

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736. Saat itu dia memikirkan untuk menyeberangi semua jembatan di kota Kaliningrad, Rusia, tepat satu kali dan kembali ketempat semula. Publikasi atas permasalahan ini dikenal dengan teori graf. Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Pengaitan titik-titik pada graf membentuk sisi dan dapat direpresentasikan pada gambar sehingga membentuk pola graf tertentu. Pola-pola yang terbentuk didefinisikan dan dikelompokkan menjadi kelas-kelas graf. Beberapa kelas graf menurut banyaknya sisi yang insiden terhadap titik antara lain graf reguler, yang derajat setiap titiknya adalah sama dan graf irreguler, yang derajat setiap titiknya ada yang tidak sama.

Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan asli yang disebut label. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sadlăck (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970). Pelabelan merupakan pemetaan injektif yang memetakan unsur himpunan titik dan atau unsur himpunan sisi ke bilangan asli yang disebut label. Pelabelan titik adalah pelabelan dengan domain himpunan titik, pelabelan sisi adalah pelabelan dengan domain himpunan sisi, dan pelabelan total adalah pelabelan dengan domain gabungan himpunan titik dan himpunan sisi.

Hingga kini dikenal beberapa jenis pelabelan pada graf, antara lain pelabelan *gracefull*, pelabelan harmoni, pelabelan total tak beraturan, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib. Dalam pengembangan pelabelan ajaib, dikenal pula pelabelan total titik-ajaib, pelabelan total titik ajaib super, pelabelan total sisi-ajaib, dan pelabelan total sisi-ajaib super. Hingga saat ini pemanfaatan teori pelabelan graf sangat dirasakan peranannya, terutama pada sektor sistem komunikasi dan transportasi, navigasi geografis, radar, penyimpanan data komputer, dan desain *integrated circuit* pada komponen elektronik.

Pada sistem pengaturan frekuensi radio, permintaan yang besar atas pelayanan wireless dan terbatasnya frekuensi yang tersedia memerlukan penggunaan yang efisien. Masalah yang muncul adalah bagaimana agar gelombang sinyal yang digunakan dapat efisien dan tidak terjadi interferensi. Topik pengoptimalan label pada graf sedemikian hingga membuat setiap bobot titiknya berbeda, dipelajari melalui *Total Vertex Strenght (TVS)*, pada sistem pengaturan frekuensi radio, *tvS* dapat berupa jarak terkecil yang memungkinkan dua pemancar untuk melakukan transmisi data tanpa mengalami interferensi. Salah satu graf yang dapat diaplikasikan pada sistem pengaturan frekuensi radio adalah generalisasi graf Petersen.

Terdapat beberapa macam graf yang dapat dikaji untuk dikenai pelabelan total titik ajaib, dalam penulisan skripsi ini graf dipilih adalah graf *Petersen*. Ini dikarenakan Graf *Petersen* merupakan graf lengkap yang saling isomorfik dan tidak terhubung sehingga lebih mudah dalam melakukan pelabelan. Graf *Petersen* juga merupakan graf yang telah diperumum dan dinyatakan sebagai $P(n,m)$ dengan nilai n menyatakan banyaknya simpul luar (sama dengan banyak simpul dalam) dan nilai m menyatakan lompatan busur dalam, dimana $n \geq 3$ dan $1 \leq m \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ dan merupakan graf yang terdiri dari himpunan titik dan himpunan sisi. Graf *Petersen* yang diperumum pertama kali di definisikan oleh Watkins, dengan memuat sebanyak t buah graf *Petersen* yang dapat dinyatakan dengan $tP(n,m)$ yang mempunyai himpunan titik dan himpunan sisi.

Terdapat beberapa pembahasan kajian skripsi yang pernah dilakukan oleh peneliti sebelumnya yaitu mengenai pelabelan titik ajaib pada graf yaitu *Pelabelan Total Titik Ajaib (Magic Labeling) pada Gabungan Dua Generalisasi Graf Petersen* oleh Ambarini (2005) yang menyimpulkan bahwa pelabelan total titik ajaib pada gabungan graf *Petersen* dapat di definisikan sebagai pemberian label sisi dan titik pada generalisasi graph *Petersen* $P(n,m)$ dengan angka-angka $1, 2, \dots, 5n$ sehingga jumlah label sebuah titik dan label-label sisi yang terkait pada titik tersebut adalah sama.

Penelitian lain oleh Novi (2010), *Pelabelan Total Titik Ajaib pada Complete Graph* mendapatkan hasil kajian yaitu untuk melakukan pelabelan total titik ajaib pada *complete graph* K_n untuk n ganjil dan genap menggunakan

algoritma yang disusun dari algoritma penyusunan persegi ajaib yang dimodifikasi. Sedangkan Gesti (2005), *Pelabelan Total Titik Ajaib pada Gabungan Dua Graf Dua Partisi Lengkap* yang mendapatkan hasil bahwa untuk melakukan pelabelan total titik ajaib pada gabungan dua graph dua partisi lengkap digunakan suatu rumus atau pola pelabelan dengan langkah-langkah proses pelabelannya, yaitu dengan mencari interval nilai konstanta.

