ANALISIS DEFLEKSI PELAT DENGAN METODA VARASIONAL

Oleh,
Drs. Nurdin Siregar, M.S.

A Pendahuluan

Pelat merupakan struktur bidang/ permukaan yang rata/datar dan tebalnya jauh lebih kecil dibandingkan dengan dimensi yang lainnya. Geometri suatu pelat dibatasi oleh garis lurus atau lengkung. Ditinjau dari segi statistika, syarat batas di tepi pelat dapat bersifat tertopang sederhana, terjepit dan bebas. Pada umumnya beban statik atau dinamik yang dipikul oleh pelat berarah tegak lurus pada permukaan pelat.

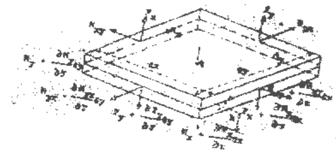
Jika pelat diberi beban, maka pelat/ bidang mengalami pelenturan selama pelenturan partikel-partikel yang berbeda pada bidang tersebut mengalami perpindahan yang tegak lurus pada bidang tersebut dan membentuk bidang tengah. Bidang tengah adalah bidang yang membagi dua sama besar ketebalan pelat. Misalnya ketebalan pelat h, maka bidang tengahnya berada pada jarak ½ h dari salah satu permukaannya. Perpindahan permukaan tengah bidang tersebut akibat bidang mengalami pelenturan disebut defleksi.

Pengkajian tentang pelat segi empat dengan syarat batas bertumpu sederhana yang memikul beban merata untuk memperoleh defleksi pelatnya telah dilakukan antara lain dengan metoda eksak (Szilard,1989) dan dengan metoda Numerik beda hingga (Callaghan, 1961), sehingga sangatlah menarik untuk mengkaji defleksi untuk pelat segi empat dengan syarat batas tepi terjepit yang dibebani merata dengan metoda varasional, karena pelat banyak digunakan sebagai tempat penyimpanan. kapal laut dan sebagainya.

B. Pembahasan

1. Persamaan Diferensial Dalam Sistem Koordinat Cartesian

Penentuan defleksi pelat dalam berbagai bentuk dapat dilakukan dengan mengandaikan bahwa beban yang bekerja pada suatu pelat berarah tegak lurus terhadap permukaan pelat. Jika ditinjau suatu elelmen potongan dari pelat dua pasang bidang yang tegak lurus pada sumbu x dan y, seperti terlihat pada gambar 1.



Gambar 1. Suatu elemen yang dipotong dari suatu pelat berbentuk segi empat

Besarnya momen lentur dan momen puntir per satuan panjang dari potongan pelat yang bekerja pada pelat adalah (Szilard, 1989, 1989

$$M_x = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

$$M_y = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad \ldots\ldots (1)$$

$$M_{xy} = -D\,(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

dengan : M_x = momen lentur per satuan panjang yang tegak lurus terhadap sumbu X (mmN/mm)

M_y = momen lentur per satuan panjang yang tegak lurus terhadap sumbu Y (mmN/mm)

M_{xy} = momen puntir sastuan panjang yang tegak lurus sumbu X (mmN/mm).

D = Ketegaran lentur pelat (N mm)

W = defleksi pelat (mm)

V = nisbah Poisson adalah perbandingan regangan lateral dengan regangan aksial.

Menurut Callaghan (1961) persamaan ketegaran lentur pelat adalah sebagai berikut.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2} \quad \ldots\ldots (2)$$

dengan : E = modulus Young (N/m^2

h = ketebalan pelat (mm)

Persamaan diferensial untuk menentukan defreksi pelat yang diberi beban dan bekerja berarah tegak lurus terhadap permukaan pelat adalah (Szilard, 1989) :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{q\ x\ y}{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

dengan : w = defleksi pelat (m).
q(x,Y) = beban (N)

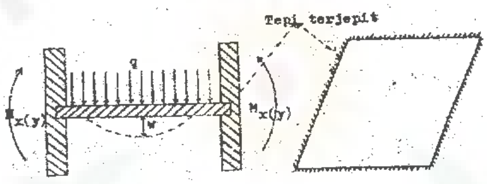
Syarat Batas Pelat Segi Empat Tepi Terjepit.

