Model Dinamik MSEITR Penyebaran Tuberkulosis dengan Kesembuhan Alami di Provinsi Sumatera Utara

Abdurrahman [1*], Christina N. Simanjuntak [2], Iin Julianti Br. Sitepu [3] , Michel Angelina Simanjuntak [4] , Romaito Theodora Situmorang [5] , Hamidah Nasution [6], Alvi Sahrin Nasution [7]
[1.2.3.4.5.6.7] Matematika, Universitas Negeri Medan, Kota Medan, 20221, Indonesia
* Corresponding Author: rahmanst25103@gmail.com

Abstrak

Model matematika berperan penting dalam memahami dinamika penyebaran penyakit menular, salah satunya tuberkulosis (TBC) yang masih menjadi masalah kesehatan global, termasuk di Provinsi Sumatera Utara. Penelitian ini mengembangkan model dinamik tipe MSEITR (Maternal Antibody – Susceptible –Exposed – Infected – Treatment– Recovered) dengan mempertimbangkan faktor kesembuhan alami pada individu yang berada pada tahap Exposed. Pengembangan ini bertujuan untuk memberikan gambaran yang lebih realistis terhadap perjalanan penyakit TBC dalam populasi serta menganalisis pengaruhnya terhadap kestabilan sistem epidemi. Model disusun dalam bentuk sistem persamaan diferensial nonlinier yang kemudian dianalisis menggunakan metode kestabilan titik tetap dan pendekatan Next Generation Matrix untuk menentukan bilangan reproduksi dasar R_0. Hasil analisis menunjukkan bahwa titik bebas penyakit stabil apabila $R_0 < 1$, sedangkan sistem menjadi tidak stabil ketika $R_0 > 1$, yang mengindikasikan kondisi endemik. Simulasi numerik memperlihatkan bahwa jumlah individu yang terinfeksi menurun seiring peningkatan pengobatan dan kesembuhan alami, sementara populasi sembuh (Recovered) meningkat signifikan hingga mencapai kestabilan. Dengan demikian, model yang dikembangkan dapat menjadi dasar ilmiah dalam merumuskan strategi pengendalian TBC yang lebih efektif dan sesuai kondisi riil di Provinsi Sumatera Utara.
Kata kunci: Model MSEITR; Tuberkulosis; Kesembuhan alami; Kestabilan; Bilangan reproduksi dasar

Abstract

Mathematical models play a crucial role in understanding the dynamics of infectious disease transmission, including tuberculosis (TB), which remains a global health issue, particularly in North Sumatra Province. This study develops a dynamic model of the MSEITR type (Maternal Antibody–Susceptible–Exposed–Infected–Treatment–Recovered) by incorporating the natural recovery factor among individuals in the Exposed class. The aim is to provide a more realistic representation of TB progression within a population and to analyze its influence on the stability of the epidemic system. The model is formulated as a system of nonlinear differential equations and analyzed using the equilibrium stability method and the Next Generation Matrix approach to determine the basic reproduction number R_0. The results show that the disease-free equilibrium is stable when $R_0 < 1$, while the system becomes unstable when $R_0 > 1$, indicating an endemic condition. Numerical simulations demonstrate that the number of infected individuals decreases with increased treatment and natural recovery, while the recovered population grows significantly until reaching stability. Therefore, the developed model provides a scientific basis for designing more effective TB control strategies suited to real-world conditions in North Sumatra Province.
Keywords: MSEITR Model; Tuberculosis; Natural recovery; Stability; Basic reproduction number

Citation: Abdurrahman, dkk. (2025). Model Dinamik MSEITR Penyebaran Tuberkulosis dengan Kesembuhan Alami di Provinsi Sumatera Utara l. *Prodising Seminar Nasional Jurusan Matematika 2025*. 495 – 502.

PENDAHULUAN

Model matematika berperan sebagai salah satu pendekatan yang dapat digunakan untuk mempermudah pemecahan berbagai permasalahan dalam kehidupan nyata. Salah satu penerapannya adalah dalam analisis penyebaran penyakit menular di suatu wilayah atau daerah tertentu. Untuk mempelajari dinamika penyebaran penyakit tersebut, terdapat berbagai jenis model yang umum digunakan, baik yang bersifat deterministik maupun stokastik. Beberapa di antaranya meliputi model SI, SIS, SIR, SEIR, dan SEIRS. Setiap model memiliki karakteristik tersendiri yang disesuaikan dengan pola dan jenis penularan penyakit yang dikaji, seperti model SEIRS yang sering diterapkan untuk menggambarkan penyebaran penyakit tuberkulosis (Syam et al., 2021).

