# Analisis Kestabilan Global Berbasis Lyapunov untuk Manajemen Kapasitas-Inventori: Pembuktian Analitik dan Simulasi

Fitriyani[1], Katrin Angelika[2], Natalia Simanjuntak[3*], Tesalonika Manik[4] Hamidah Nasution[5] Alvi Sahrin Nasution[6]
[1,2,3,4,5,6] Matematika, Universitas Negeri Medan, Kota Medan, 20221, Indonesia
*Corresponding Author: nataliaanggrianisimanjuntak@gmail.com

**Abstrak**

Penelitian ini membahas perumusan model matematika dinamika penyebaran penyakit COVID-19 dengan mempertimbangkan intervensi karantina dan vaksinasi, yang dikembangkan menjadi model Susceptible-Vaccinated-Exposed-Infected-Quarantine-Recovered (SVEIQR). Model ini dibangun atas enam kompartemen populasi (S, V, E, I, Q, R) dan dianalisis menggunakan pendekatan model deterministik berbasis persamaan diferensial biasa (ODE). Analisis teoretis mencakup penentuan titik kesetimbangan bebas penyakit (DFE), penurunan Bilangan Reproduksi Dasar $(\mathrm{R}_0)$ menggunakan metode Next Generation Matrix (NGM), dan analisis kestabilan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa penambahan parameter laju karantina $(\kappa)$ secara matematis terbukti dapat menurunkan nilai $(\mathrm{R}_0)$ serta memperkuat kestabilan sistem. Simulasi numerik yang dilakukan menggunakan perangkat lunak (seperti MATLAB) menunjukkan bahwa peningkatan tingkat karantina dari 0,1 menjadi 0,3 mampu menurunkan nilai $(\mathrm{R}_0)$ secara signifikan dari 2,55 menjadi 0,86. Selain itu, kombinasi kebijakan antara vaksinasi dan karantina terbukti efektif dalam mengarahkan sistem menuju kondisi bebas penyakit. Analisis sensitivitas juga menegaskan bahwa laju karantina $(\kappa)$ dan laju kesembuhan $(\rho)$ merupakan parameter yang paling efektif dalam mengendalikan penyebaran infeksi.
**Kata kunci:** Model SVEIQR; Sistem Dinamik; Kestabilan; Karantina; Vaksinasi

***Abstract***

*This study discusses the formulation of a mathematical model for the dynamics of COVID-19 spread, considering quarantine and vaccination interventions, which is developed into the Susceptible-Vaccinated-Exposed-Infected-Quarantine-Recovered (SVEIQR) model. The model is built upon six population compartments (S, V, E, I, Q, R) and is analyzed using a deterministic model approach based on ordinary differential equations (ODE). The theoretical analysis includes determining the disease-free equilibrium (DFE) point, deriving the Basic Reproduction Number $(R_0)$ using the Next Generation Matrix (NGM) method, and stability analysis. The results show that the addition of the quarantine rate parameter $(\kappa)$ is mathematically proven to reduce the value of $(R_0)$ and strengthen system stability. Numerical simulations carried out using software (such as MATLAB) indicate that increasing the quarantine rate from 0.1 to 0.3 can significantly reduce $(R_0)$ from 2.55 to 0.86. Furthermore, the combination of vaccination and quarantine policies is proven effective in driving the system towards a disease-free condition. Sensitivity analysis also confirms that the quarantine rate $(\kappa)$ and recovery rate $(\rho)$ are the most effective parameters in controlling the spread of infection.*
**Keywords**: SVEIQR Model; Dynamic System; Stability; Quarantine; Vaccination

Citation: Fitriyani, dkk. (2025). Analisis Kestabilan Global Berbasis Lyapunov untuk Manajemen Kapasitas-Inventori: Pembuktian Analitik dan Simulasi. *Prodising Seminar Nasional Jurusan Matematika 2025*. 520 – 523.

