Matematika

Pada umumnya, masih banyak yang mengangap bahwa penelitian matematika sama dengan penelitian-penelitian pada ilmu yang lain; padahal tidaklah demikian. Matematika sebagai ilmu formal, menurut Setiadji (1999: 3) hanya mengandung pernyataan-pernyataan analitis yaitu pernyataan yang kebenarannya semata-mata mengikuti azas logika, sehingga kebenarannya bersifat universal. Sebagai ilmu formal, matematika jelas berbeda dengan ilmu fakta (*factual sciences*) seperti Biologi, Fisika dan Kimia karena, *factual sciences* selain memuat pernyataan analitis juga memuat pernyataan sintesis. Pernyataan sintesis adalah pernyataan yang kebenarannya harus sesuai dengan keadaan nyata. Jadi, perbedaan secara mendasar adalah, apabila masalah pada matematika dapat dibuktikan semata dengan logika saja maka *factual sciences* masih memerlukan bukti eksprimen.

Berdasarkan uraian singkat diatas, jelas bahwa penelitian pada bidang studi matematika sangat berbeda dengan penelitian pada bidang-bidang studi lain. Perbedaan ini terletak pada data yang lazimnya melandasi pelaksanaan penelitian. Dalam penelitan matematika tidak ada pengumpulan data seperti yang lazim dilakukan dalam penelitian-penelitian pada bidang studi lain; tidak ada responden untuk mengisi kuesioner dan juga tidak ada analisis statistik yang digunakan untuk membahas penelitian dalam rangka penarikan kesimpulan. Materi yang melandasi penelitian matematika adalah hasil studi kepustakaan dari jurnal, buku teks, buletin maupun karya-karya ilmiah yang lain, sedangkan alat-alat yang digunakan untuk pembahasan adalah teori–teori matematika seperti definisi (pengertian pangkal yang kebenarannya tidak perlu dibuktikan lagi), teorema (pernyataan matematis yang kebenarannya dapat dibuktikan) dan lemma (pernyataan yang merupakan konsekwensi logis dari teorema).

Penelitian matematika pada hakekatnya adalah pemecahan masalah dan secara menyeluruh pemecahan masalah matematika meliputi (Setiadji, 1999; 15):

a. Mengamati, untuk memperoleh pngertian mengenai masalah yang dihadapi.
b. Merumuskan masalah sesuai dengan persepsi yang diperoleh.
c. Menghimpun alat dan sifat yang diketahui dan relevan dengan masalah yang akan dipecahkan.
d. Mencoba mengadakan pembahasan untuk mencari solusi pemecahan masalah.
e. Mengidentifikasi alat dan sifat baru yang membantu pemecahan masalah.
f. Mencari solusi menuju pemecahan masalah.
g. Merumuskan solusi yang diperoleh sesuai dengan lingkup masalahnya.
h. Menyusun solusi serta tinjauannya dalam suatu tulisan.
i. Menyusun catatan mengenai masalah-masalah yang tersisa atau masalah-masalah baru yang timbul pada saat pembahasan masalah.

Tahapan kegiatan di atas tentu saja perlu didukung oleh kemampuan dalam memanfaatkan sumber informasi kepustakaan berupa jurnal, buku teks, hasil penelitian maupun kegiatan ilmiah lain dalam bidang matematika seperti konferensi matematika.

Belajar matematika merupakan serangkaian kegiatan yang bertujuan untuk dapat menyelesaikan masalah-masalah khususnya dalam matematika itu sendiri, sehingga penelitian matematika dapat dikembangkan melalui latihan dalam pemecahan masalah tersebut. Karena itu, untuk dapat malaksanakan kegiatan penelitian matematika untuk keperluan tugas akhir bagi mahasiswa sebagai pemula diperlukan serangkaian latihan yang bersifat kontinu, diantaranya dengan memperbanyak studi kepustakaan dalam menyelesaikan soal-soal matematika, mengidentifikasi soal-soal yang dipandang penting sambil mencari masalah-masalah ringan yang mungkin muncul dalam menyelesaikan soal-soal tersebut. Sehingga, secara otomatis telah terjadi latihan penelitian matematika dan sebagai pedoman, ada beberapa penelitian yang dapat dilakukan (Setiadji, 1999: 17), diantaranya adalah:

a. Mencari hubungan antara beberapa teori matematika.
b. Mencari aplikasi suatu teori matematika pada teori lain dalam metematika.
c. Membuat generalisasi terhadap suatu teori matematika
d. Mencari algoritma untuk mendapatkan suatu keadaan dalam bidang matematika
e. Mencari aplikasi suatu teori matematika pada masalah-masalah aktual.
f. Mengembangkan suatu teori matematika berdasarkan penelitian terapan matematika