Tuberkulosis (TBC) masih menjadi salah satu permasalahan kesehatan utama di dunia, termasuk di Indonesia (Muhafzan et al., 2024). Penyakit ini disebabkan oleh infeksi bakteri *Mycobacterium tuberculosis* yang bersifat menular dan dapat menyerang paru-paru serta organ tubuh lainnya seperti kulit, tulang belakang, dan usus. Penularan biasanya terjadi melalui udara ketika penderita TBC batuk, bersin, atau meludah sehingga partikel yang mengandung bakteri terhirup oleh orang lain. (Putri et al., 2023). Infeksi tersebut dapat berkembang menjadi TBC aktif apabila sistem imun tubuh tidak mampu menahan pertumbuhan bakteri. Namun, pada individu dengan kekebalan tubuh yang kuat, bakteri dapat tetap berada dalam keadaan laten tanpa menimbulkan gejala apa pun, meskipun masih berpotensi aktif kembali saat daya tahan tubuh menurun. Oleh sebab itu, pencegahan, deteksi dini, dan pengobatan yang tepat sangat

diperlukan untuk menekan penyebaran penyakit ini di masyarakat. Kesembuhan alami atau *self-cure* pada tuberkulosis (TBC) adalah keadaan ketika infeksi oleh *Mycobacterium tuberculosis* dapat mereda atau sembuh tanpa melalui pengobatan anti-TB standar yang lengkap (Avilov et al., 2022). Fenomena ini menunjukkan bahwa sistem imun tubuh, terutama melalui peran sel T $CD4^+$ dan aktivasi makrofag, mampu menekan atau mengeliminasi pertumbuhan bakteri hingga di bawah ambang deteksi klinis (Carabalí-Isajar et al., 2023). Dalam literatur klinis modern, kondisi ini dapat terjadi pada beberapa spektrum penyakit, yaitu TBC aktif dengan gejala, TBC subklinis (bakteriologis positif tanpa gejala jelas), dan TBC laten atau non-aktif di mana bakteri berada dalam keadaan dorman (Churchyard et al., 2024). Meskipun demikian, kesembuhan alami tidak selalu berarti sterilitas total karena *M. tuberculosis* dapat bertahan dalam bentuk persisten dan berpotensi menyebabkan reaktivasi di masa mendatang. Perilaku kesembuhan alami berbeda antar keadaan ini dan dipengaruhi faktor imun inang, beban bakteri, dan komorbiditas.

Kasus Tuberkulosis (TBC) di Provinsi Sumatera Utara pada tahun 2025 menunjukkan angka yang mengkhawatirkan. Data dari Dinas Kesehatan Sumatera Utara mencatat bahwa pada periode Januari hingga Mei 2025 terdapat sebanyak 18.411 kasus TBC yang teridentifikasi. Estimasi total kasus TBC di Sumatera Utara pada tahun 2025 mencapai sekitar 74.297 kasus, dimana ini merupakan sekitar 25 persen dari estimasi total kasus yang ditargetkan oleh Kementerian Kesehatan RI untuk wilayah tersebut. Penyebaran TBC paling banyak terjadi di kalangan usia produktif, khususnya di Kota Medan yang mencatat angka penularan cukup tinggi. Penularan utama terjadi akibat kontak erat dengan pasien yang sudah terinfeksi, terutama di lingkungan rumah tangga, dan masih rendahnya kesadaran masyarakat untuk memeriksakan diri sehingga banyak kasus terlambat didiagnosis dan diobati.

Penelitian Saleng et al. (2022) menghadirkan model matematika penyebaran tuberkulosis tipe MSEITR (Maternal Antibody–Susceptible–Exposed–Infected–Treatment–Recovered) yang secara khusus menggabungkan pengaruh vaksinasi dan pengobatan sebagai strategi utama dalam menekan angka kasus tuberkulosis di Provinsi Gorontalo. Model ini membagi populasi menjadi enam kelas berdasarkan status imun atau penyakit, mulai dari individu yang memiliki kekebalan pasif dari ASI, individu rentan, hingga mereka yang terpapar, terinfeksi, menjalani pengobatan, dan sembuh. Analisis kestabilan model menunjukkan bahwa sistem epidemi akan stabil pada titik bebas penyakit apabila nilai bilangan reproduksi dasar (R0) kurang dari satu, yang berarti penularan penyakit dapat dikendalikan jika vaksinasi dan pengobatan dilakukan secara efektif. Namun demikian, model tersebut belum memperhitungkan kemungkinan adanya individu pada tahap Exposed (E) yang dapat sembuh secara alami sebelum berkembang menjadi penderita aktif, padahal kondisi ini biologisnya cukup relevan dalam penyebaran penyakit TBC (Saleng et al., 2022).

Pengembangan lebih lanjut dari model ini dengan memasukkan parameter kesembuhan alami δ_1 pada kompartemen Exposed bertujuan untuk memberikan gambaran yang lebih realistis mengenai perjalanan penyakit tuberkulosis dalam populasi. Penambahan aspek ini mencerminkan bahwa tidak semua individu yang terpapar bakteri akan langsung menjadi penderita aktif, melainkan sebagian dapat pulih secara alami tanpa intervensi pengobatan. Dengan memperhitungkan kesembuhan alami ini, model dapat menghasilkan prediksi dinamis yang lebih akurat terkait penyebaran penyakit dan kestabilan sistem epidemi. Hal ini juga berdampak pada analisis bilangan reproduksi dasar yang menjadi tolok ukur keberhasilan intervensi kesehatan, sehingga memberikan dasar yang lebih kuat untuk pengambilan kebijakan yang efektif dan sesuai kondisi riil di masyarakat.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan pendekatan kuantitatif dengan metode pemodelan matematika dan simulasi numerik berbasis sistem dinamik untuk menganalisis penyebaran penyakit tuberkulosis di Provinsi Sumatera Utara dengan mempertimbangkan pengaruh vaksinasi dan pengobatan. Model yang digunakan merupakan model kompartemen tipe MSEITR (Maternal Antibody, Susceptible, Exposed, Infected, Treatment, Recovered), yang menggambarkan alur perpindahan individu antar kelas populasi melalui sistem persamaan diferensial nonlinier.