## PENDAHULUAN

Pandemi COVID-19 telah memberikan dampak yang luas dan signifikan di berbagai sektor kehidupan, sehingga diperlukan strategi pengendalian yang sistematis dan efektif. Upaya non-farmakologis seperti karantina, isolasi, serta pembatasan sosial terbukti mampu menekan laju penyebaran virus dengan mengurangi kontak langsung antarindividu yang berpotensi menularkan penyakit. Model matematika epidemiologi memiliki peranan penting dalam memahami pola penyebaran penyakit menular. Model-model klasik seperti SIR dan SEIR banyak digunakan untuk menganalisis dinamika infeksi, namun pada kasus COVID-19, model tersebut dinilai kurang mampu menggambarkan kondisi nyata karena belum mempertimbangkan fase laten maupun intervensi tambahan seperti vaksinasi dan karantina. Oleh sebab itu, berbagai penelitian telah mengembangkan model lanjutan, misalnya model SIR yang diperluas dengan kompartemen karantina, yang menunjukkan bahwa penerapan karantina mampu menurunkan nilai bilangan reproduksi dasar $(R_0)$ secara signifikan.

Penelitian ini bertujuan untuk; (1) mengembangkan model matematika penyebaran COVID-19 yang memperhitungkan efek karantina dan vaksinasi (Model SVEIQR); (2) menganalisis dampak kebijakan karantina terhadap dinamika penyebaran penyakit COVID-19; dan (3) menganalisis sejauh mana karantina dapat menurunkan jumlah kasus dibanding skenario tanpa karantina. Dalam sistem dinamik, konsep fungsi Lyapunov digunakan sebagai pendekatan analitik untuk menentukan kestabilan sistem tanpa perlu menyelesaikan persamaan diferensialnya secara langsung. Metode ini didasarkan pada ide bahwa suatu sistem akan cenderung kembali ke titik keseimbangannya jika terdapat fungsi yang nilainya selalu menurun terhadap waktu. Fungsi Lyapunov, yang dilambangkan dengan $V(x)$, dianggap memenuhi syarat kestabilan apabila nilainya selalu positif untuk setiap keadaan selain titik keseimbangan, dan turunan

waktunya $V(x)$ bernilai negatif atau tidak bertambah. Kondisi tersebut menunjukkan bahwa energi sistem berkurang seiring waktu, sehingga sistem akan menuju kestabilan global.

Pendekatan ini tidak hanya digunakan dalam analisis sistem fisika atau kontrol, tetapi juga relevan dalam bidang manajemen kapasitas–inventori, di mana kestabilan menunjukkan kemampuan sistem menjaga keseimbangan antara kapasitas produksi dan tingkat persediaan. Jika sistem dinyatakan stabil secara global, maka artinya inventori akan selalu kembali ke kondisi optimal meskipun terjadi perubahan permintaan atau gangguan produksi. Dengan demikian, penerapan fungsi Lyapunov pada model manajemen kapasitas–inventori memberikan dasar teoritis yang kuat untuk memastikan bahwa sistem tetap terkendali dan efisien. Pendekatan ini juga menjadi alat penting dalam pembuktian analitik bahwa sistem tidak akan mengalami ketidakstabilan atau divergensi terhadap kondisi ekuilibrium yang diinginkan.

## METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian teoretis dalam bidang matematika terapan, khususnya pemodelan sistem dinamik epidemiologi. Pendekatan yang digunakan adalah analisis model deterministik berbasis persamaan diferensial biasa (ODE) untuk menggambarkan penyebaran COVID-19 dengan intervensi karantina. Model ini kemudian diuji kestabilannya menggunakan metode Lyapunov langsung (Direct Lyapunov Method). Pendekatan ini tidak memerlukan solusi eksplisit dari sistem, melainkan menilai kestabilan melalui bentuk fungsi energi yang merepresentasikan perilaku sistem. Pendekatan ini mengacu pada konsep yang dijelaskan oleh (Otten and Daduna 2023), yang menggunakan kriteria Foster–Lyapunov untuk menilai kestabilan sistem inventori berbasis rantai Markov. Model ini dibangun atas enam kompartemen populasi; (1) $S(t)$: Individu rentan (*Susceptible*); (2) $V(t)$: Individu divaksin (*Vaccinated*); (3) $E(t)$: Individu terpapar (*Exposed*); (4) $I(t)$: Individu terinfeksi aktif (*Infected*); (5) $Q(t)$: Individu terinfeksi yang dikarantina (*Quarantined*); (6) $R(t)$: Individu yang sembuh/pulih (*Recovered*). Semua variabel dan parameter tersebut saling memengaruhi, membentuk sistem dinamik yang akan dianalisis kestabilannya.