Jika tepi suatu pelat segi empat yang panjangnya a dan lebarnya b dijepit, maka defleksi pelat w sepanjang tepi pelat besarnya nol, dan bidang singgung permukaan tengah yang dilenturkan sepanjang garis tepi adalah berimpit dengan posisi awal bidang tengah pelat (gambar 2).

Syarat batasnya adalah :

$W(x,y) = 0,\qquad \partial w/\partial x = 0$ di $x =$ dan $x = a$

$\partial w/\partial y = 0$ di $y =$ dan $y = a$ .... (4)



Gambar 2. Tepi pelat segi empat terjepit.

2. Metode Varasional.

Metode varasional adalah salah satu metode pendekatan yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang mempunyai ciri-ciri untuk masalah defleksi sebagai berikut :

- Pemilihan fungsi w(x.y) yang berhubungan dengan fungsional energi potensial total lendutan Π(w) melalui kaitan (Ugural, 1981) :

$$\pi(w) = 1/2\iint_A D\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 - 2(1-\upsilon)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right]\right\}dxdy - \iint_A qwdxdy \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

dilakukan sehingga berlaku asa varasional $\delta\pi(w)=0$ untuk w(x,y) yang dicari tanpa harus menyelesaikan persamaan diferensial Euleer yang dihasilkan oleh asas tersebut tetapi dengan mengandaikan :

$w(x,y) = \sum_{i,j}^{N} C_{i,j} f_{i,j}(x,y)$ *dengan* $\{f_{i,j}(x,j)\}$ **merupakan suatu basis ekspansi yang** bersifat optium.

- Memvariasikan fungsional $\pi(w)$ melalui variabel koefisien ekspansi C_{ij} untuk memperoleh nilai parameter C_{ij} yang sesuai pada ekspansi fungsi w (x,y) tersebut dengan cara menurunkan $\pi(w)$ terhadap C_{ij} dan menyamakannya dengan nol.

$$\frac{\partial(\pi)}{\partial C_{i,j}} = 0 \quad (i, j = 1,2,\ldots N) \qquad (6)$$

apabila (6) berlaku maka $\delta\Pi(w)$ akan lenyap.

Syarat optimum bagi basis $\{f_{ij}(x,y)\}$ adalah :

- Fungsi basis ini muncul untuk menyatakan dungsi w(x,y) (Fox, 1950) sebagai upaya pendekatan bagi w (x,y).

$$w(x,y) = C_{11}f_{11}(x,y) + C_{12}f_{12}(x,y) + \ldots + C_{NN}f_{NN}(x,y) \text{ atau } w(x,y) = \sum_{i,j=1}^{N} C_{i,j} f_{i,j}(x,y) \quad \ldots(7)$$

Basis $f_{ij}(x,y)$ dikatakan lengkap apabila ekspansi (7) berlaku untuk sebarang w(x,y).

Selanjutnya diadakan pemisahan variabel sebagai berikut:

$$w(x,y) = \sum_{i}^{N} C_i f_i(x) \sum_{j}^{N} C_j g_j(y) \qquad (8)$$

- Basis $\{f_1, \ldots, f_n$ harus bebas linier yaitu memenuhi persyaratan determinan Wronski = 0.

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ f_n^{n-1} & f_n^{n-1} & \cdots & f_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0 \qquad (9)$$

dengan tanda f^n menyatakan turunan orde - N.

