BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Jika A dan B adalah dua buah himpunan, maka himpunan semua pasangan terurut (x, y) dimana $x \in A$ dan $y \in B$ disebut perkalian langsung atau perkalian kartesian dari A dan B dan dinotasikan dengan $A \times B$ dan secara simbolis dituliskan sebagai berikut

$$A \times B = \{(x, y): x \in A \wedge y \in B\}.$$

Juga dua pasangan terurut (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) dikatakan sama hanya ketika $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$. Oleh karena itu, secara umum

$$A \times B \neq B \times A.$$

Konsep perkalian dua himpunan yang didefinisikan di atas dapat juga diperbanyak untuk lebih dari dua himpunan. Sehingga, jika A, B dan C adalah tiga buah himpunan, maka

$$\begin{aligned}(A \times B) \times C &= \{(x, y): x \in A \wedge y \in B\} \times C \\ &= \{(x, y, z): x \in A, y \in B \wedge z \in C\}\end{aligned}$$

Sama juga dengan

$$A \times (B \times C) = \{(x, y, z): x \in A, y \in B \wedge z \in C\}$$

sehingga perkalian kartesian dari tiga buah himpunan A , B dan C bersifat assosiatif dan terdiri dari pasangan rangkap tiga (x, y, z) dimana $x \in A$, $y \in B$ dan $z \in C$.

Generalisasi definisi di atas untuk perkalian n buah himpunan $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ didapat

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): x_r \in A_r \ untuk\ r = 1,2, \dots, n\}$$

yaitu setiap elemen dari $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ adalah pasangan terurut dari n-tupel$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ diman $x_r \in A_r\ untuk\ r = 1,2, \dots, n$

dan jika $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$.

Maka dapat ditulis dengan $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = A^n$. ***(Hania, 1980)***

"Dalam penelitian ini telah dikaji hasil kali langsung dari dua buah grup atau lebih pada grup. Kemudian penelitian ini masih memerlukan penelitian lanjutan yang mendalam. Kepada peneliti lain yang berminat untuk melakukan penelitian disarankan dapat membahas hasil kali langsung pada grup faktor." ***(Manik, 2006)***

"…karena keterbatasan penulis, maka dalam skripsi ini perkalian langsung pada grup faktor tidak dibahas." ***(Manik, 2006)***

Kutipan di atas diambil dari skripsi mahasiswa Program Studi Matematika Universitas Negeri Medan yang berjudul Studi tentang Hasil Kali Langsung pada Grup. Setelah membaca saran dari mahasiswa tersebut, peneliti ingin membahasnya dalam skripsi peneliti.

Seperti yang telah diuraikan sebelumnya, pengkajian tentang hasil kali langsung telah dicoba pada dua buah grup atau lebih. Lalu bagaimanakah jika perkalian langsung tersebut diterapkan untuk dua buah grup faktor atau lebih. Itulah yang akan menjadi bahan penelitian pada skripsi ini, berikut uraiannya.

Misalkan G adalah grup dan H subgrup normal dari G. Himpunan $G/H = \{gH | g \in G\}$ merupakan grup terhadap operasi $(aH)(bH) = (ab)H$. Selanjutnya, G/H disebut dengan grup faktor. ***(Galian, Joseph A., 1990)***

Misalkan G_1/H_1 dan G_2/H_2 dua buah grup faktor. Kemudian dengan definisi hasil kali himpunan didapat

$$G_1/H_1 \times G_2/H_2 = \{(a_1, a_2); a_1 \in G_1/H_1 \; dan \; a_2 \in G_2/H_2\}$$

Didefinisikan sebuah operasi (untuk menunjukkan perkalian) pada $G_1/H_1 \times G_2/H_2$ sehingga untuk dua elemen sebarang (a_1, a_2) dan (b_1, b_2) dari $G_1/H_1 \times G_2/H_2$ didapat

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$$

Lalu misalkan $G_1/H_1, G_2/H_2, \dots, G_n/H_n$ adalah n buah grup faktor, apakah perkalian langsung dari n buah grup faktor merupakan grup faktor , lebih lanjut apakah $G_1/H_1 \times G_2/H_2 \times \ldots \times G_n/H_n$ akan isomorfik dengan $G_n/H_n \times \ldots \times G_2/H_2 \times G_1/H_1$. Berdasarkan uraian di atas, maka peneliti ingin menyelidiki permasalahan tersebut menjadi tugas akhir dengan judul **" Studi tentang Hasil Kali Langsung pada Grup Faktor "**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang masalah, yang menjadi rumusan masalah dalam penelitian ini adalah :

1. Misalkan $G_1/H_1, G_2/H_2, \ldots, G_n/H_n$ adalah n buah grup faktor, apakah perkalian langsung dari n buah grup faktor merupakan grup faktor?
2. Apakah $G_1/H_1 \times G_2/H_2 \times \ldots \times G_n/H_n$ isomorfik dengan $G_n/H_n \times \ldots \times G_2/H_2 \times G_1/H_1$?

1.3 Tujuan Penelitian

1. Untuk menunjukkan apakah perkalian langsung n buah grup faktor juga merupakan sebuah grup faktor.
2. Untuk menunjukkan apakah $G_1/H_1 \times G_2/H_2 \times \ldots \times G_n/H_n$ isomorfik dengan $G_n/H_n \times \ldots \times G_2/H_2 \times G_1/H_1$.