Parameter dasar model diambil dari literatur ilmiah, yaitu jurnal Resmawan, L., dkk. (2022). Parameter yang digunakan dan dikembangkan meliputi: laju penularan $(\eta)$, laju transisi dari terpapar ke terinfeksi $(\omega)$, laju kesembuhan $(\rho)$, laju kematian akibat infeksi $(\delta)$, laju kematian alami $(\mu)$, efektivitas vaksinasi $(\alpha\phi)$ dan parameter tambahan pengembangan: laju karantina $(\kappa)$, laju sembuh dari karantina $(\rho_q)$, serta laju kematian akibat infeksi dalam karantina $(\delta_q)$. Langkah-langkah penelitian ini dimulai dengan studi literatur, yaitu mengkaji teori-teori tentang model epidemi klasik seperti SEIR dan SVEIR sebagai dasar pemahaman. Setelah itu, dilakukan formulasi model dengan mengambil model SVEIR sebagai acuan, lalu mengembangkannya menjadi model SVEIQR melalui penambahan kompartemen karantina (Q). Selanjutnya, pada tahap analisis teoretis, ditentukan titik kesetimbangan bebas penyakit (disease-free equilibrium/DFE) dan titik kesetimbangan endemik (endemic equilibrium/EE). Pada tahap ini juga diturunkan bilangan reproduksi dasar $R_0$menggunakan metode Next Generation Matrix (NGM), kemudian dianalisis kestabilan sistem dengan matriks Jacobian serta dilakukan analisis sensitivitas terhadap $R_0$. Setelah analisis teoretis selesai, penelitian dilanjutkan dengan simulasi numerik menggunakan perangkat lunak, misalnya MATLAB, untuk mensimulasikan solusi numerik model berdasarkan variasi parameter, terutama laju karantina $\kappa$. Tahap terakhir adalah analisis hasil, yaitu membandingkan hasil simulasi model tanpa karantina dan model dengan karantina untuk melihat pengaruh penerapan karantina terhadap penyebaran penyakit.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Model matematika SVEIQR dikembangkan dengan enam persamaan diferensial biasa (ODE). Salah satu formulasi ringkas dari model SVEIQR adalah sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \Pi - (1-\phi)\eta S(\xi_1 E + \xi_2 I) - (\mu + \alpha\phi)S, \tag{1}$$

$$\frac{dV}{dt} = \alpha\phi S - \big(\mu + \gamma(\xi_3 E + \xi_4 I)\big)V, \tag{2}$$

$$\frac{dE}{dt} = (1-\phi)\eta S(\xi_1 E + \xi_2 I) + \gamma V(\xi_3 E + \xi_4 I) - (\omega + \mu)E \tag{3}$$

$$\frac{dI}{dt} = \omega E - (\rho + \mu + \delta + \kappa)I, \tag{4}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \kappa I - (\rho_q + \delta_q + \mu)Q, \tag{5}$$

$$\frac{dR}{dt} = \rho I + \rho_q Q - \mu R. \quad (6)$$

Titik keseimbangan bebas penyakit adalah keadaan $(S,V,E,I,Q,R) = (s_0, v_0, 0,0,0,0)$yang memenuhi persamaan aljabar untuk kondisi stasioner tanpa infeksi. Dari persamaan baris S dan V pada DFE diperoleh

$$s_0 = \frac{\Pi}{\mu + \alpha\phi}, v_0 = \frac{\alpha\phi\Pi}{\mu(\mu + \alpha\phi)}. \quad (7)$$