- Fungsi basis $f_1(x)$ dan g_j (y) merupakan penyelesaian masalah Strum - Liouville disertai syarat batas dan sifat-sifat dari fungsi yang dicari. Misalnya pada masalah defleksi dipilih f_1 yang memenuhi :

$$\frac{d^4f}{dx^4} + k^2 \frac{d^2f}{dx^2} = 0 \qquad (10)$$

dengan df/dx=D= f, sehingga persamaan (10) menjadi:

$(D^4 + k^2D^2)$ f=0

Dengan metode Laplace diperoleh penyelesaian umum:

$f(x)=A \cdot e^{ikx} + B \cdot e^{ikx} + Cx + D$ atau

$f(x0 = A \sin kx + B \cos kx + Cx + D$ .... (11)

Implementasi syarat batas memberikan ;

$f(x)|_{x=0} = B + D = 0 \text{ ---> } B = - D$

$f(x)|_{x=0} = A \sin ka + B \cos ka + Ca + D$ .... (12)

$f(x)|_{x=0} = Ak \cos kx - Bk \sin kx + C + 0 = 0$

yang menghasilkan :

$Ak = - C$

$f'(x)_{x=a} = Ak \cos kx - Bk \sin kx + C + 0 = 0$

yang menghasilkan :

$Ak = -C$

$f'(x)|_{xa} = Ak \cos kx - Bk \sin kx + C + 0 = 0$

Jadi :

$Ak \cos ka - Bk \sin Ka + C + 0 = 0$ .... (13)

Persamaan (12) dan (13) merupakan suatu persamaan linier homogen yang menyajikan matriksnya berbentuk :

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sin ka & \cos ka & a & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ k \cos ka & -\sin ka & 1 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} = 0$$

Syarat agar ujud penyelesaian tak trivial adalah determinan (det Q) harus lenyap det $Q = 2 (\cos ka -1) + ka \sin ka = 0$

atau

$2\{1-\sin^2 (ka/2)-1\} + 2 ka \sin (ka/2) \cos (ka/2) = 0$

$\{\sin (ka.2)\} \{(ka/2) \cos (ka/2) - \sin (ka/2) \} = 0$

sebagai penyelesaiannya diperoleh :

$\sin (ka/2) = 0$ atau $\{(ka/2) \cos (ka/2) - \sin (ka/2) = 0$

untuk :

$\sin (ka/2) = 0 \text{ --->} ka/2 = m\pi \text{ --->} k = 2m\pi/a$ .... (14)

Substitusi persamaan (14) ke pers. (12) menghasilkan :

$CA = -(B+D), \quad A=0$ .... (15)

$C = 0$

Persamaan (14) disubsitusikan ke pers. (16) menghasilkan:

$f_m(x) = D_m \{1-\cos(2m\pi x/a)+ Cx + D$ ....(16)

Persamaan (14) dan (15) apabila disubstitusikan ke pers. (16) menghasilkan :

$f_m(x) = D_m \{1 - \cos (2m\pi x/a)\}$ .... (17)

sehingga penyelesaian umum berbentuk:

$$f(x) = \sum^{\infty} D_m \{1-\cos(2m\pi x/a)\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

Karena $f_m(x)$ menunjukkan penyelesaian masalah Sturm Leouvile (Stakgold, 1979) maka terjamin bahwa $\{f_i\}$ lengkap berarti dapat digunakan untuk mengekspansikan sebarang fungsi yang memenuhi syarat batas.

Selanjutnya fungsi defleksi pelat yang dicari diandaikan berbentuk:

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\left(1-\cos\frac{2m\pi x}{a}\right)\left(1-\cos\frac{2n\pi y}{a}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

Sebagai perluasan basis satu dimensi pada ekspansi:

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m â1-\cos\frac{2m\pi x}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

dengan basis : $f_m(x0 = \{1 - \cos(2m\pi x/a)$

Basis fungsi $f_m(x)$ memenuhi syarat optimum sebab:

- Memenuhi syarat batas persamaan (4)
  $df_m(x)/dx = (2m\pi/a)\sin(2m\pi/a)=0 \text{---}> x=0$ dan $x = a$ dan memenuhi sifat finis fungsi yang dicari yaitu maksimum di $(a/2,a/2)$.
  $df_m(x)/dx=(2m\pi/a)\sin(2m\pi/a)=0$ di titik $(a/2,a/2)$.
- Terhadap basis $f_m(x0$ maka fungsi $w(x)$ dapat dinyatakan dalam deret
  $w(x)=a_1f_1(x) + a_2f_2(x) + \ldots\ldots\ldots + a_Nf_N(x)$ atau

  $$w(x)= \sum_{m=1}^{N} a_m f_m(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

  untuk $w(x)$ sebarang. Maka dalam hal ini basis fungsi $f_m(x)$ dikatakan lengkap.
- Basis fungti $\{f_m(x)\}$ memenuhi syarat determinan Wronski = 0 maka dikatakan bebas linier.

$$\begin{bmatrix} \left(1-\cos\frac{2\pi x}{a}\right) & \left(1-\cos\frac{2\pi x}{a}\right) & \ldots\ldots & \left(1-\cos\frac{2m\pi x}{a}\right) \\ \frac{2\pi}{a}\sin\frac{2\pi}{a} & \frac{4\pi}{a}\sin\frac{4\pi x}{a} & \ldots\ldots & \frac{2m\pi}{a}\sin\frac{2m\pi x}{a} \\ \vdots & \vdots & & \\ -\left(\frac{2\pi}{a}\right)^{m-1}\sin\frac{2\pi x}{a} & -\left(\frac{4\pi}{a}\right)^{m-1}\sin\frac{4\pi x}{a} & \ldots\ldots & -\left(\frac{2m\pi}{a}\right)^{m-1}\sin\frac{2m\pi x}{a} \end{bmatrix} = 0$$

Basis $f_m(x)$ bebas linier ini himpunannya bersifat lengkap.

Energi potensial total untuk pelat segi empat yang memikul beban lateral adalah:

$$\pi(w) u(w) - v(w) \qquad \text{.......................................} \quad (22)$$

Energi regangan pelat segi empat dapat ditulis sebagai berikut (Szilard, 1989) :

$$u(w) = 1/2 \iint_A D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\upsilon) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dxdy \quad \text{.........} (23)$$

Energi potensial akibat pembebanan q(x,y) adalah (Ugural, 1981):

$$v(w) \iint_A wq \, dx \, dy \qquad \text{.......................................} \quad (24)$$

Suku akhir pada pers (5) di integrasi parsial pada y dengan batas dengan batas y=0 dany= a adalah:

$$\iint_A \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dxdy = \int_{Sy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} dx - \iint_A \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} dxdy \quad \text{...............................} (25)$$

atau

$$\iint_A \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dxdy = \int_{Sy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} dx - \int \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy + \iint_A \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} dxdy \quad \text{.....} (26)$$

Berdasarkan syarat batas tepi pelat (4) dihasilkan persamaan berikut:

$$\iint_A \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dxdy \quad \text{.......................................} (27)$$

Disubstitusikan Pers. (27) ke pers.(5) menghasilkan:

$$u(w) = D/2 \iint_A \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - wq \right] dxdy \quad \text{.......................................} (28)$$

Persamaan (27) disubstitusikan ke persamaan (23) menghasilkan :

$$u(w) = (D/2) \int_0^a \int_0^a \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} 4\pi^2 a_{mn} \left[\left(\pi^2 / a^2 \right) \cos(2m\pi \, x / a) \right] \left[1 - \cos(2n\pi \, y / a) \right] + \right\}$$

$$\left[\left(\pi^2 / a^2\right)\cos(2n\pi\, y/a)\right]\left[1-\cos(2n\pi\, y/a)\right] \}^2 dxdy \qquad (29)$$