Beberapa Model Penelitian

Berdasarkan uraian yang telah dikemukakan di atas, ada beberapa model penelitian matematika yang mungkin dapat dilakukan, diantaranya:

Aplikasi suatu teori terhadap teori lain. Contoh judul: *Estimasi Maksimum Likelihood Pada Model AR*. Model AR adalah salah satu model time series yang stasioner dan sering digunakan sebagai model peramalan.. Sedangkan metode maksimum *likelihood* adalah suatu metode untuk menentukan estimator dari parameter suatu populasi dengan prinsip mencari nilai parameter yang memaksimumkan fungsi *likelihood*. Dalam judul tersebut yang akan dibahas adalah bagaimana metode maksimum *likelihood* digunakan untuk menentukan estimator dari parameter-parameter yang terdapat dalam model AR

Membuat generalisasi terhadap suatu teori. Contoh judul: *Membentuk Field Quotion Dari Sebarang Intergral Domain.* Penelitian ini merupakan model penelitian generalisasi, yaitu perluasan dari suatu *field* pada integral domain khusus ke *integral domain* yang lebih umum.

Membandingkan dua atau lebih teori dalam memecahkan suatu masalah. Contoh judul: *Perbandingan Antara Pendekatan Koefisien Random Dengan Pendekatan Bayesian Pada Peramalan Model ARMA*. Model ARMA juga merupakan salah satu model *time series* stasioner dan sering digunakan sebagai model peramalan. Dalam judul diatas yang dibahas adalah bagaimana perbandingan antara kedua pendekatan dalam menentukan bentuk peramalan pada model ARMA.

Mencari hubungan antara dua teori. Contoh judul: *Hubungan Antara Estimator Bayes Dengan Estimator Minimax*. Estimator Bayes adalah suatu estimator dari parameter populasi yang diperoleh berdasarkan sampel dan informasi dari parameter populasi yang akan diestimasi tersebut. Sedangkan resiko dari suatu *estimator Bayes* merupakan batas bawah dari resiko *estimator minimax*. Dalam judul di atas yang akan dibahas adalah bagaimana hubungan antara estimator Bayes dengan *estimator minimax* berdasarkan sampel dan prior dari parameter populasinya.

Pengembangan terhadap suatu teori yang sudah ada. Contoh judul: *Integral Riemann untuk fungsi bernilai vektor*. Dalam hal ini teori yang sudah ada adalah integral Riemann untuk fungsi bernilai riel dengan sifat-sifat yang berlaku padanya. Penelitian yang akan dibahas berdasarkan teori ini adalah bagaimana bentuk integral Riemann untuk fungsi bernilai vektor beserta sifat-sifatnya.

Membandingkan dua teori. Contoh judul: *Perbandingan Regresi Parametrik dengan Regresi Nonparametrik*. Pandang model regresi $Y_i = m(X_i) + \varepsilon_i$, $i = 1,2, \ldots, n$. Pada regresi parametric, bentuk fungsi regresi $m(X_i)$ umumnya diketahui, kecuali untuk sejumlah berhingga parameternya. Sedangkan pada regresi nonparametric tidak ada asumsi tentang bentuk $m(X_i)$, kecuali ia hanya berada didalam suatu ruang fungsi tertentu. Dalam judul ini akan dibahas perbandingan antara kedua regresi, baik teori-teori yang mendasarinya maupun sifat-sifatnya.

Studi terhadap suatu teori. Contoh judul: *Uji Normalitas dan Permasalahannya*. Penelitian model ini membahas tentang teori-teori uji normalitas maupun teori pendukungnya (seperti fungsi distribusi empiris, teorema kekonvergenan dan teorema Glivenko-Cantelli) dan beberapa permasalahan seputar uji normalitas.