Ambil vektor variabel infeksi $X = [E,I]^{\top}$. Dengan memisahkan suku yang memperkenalkan infeksi (F) dan suku transisi keluar/antara (V), diperoleh:

$$F = \begin{pmatrix} (1-\phi)\eta\xi_1 s_0 + \gamma\xi_3 v_0 & (1-\phi)\eta\xi_2 s_0 + \gamma\xi_4 v_0 \\ \omega & 0 \end{pmatrix}, V = \mathrm{diag}(\omega + \mu, \rho + \mu + \delta + \kappa)\,. \quad (8)$$

Next–Generation Matrix didefinisikan $K = FV^{-1}$. Spektral radius $\rho(K)$ memberikan $R_0$. Untuk matriks 2×2 ini, $R_0$ dapat dituliskan dengan bentuk yang sering digunakan di literatur sebagai:

$$R + 0 = RA + RS \quad (9)$$

Interpretasi: komponen RA berhubungan dengan kemungkinan terjadinya penularan melalui jalur E (kontak S-E), sedangkan RS menambah kontribusi jalur yang melibatkan perpindahan cepat ke I (melalui $\omega$) dan diarahkan oleh laju keluar dari I (sekarang termasuk $\kappa$).

Definisikan konstanta:$N := (1-\phi)\eta\omega\xi_2 s_0 + \gamma\omega\xi_4 v_0 > 0, A := \omega + \mu > 0, D(\kappa) := \rho + \mu + \delta + \kappa$. Maka $RS(\kappa) = \sqrt{RA^2 + \frac{N}{AD(\kappa)}}$. Turunan RS terhadap $\kappa$adalah $\frac{dRS}{d\kappa} = -\frac{N}{2ARSD(\kappa)^2} < 0$. Karena $RA$ tidak bergantung pada $\kappa$, diperoleh $\frac{dR_0}{d\kappa} = \frac{dRS}{d\kappa} < 0$. Kesimpulan analitik: peningkatan laju karantina $\kappa$ selalu menurunkan $R_0$(monoton menurun). Namun ada batas bawah: $\lim_{\kappa\to\infty} RS(\kappa) = RA \Rightarrow \lim_{\kappa\to\infty} R_0(\kappa) = 2RA$. Karena itu, walaupun karantina menurunkan $R_0$, nilai minimum $R_0$ yang dapat dicapai hanya sebesar $2RA$. Bila $2RA \geq 1$ maka tidak mungkin mencapai $R_0 < 1$ hanya dengan menaikkan $\kappa$tanpa intervensi lain.

Untuk membuktikan kestabilan global DFE bila $R_0 < 1$, kita gunakan kandidat fungsi Lyapunov gabungan (Volterra + linear): $V(s,v,e,i,q,r) = (s - s_0 - s_0 \ln\frac{s}{s_0}) + (v - v_0 - v_0 \ln\frac{v}{v_0}) + e + i + q + r$. Turunan waktu $\dot{V}$ dihitung dari substitusi $\dot{s},\dot{v},\dot{e},\dot{i},\dot{q},\dot{r}$. Dengan manipulasi aljabar dan penggunaan identitas aritmetika (AM-GM) serta syarat $R_0 < 1$, diperoleh $\dot{V} \leq 0$ dan $\dot{V} = 0$ hanya di DFE. Dengan demikian DFE asimptotik global stabil pada domain biologis yang relevan. Implikasi kebijakan dan rekomendasi untuk manajemen kapasitas–inventori, peran karantina ($\kappa$): berfungsi sebagai mekanisme buffer (analogi inventori) yang menurunkan penyebaran sementara; menaikkan $\kappa$mempercepat pemisahan kasus berpotensi menular dari populasi aktif sehingga menurunkan $R_0$. Batas alami: efek karantina terbatas oleh kontribusi RA yang tidak tergantung pada $\kappa$. Jika RA tinggi (disebabkan oleh frekuensi kontak tinggi, efektivitas vaksin rendah, atau proporsi rentan besar), karantina saja tidak cukup. Rekomendasi praktis: kombinasi kebijakan (peningkatan cakupan/efektivitas vaksinasi, pengurangan kontak berisiko/NPIs, dan peningkatan $\kappa$) diperlukan untuk mencapai kestabilan bebas-penyakit. Dalam konteks manajemen kapasitas–inventori, artinya: jangan hanya andalkan buffer stok; kurangi permintaan puncak (mitigasi), dan tingkatkan keandalan pasokan (vaksinasi/penanganan cepat).