atau

$$u(w) = 2\pi^4 a^2 D \{ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[3(m/a)^4 + 3(n/a)^4 + 2(m/a)^2(n/a)^2 +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} 2(m/a)^4 a_{ms} a_{ms} + \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} 2(n/a)^4 a_{rn} a_{sn} \} \qquad (30)$$

yang hanya berlaku untuk r = s

Persamaan (19) disubstitusikan ke pers. (24) menghasilkan:

$$v(w) = q_0 \int_0^a\int_0^a \left\{ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\left[1-\cos(2m\pi\, x/a)\right]\left[1-\cos(2n\pi\, y/a)\right]\right\} dxdy$$

$$v(w) = q_0 \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} a^2 \qquad (31)$$

Persamaan (30)dan(31) disubstitusikan ke persamaan (22) menghasilkan:

$$\pi(w) = 2\pi^4 a^2 D \{ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[3(m/a)^4 + 3(n/a)^4 + 2(m/a)^2(n/a)^2 +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} 2(m/a)^4 a_{ms} a_{ms} + \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} 2(n/a)^4 a_{rn} a_{sn} \} - q_0 \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} a^2 \qquad (32)$$

Dengan menggunakan kondisi energi potensial total minimum (6) maka persamaan (32) menjadi ;

$$\{\partial\pi(w)/\partial a_{mn} = 4\pi^4 a^2 D\{[3(m/a)^4 + 3(n/a)^4 + 2(m/a)^2(n/a)^2]a_{mn}$$

$$+\sum_{r=1}^{\infty} 2(m/a)^4 a_{mr} + \sum_{r=1}^{\infty} 2(n/a)^4 a_{rn}\} - q_0 a^2 = 0 \qquad (33)$$

yang hanya berlaku untuk r=n dan r=m.

Selanjutnya dengan hanya meninjau suku pertama dalam persamaan (33) maka parameter a_{11} diperoleh:

$$a_{11} = \frac{q_0 a^4}{4\pi^4 D} x \frac{1}{3 + 3(a/a)^4 + 2(a/a)^2}$$

$$a_{11} = \frac{q_0 a^4}{4\pi^4 D} x \frac{1}{3+3+2}$$

$$a_{11} = \frac{q_0 a^4}{32\pi^4 D}$$

Parameter a_{11} selanjutnya disubstitusikan ke pers (19) menghasilkan lendutan maksimum yang terjadi di (x=a/2,y=a/2) yaitu:

$$w(x,y) = 0{,}00128 q_0 a^4 \ / \ D$$

C. Kesimpulan

Pelat merupakan struktur bidang/permukaan yang rata dan tebalnya jauh lebih kecil dibandingkan dengan dimensi yang lainnya. Jika pelat segiempat dengan batas tepi jepit dibebani beban merata, maka defleksi pelat tersebut dapat dihitung dengan menggunakan metode varasional.

Metode varasional adalah salah satu metode pendekatan yang dapat menyelesaikan persamaan diferensial dengan syarat batas tepi jepit yang berkaitan dengan masalah defleksi. Nilai defleksi maksimum pelat segi empat dengan syarat batas tepi jepit yang dibebani beban merata diperoleh sebesar $w(x,y)=0{,}00128\ q_0 a^4 \ / \ D$.

oooooOOOOOoooo

DAFTAR PUSTAKA

Callaghan, J.B. 1961. A Program for the Solution of Thin Elastic Plate Equations on the Philco-200 Computer, Mathematics and Computers WAPD-TM-225,pp 3.

Fox, C. 1954. Calculus of Variations Oxfor University Press.

Stakgold, I. 1979. Green's Functions And Boundary Value Problem, Jhon Wiley & Sons, Inc.

Szilard. R. 1989. Teori dan Analisi Pelat, Erlangga, Jakarta.

Ugural, A.C. 1981. Streses In Plates And Shells, Mc Graw Hill Book Company, New York.

oooo0000oooo