Analisis terhadap suatu teorema. Model penelitian ini membahas suatu teorema yang sudah ada, diantaranya bagaimana konklusi teorema tersebut apabila terjadi perubahan terhadap premis-premisnya, ditambahi atau dikurangi.

Contoh Penelitian

Berikut ini disajikan *latar belakang, landasan teori* dan *pembahasan* dari suatu penelitian matematika dengan judul *Estimasi Maksimum Likelihood Pada Model AR*. Model penelitian ini merupakan model aplikasi suatu terori terhadap teori lain, yaitu bagaimana mengaplikasikan metode estimasi maksimum *likelihood* pada teori estimasi untuk mendapatkan estimator dari parameter model AR dalam analisis *time series*.

Latar Belakang.

Model Autoregresif (AR) dalam analisis *time series* merupakan model khusus dari model ARIMA (*autoregresif integrated moving average*) yang dikembangkan oleh Box dan Jenkins dan telah banyak digunakan sebagai model statistika, terutama yang berkaitan dengan masalah peramalan. Masalah yang lazim dijumpai dalam menganalisis model AR maupun model-model *time series* lainnya adalah bagaimana cara mengestimsi parameter-parameter yang terdapat dalam model tersebut.

Teori estimasi merupakan salah satu inferensi statistika yang dapat digunakan untuk menarik kesimpulan tentang parameter suatu populasi berdasarkan sampel observasi. Salah satu metode estimasi yang sering digunakan adalah metode estimasi maksimum *likelihood*, yaitu suatu metode estimasi dengan cara memaksimumkan fungsi *likelihood*. Sebagaimana yang dikemukakan oleh Nelson (1973, hal. 92) bahwa estimasi yang memaksimumkan fungsi *likelihood* adalah estimasi yang efisien. Sebab, secara intuitif estimasi maksimum *likelihood* akan menghasilkan estimator yang relatif masuk akal, hal ini dikarenakan estimator maksimum *likelihood* berupa titik parameter berdasarkan sampel observasi yang sudah terjadi.

Beberapa hasil penelitian dan artikel yang berkaitan dengan model AR dan teori estimasi maksimum *likelihood* yang turut dipedomani dalam penelitian ini diantaranya adalah Nicholls dan Quinn (1980: 37) membahas beberapa masalah statistika model AR dengan pendekatan koefisien random dan menggunakan metode kuadrat terkecil untuk mengestimasi parameter-parameter dalam model. Sedangkan Tiao dan Box (1981: 376) membahas metode estimasi maksimum *likelihood* dalam mengestimasi parameter pada beberapa model time series. Currie (1985: 379) menyajikan bagaimana komputasi aljabar menyelesaikan estimasi maksimum *likelihood* pada suatu data lengkap maupun tak lengkap. Mallet (1986: 45) membahas metode estimasi maksimum *likelihood* pada model regresi dengan koefisien random. Sementara itu Basu dan Rainsel (1986: 63) menunjukkan hubungan antara fungsi *likelihood* model ARMA untuk data hilang dengan fungsi *likelihood* pada regresi *time series* untuk data lengkap yang dibatasi.

Berdasarkan uraian singkat di atas, permasalahan dalam penelitian ini terkonsentrasi pada penentuan estimator parameter suatu model time series yang diidentifikasi dari data time series ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) dan ternyata mem-punyai model AR. Sehubungan dengan itu, dalam penelitian ini akan dilakukan studi terhadap model AR tersebut untuk menjawab permasalahan diatas dengan cara mengestimasi parameter-parameter yang terdapat dalam model secara analitis menggunakan konsep-konsep dalam matematika dan khususnya statistika matematika berupa definisi, lemma maupun teorema baik yang berkaitan langsung maupun tidak langsung dengan teori estimasi maksimum *likelihood.*

Landasan Teori

Beberapa teori penting yang digunakan dalam penelitian ini, berupa definisi definisi dan teorema adalah sebagai berikut :

a. Model AR. Bentuk umum model AR order p [AR(p)] adalah:

$$x_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i x_{t-i} + a_t$$

menyatakan nilai sekarang sebagai jumlah tertimbang dari nilai-nilai masa lalu ditambah suku sesatan sekarang a_t dimana $\{a_t\}$ adalah barisan variabel random ***i i d*** normal; $a_t \sim N(0,\tau^{-1})$ dan τ tidak diketahui. Jadi, x_t diregresikan pada p nilai x yang lalu.

b. Fungsi likelihood dan metode maksimum likelihood. Metode maksimum *likelihood* adalah suatu metode estimasi, dengan prinsip mencari nilai estimasi parameter yang memaksimumkan fungsi *likelihood*.