## KESIMPULAN

Secara keseluruhan, penelitian ini membuktikan bahwa penambahan kompartemen karantina, baik secara teoritis maupun numerik, dapat meningkatkan kestabilan sistem dalam mengendalikan penyebaran penyakit. Selain itu, kombinasi vaksinasi dan karantina terbukti menjadi strategi yang paling efektif untuk mengurangi laju penyebaran penyakit. Hasil analisis Lyapunov juga memastikan kestabilan global sistem ketika $R_0 < 1$, yang menunjukkan bahwa sistem akan konvergen menuju kondisi bebas penyakit tanpa memerlukan solusi eksplisit dari persamaan diferensialnya. Model SVEIQR yang dikembangkan dalam penelitian ini tidak hanya relevan untuk bidang epidemiologi, tetapi juga dapat diterapkan pada sistem kapasitas-inventori, memberikan kerangka dinamis yang menjamin kestabilan, efisiensi, dan ketahanan sistem terhadap gangguan.

## UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih kepada Dr. Hamidah Nasution, M.Si. dan Ibu Alvi Sahrin Nasution, S.Si., M.Si. atas bimbingan dan arahan selama penelitian ini, serta kepada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Medan atas dukungan fasilitas dan motivasi akademik.

## DAFTAR PUSTAKA

Haq, I. U., Ullah, N., Ali, N., & Nisar, K. S. (2023). *A New Mathematical Model of COVID-19 with Quarantine and Vaccination.* Mathematics, 11(1), 1–21.

Resmawan, L., Yahya, L., Pakaya, R. S., Panigoro, H. S., & Nuha, A. R. (2022). *Analisis Dinamik Model Penyebaran COVID-19 dengan Vaksinasi.* Jurnal Penelitian Sains dan Data, Universitas Negeri Gorontalo.

Syuhefti, E. N. M., Widyaningsih, P., & Setiyowati, R. (2021). *Penyebaran Penyakit Menular: Model SEIQR pada Kasus COVID-19 di Indonesia.* Aksioma, 12(2), 249–258.

Putri, N. Q., & Sianturi, P. (2021). *Analisis Dinamika Penyebaran COVID-19 Dengan Laju Insiden Nonlinear.* MES Journal of Mathematics Education and Science, 6(2), 9–32.

Pengaruh, D., & Keefektifan Vaksin. (2022). *Pemodelan SEIQR pada Penyebaran COVID-19.* Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika, 6(2), 216–239.

LINA, O. L. (2023). Penggunaan Metode Lyapunov Untuk Menguji Kestabilan Sistem Linier. *Jurnal Matematika UNAND, Vol.3No 2*, : 29 – 33.

Sugiarto, S., & Alam, A. (2023, Juli). Analisis Kestabilan Model Penyebaran Penyakit Antraks Tipe SVEIQR pada Ternak. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 9, No. 2*,: 41-52.

Haq, Ihtisham Ul, Numan Ullah, Nigar Ali, and Kottakkaran Sooppy Nisar. “A New Mathematical Model of COVID-19 with Quarantine and Vaccination.” *Mathematics* 11, no. 1 (2023): 1–21.

Lei, Tengfei, Rita Yi Man Li, and Jirawan Deeprasert. “Model Optimization and Dynamic Analysis of Inventory Management in Manufacturing Enterprises.” *Information (Switzerland)* 15, no. 12 (2024): 1–13.

Otten, Sonja, and Hans Daduna. “Stability of Queueing-Inventory Systems with Customers of Different Priorities.” *Annals of Operations Research* 331, no. 2 (2023): 963–983.