Penelitian mengenai pelabelan total titik ajaib dilakukan oleh Ni'mah (2010), *Pelabelan Total Titik Tak Beraturan pada Gabungan Dua Graf $K_{2,n}$ atau $(2K_{2,n})$* yang menyatakan bahwa untuk setiap titik graf $2 K_{2,n}$ dimana $b \geq 4$, bentuk umum dari nilai bobotnya berbeda sehingga mengakibatkan nilai bobot masing-masing juga berbeda.

Penelitian mengenai graf *Petersen* telah dikaji sebelumnya oleh Willy (2011), *Graf Petersen dan Beberapa Sifat-sifat yang Berkaitan (Petersen Graph and Some Related Properties)* mendapatkan hasil bahwa graf *Petersen* tidak Eulerian, graf *Petersen* tidak planar, graf *Petersen* tidak terfaktor-1, himpunan automorfisma graf *Petersen* isomorfik dengan grup simetrik berelemen lima, graf *Petersen* transitif-titik, graf *Petersen* transitif-garis, graf *Petersen* merupakan komplement graf garis dari graf lengkap orde 5, graf *Petersen* bukan graf bipartif, graf *Petersen* tidak hamiltonian, graf *Petersen* merupakan graf hipohamiltonian terkecil dengan sepuluh titik.

Penelitian lain yaitu *Pelabelan Total Titik Ajaib pada Graf Petersen* Irma (2010) dengan hasil yang menyatakan bahwa untuk $n \geq 3$ dan $1 \leq m \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, 3 buah graf *Petersen* yang diperumum $3P(n,m)$ mempunyai pelabelan total titik ajaib dengan konstanta ajaib $k = 29n + 2$. Untuk $n \geq 3$ dan $1 \leq m \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, 3 buah graf *Petersen* yang diperumum $3P(n,m)$ mempunyai pelabelan total titik ajaib dengan konstanta ajaib $k = 30n + 2$. Berdasarkan penelitian-penelitian tersebut maka dalam kajian ini akan membahas **“Pelabelan Total Titik Ajaib Pada Graf *Petersen* Yang Diperumum ($tP(n,m)$) untuk $4 \leq t \leq 6$ ”**, dimana perbedaannya terletak pada banyaknya t pada graf *Petersen* dan bentuk konstanta ajaib pada setiap t graf *Petersen* sehingga pelabelan total titik ajaib pada graf *Petersen* $tP(n,m)$ untuk $4 \leq t \leq 6$ dapat terpenuhi.

1.2. Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas maka muncul beberapa permasalahan yang akan dikaji lebih lanjut. Permasalahan-permasalahan yang muncul akan menjadi acuan untuk melakukan penelitian dan memfokuskan masalah yang akan diteliti. Sebelum melakukan penelitian seorang peneliti harus menentukan rumusan masalah terlebih dahulu. Hal ini bertujuan agar penelitian yang akan dilakukan sesuai dengan latar belakang. Adapun rumusan masalahnya adalah sebagai berikut:

- a. Bagaimana menentukan nilai konstanta ajaib pada graf *Petersen* $tP(n,m)$ untuk $4 \leq t \leq 6$?
- b. Bagaimana bentuk pola untuk pelabelan total titik ajaib pada graf *Petersen* $tP(n,m)$ untuk $4 \leq t \leq 6$?

1.3. Pembatasan Masalah

Graf yang akan dikaji merupakan graf *Petersen*, sedangkan graf *Petersen* merupakan generalisasi graf yang saling isomorfik dan tidak terhubung maka batasan masalah yang diberikan adalah:

- a. Jenis pelabelan yang dijadikan pokok pembahasan dalam pada skripsi ini adalah pelabelan total titik ajaib (*vertex-magic total labeling*).
- b. Pembahasan yang dilakukan banyaknya t pada graf *Petersen* sehingga pelabelan total titik ajaib pada graf *Petersen* $tP(n,m)$ untuk $4 \leq t \leq 6$.
- c. Graf *Petersen* yang digunakan graf $P(6,2)$.
- d. Pembahasan yang dilakukan agar dapat menemukan nilai konstanta ajaib dan tidak menimbulkan masalah baru dan terfokuskan pada masalah yang telah diajukan.

1.4. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah diatas, maka tujuan dari penulisan ini adalah untuk mendeskripsikan:

- a. Menentukan nilai konstanta ajaib pada graf *Petersen* $tP(n,m)$ untuk $4 \leq t \leq 6$.

- b. Bentuk pola untuk pelabelan total titik ajaib pada graf *Petersen* $tP(n,m)$ untuk $4 \leq t \leq 6$ sehingga dapat dikenakan pelabelan total titik ajaib.

1.5. Manfaat Penelitian

Dengan penulisan skripsi ini yang berjudul pelabelan total titik ajaib pada graf *Petersen* $tP(n,m)$ untuk $4 \leq t \leq 6$ diharapkan dapat memberikan manfaat bagi masyarakat umum. Adapun manfaat yang diharapkan dari penulisan skripsi ini antara lain :

- a. Memberikan tambahan informasi atau pengetahuan mengenai pelabelan total titik ajaib graf pada umumnya dan pada graf *Petersen* pada khususnya.
- b. Dapat dijadikan referensi tambahan bagi peneliti selanjutnya dalam melabeli graf yang sejenis.