Definisi. Misalkan X1, X2,..., Xn adalah sampel random dari suatu populasi dengan densitas $f(x/\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$. Fungsi likelihood dari θ didefinisikan dengan:

$$L(\theta/x) = L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k / x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i/\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$$

merupakan fungsi dari $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ berdasarkan observasi sampel $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sedangkan estimasi maksimum *likelihood* didefinisikan sebagai berikut:

Definisi: Jika untuk setiap titik sampel X, $\hat{\theta}(X)$ adalah harga parameter dimana $L(\theta/x)$ mencapai harga maksimumnya, maka estimator maksimum *likelihood* dari parameter θ berdasarkan sampel X adalah $\theta(X)$ (Roussas, 1973:. 242).

c. Metode kuadrat terkecil. Pandang suatu regresi linear:

$$y_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_k x_{ik} + e_i, \; i = 1, 2, \ldots, n;$$

dimana y_i = variabel respon trial ke-i, $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}$ = nilai variabel independen, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ = parameter yang dapat diestimasi berdasarkan sampel, dan e_i = sesatan random dengan $E(e_i)=0$, $Var(e_i) = \sigma^2$ dan $Cov(e_i,e_j)=0$, $\forall$ i, j ; $i \neq j$.

Model regresi linear diatas dapat dinyatakan dalam bentuk matriks

$$Y = X\beta + e$$

dengan

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{ik} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \text{ dan } e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_k \end{bmatrix}$$

Prinsip metode kuadrat terkecil dalam menentukan estimator $\hat{\beta}$ adalah dengan meminimumkan $S(\beta) = e^T e$ terhadap β, yaitu:

$$S(\beta) = (Y - X\beta)^T (Y - X\beta) = (Y - X\beta)^2$$

dan

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = 0$$

akan menghasilkan

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y \text{, jika } X^T X \text{ singular.}$$

Dalam hal ini $\hat{\beta}$ disebut estimator kuadrat terkecil untuk β dan $S(\beta)$ akan minimum, apabila:

$$\left. \frac{\partial^2 S(\beta)}{\partial \beta^2} \right|_{\beta = \hat{\beta}} > 0$$

d. Distribusi normal multivariat. Definisi: Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabel random i i d $N(\mu_i, \sigma_i^2)$. Vektor random X dengan $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ dika takan berdistribusi normal bersama dengan mean μ dan matriks covarian Σ, jika mempunyai densitas bersama:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp \left[\tfrac{1}{2} (x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu) \right]$$

dengan $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mu=(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ dan $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2)$

Pembahasan

Dari model AR(p) dengan bentuk:

$$x_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i x_{t-i} + a_t \quad \text{.......................................} (1)$$

dapat dinyatakan dengan:

$$a_t = x_t - \sum_{i=1}^{p} \phi_i x_{t-i} \quad \text{.......................................} (2)$$

Selanjutnya, berdasarkan asumsi bahwa a_t berdistribusi normal dengan mean nol dan variansi σ_a^2, maka densitas bersama untuk $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ adalah:

$$f(x/\phi,\sigma_a^2) = (2\pi\sigma_a^2)^{-n/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_a^2}\sum_{t=1}^{n}\left(x_t - \sum_{i=1}^{p}\phi_i x_{t-i}\right)^2\right]$$

$$\text{...} (3)$$

yang dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$f(x/\phi,\sigma_a^2) = (2\pi\sigma_a^2)^{-n/2} \left|M_n^{(p,0)}\right|^{1/2} \exp\left[-\frac{x^T.M_n^{(p,0)}.x}{2\sigma_a^2}\right] \quad (4)$$

dimana:

$$M_n^{(p,0)} = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{p-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{p-1} & \gamma_{p-2} & \cdots & \gamma_0 \end{bmatrix}^{-1} \sigma_a^2,$$

dengan:

$$\gamma_k = \frac{\sigma_a^2 \phi^k}{1-\phi^2}; \; k=0,1,2,\ldots$$

Berdasarkan model (2) x_p, $(a_{p+1}, a_{p+2}, \ldots, a_n)$ dan $(x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n)$ dapat dihubungkan oleh suatu transformasi:

$$a_{p+1} = x_{p+1} - \phi_1 x_p + \phi_2 x_{p-1} + \ldots + \phi_p x_1$$

$$a_{p+2} = x_{p+2} - \phi_1 x_{p+1} + \phi_2 x_p + \ldots + \phi_p x_2$$

$$\vdots$$

$$a_n = x_n - \phi_1 x_{n-1} + \phi_2 x_{n-2} + \ldots + \phi_p x_{n-p},$$

yang menghasilkan:

$$f(x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n / x_p; \phi, \sigma_a^2). = (2\pi\sigma_a^2)^{-(n-p)/2}.\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_a^2}\sum_{t=p+1}^{n} a_t^2\right]$$

$$\text{...} (5)$$

dan

$$f(x_p/\phi,\sigma_a^2) = (2\pi\sigma_a^2)^{-p/2}\left|M_n^{(p,0)}\right|^{1/2} \exp\left[-\frac{x_p^T.M_n^{(p,0)}.x_p}{2\sigma_a^2}\right]$$

$$\text{...} (6)$$

Karena bentuk $f(x/\phi,\sigma_a^2)$ dapat dinyatakan sebagai:

$$f(x/\phi,\sigma_a^2) = f(x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n / x_p; \phi, \sigma_a^2).f(x_p/\phi,\sigma_a^2)$$

$$\text{...} (7)$$

dengan $x_p=(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, maka dari *(5)* dan *(6)* dapat diperoleh:

$$f(x/\phi,\sigma_a^2) = (2\pi\sigma_a^2)^{-n/2}\left|M_n^{(p,0)}\right|^{1/2} \exp\left[-\frac{x_p^T.M_n^{(p,0)}.x_p + \sum_{t=p+1}^{n}\left(x_t - \sum_{i=1}^{p}\phi_i x_{t-i}\right)^2}{2\sigma_a^2}\right]$$

$$\text{...} (8)$$

Berdasarkan densitas bersama pada *(8)* diatas, fungsi *likelihood* untuk parameter ϕ dan σ_a^2 berdasarkan observasi $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ adalah:

$$L(\phi,\sigma_a^2/x) = (2\pi\sigma_a^2)^{-n/2}\left|M_n^{(p,0)}\right|^{1/2} \exp\left[-\frac{S(\phi)}{2\sigma_a^2}\right] \quad \text{........} (9)$$

dengan $S(\phi) = x_p^T.M_p^{(p,0)}.x_p + \sum_{t=p+1}^{n}\left(x_t - \sum_{i=1}^{p}\phi_i x_{t-i}\right)^2$

Logaritma natural dari fungsi *likelihood (9)* diatas adalah :

$$\ln L(\phi,\sigma_a^2/x) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma_a^2) + \frac{1}{2}\ln\left|M_n^{(p,0)}\right| - \frac{S(\phi)}{2\sigma_a^2} \quad \text{...} (10)$$

sedangkan estimasi maksimum *likelihood* untuk parameter σ_a^2 dan ϕ adalah nilai-nilai σ_a^2 dan ϕ yang memaksimumkan nilai $L(\phi,\sigma_a^2/x)$ atau nilai ln $L(\phi,\sigma_a^2/x)$ yang masing-masing dinyatakan dengan $\hat{\sigma}_a^2$ dan $\hat{\phi}$. $\hat{\sigma}_a^2$ diperoleh melalui:

$$\frac{\partial.\ln L(\phi,\sigma_a^2/x)}{\partial\sigma_a} = 0$$

yang menghasilkan:

$$\hat{\sigma}_a^2 = \frac{S(\hat{\phi})}{n},$$

Sedangkan $\hat{\phi}$ akan ditentukan melalui langkah-langkah sebagai berikut. Untuk ukuran sampel n>30, nilai dari:

$$\ln\left|M_n^{(p,0)}\right|$$

sangatlah kecil, sehingga dapat diabaikan, akibatnya diperoleh:

$$\ln.L(\phi,\sigma_a^2/x) \approx -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma_a^2) - \frac{S(\phi)}{2\sigma_a^2} \quad \text{...........} (11)$$

Karena bentuk yang terakhir ini didominasi oleh $S(\phi)$, maka untuk memaksimumkan $\ln.L(\phi,\sigma_a^2/x)$ dapat dilakukan dengan cara meminimumkan :

$$S(\phi) = \sum_{t=p+1}^{n}\left(x_t - \sum_{i=1}^{p}\phi_i x_{t-i}\right)^2$$

Dengan memisalkan: $\phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p)$

bentuk diatas dapat dituliskan dalam bentuk:

$$S(\phi) = \sum_{t=p+1}^{n} x_t^2 - 2\phi^T B. + \phi^T A\phi$$

Berikutnya:

$$\frac{\partial.S(\phi)}{\partial\phi} = 0$$

akan memberikan $-2B + 2A\phi = 0$, sehingga diperoleh :

$$\hat{\phi} = A^{-1}B, \text{ dengan } \hat{\phi} = (\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \ldots, \hat{\phi}_p)$$

Penutup

Penelitian di bidang matematika mempunyai sifat yang sangat berbeda dengan penelitian-penelitian pada bidang lain, karena dalam penelitian matematika tidak ada pengumpulan data seperti yang lazim dilakukan dalam penelitian-penelitian pada bidang studi lain; tidak ada responden untuk mengisi kuesioner dan juga tidak ada analisis statistik untuk penarikan kesimpulan. Materi yang melandasi penelitian matematika adalah hasil studi kepustakaan dari jurnal, buku teks, buletin maupun karya-karya ilmiah yang lain, sedangkan alat-alat yang digunakan untuk pembahasan adalah teori matematika seperti definisi,lemma dan teorema.

Oleh sebab itu, untuk dapat melakukan penelitian di bidang matematika dengan baik, haruslah dimulai dengan membahas soal-soal/masalah matematika dari yang paling sederhana sampai yang paling sukar sebanyak mungkin, sehingga memungkinkan munculnya masalah-masalah baru dalam pembahasan tersebut.

Daftar Pustaka

Adkins, W.A., Weintraub, S.H. (1992) *Graduate texts in mathematics.* New York: Springer-Verlag,.

Bain, L.J, Engelhardt, M. (1992) *Introduction to probability and mathematical statistics.* Belmont, California: Duxbury Press

Basu S., Rainsel, G.C. (1996) Relation between missing data likelihood and complete data restricted likelihoods regression time series models: An application to total ozone data. *Appl. Stat.*, 45: 63-72

Box, G.E.P., Tiao, G.C. (1973). *Bayesian inference in statistical analysis.* California: Addison-Wesley Publishing Company

Currie, I.D. (1995) Maximum likelihood estimation and mathematics. *Appl. Stat.*, 44: 379-394

Dudewicz, E.J., Mishra, S.N. (1988) *Modern mathematical statistics.* Singapore: Jhon Wiley & Sons

Mallet, A. (1986). A maximum likelihood estimation method for random coefficient regression models. *Biometrics,* 73: 645-656

Nelson C.R. (1973) *Applied time series analysis for managerial forecasting.* San Francisco: Holden-Day

Nicholls, D.F., Quinn, B.G. (1980) The estimation of autoregressive models with random coefficient I. *J. Time Series Anal.*, 1: 37-46

Roussas, G.G. (1972) *A first course in mathematical statistics.* California: Addison-Wesley Publishing Company

Setiadji (1999) *Matematika, Aplikasi dan penelitian Matematika.* Pidato Pengukuhan Jabatan Guru Besar di UGM

Tiao G.C., Box, G.E.P. (1981) Modeling multiple time series with applications. *J. Am. Stats. Assoc.*, 76: 376

Volume 32 | Nomor I | Januari - Juni 2008

Jurnal Sains Indonesia

Media Komunikasi Hasil Penelitian Sains dan Matematika

Gambar sampul depan :
Cacing *Dispharynx nasuta* dan *Cheilospirura hamulosa*, dijumpai pada saluran pencernaan ayam buras (lihat halaman 4)

ISSN 1978-3841