Perumusan model dilakukan dengan asumsi bahwa laju kelahiran dan kematian bersifat konstan, setiap individu yang baru lahir memiliki imun pasif dari ibu, vaksin hanya diberikan kepada individu rentan, serta individu yang sembuh tidak kembali menjadi rentan. Parameter model mencakup laju infeksi, vaksinasi, pengobatan, kesembuhan, dan kematian akibat penyakit. Nilai parameter diperoleh dari data sekunder yang bersumber dari Dinas Kesehatan Provinsi Sumatera Utara (2024) dan Badan Pusat Statistik (BPS), serta dilengkapi dengan referensi dari literatur terkait. Data kasus tuberkulosis digunakan sebagai dasar dalam menentukan nilai awal variabel, sedangkan data demografi digunakan untuk menetapkan parameter populasi seperti laju kelahiran dan kematian.

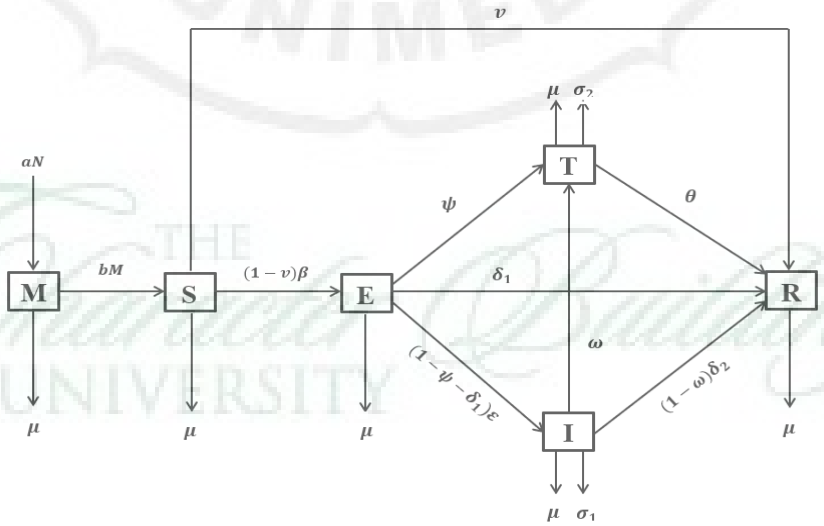
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada awal penyusunan model, individu yang baru lahir ditempatkan dalam kelompok Maternal Antibody (M). Seiring waktu, kekebalan yang diperoleh dari ibu tersebut akan hilang, sehingga individu berpindah ke kelompok rentan (S). Jika individu rentan melakukan kontak dengan penderita TB, maka ia dapat terpapar dan masuk ke kelompok Exposed (E). Individu dalam kelas terpapar yang mendapatkan pengobatan akan berpindah ke kelas Treatment (T). Begitu juga, individu yang sudah berada pada kelas Infected (I) dapat menjalani pengobatan dan dipindahkan ke kelas T. Selanjutnya, individu terinfeksi memiliki kemungkinan sembuh secara alami, sementara individu dalam kelas T akan sembuh setelah menjalani terapi. Dengan demikian, perpindahan antar kelas populasi dalam model ini ditentukan oleh parameter-parameter yang telah ditetapkan pada Tabel 1.

Tabel 1. Parameter Model

Parameter	Keterangan
α	Laju Kelahiran
b	Laju penurunan tingkat kekebalan tubuh yang dilindungi imun pasif
μ	Laju Kematian alami
σ_1	Laju kematian akibat penyakit TB yang tidak diberikan treatment
σ_2	Laju kematian akibat penyakit TB yang diberikan treatment
β	Laju infeksi TB
v	Laju vaksinasi
ω	Laju pengobatan pada kelas populasi terinfeksi
θ	Laju Kesembuhan dengan proses pengobatan
ε	Laju masa inkubasi
ψ	Laju pengobatan pada kelas populasi terpapar
δ_1	Peluang individu sembuh secara alami nonaktif
δ_2	Peluang individu sembuh secara alami aktif

Adapun asumsi yang digunakan dalam merumuskan model adalah sebagai berikut; (1) laju kelahiran dan kematian adalah konstan; (2) setiap individu yang baru lahir memiliki imun pasif yang diperoleh dari ASI; (3) penyakit TB dapat menular melalui kontak langsung dengan penderita; (4) setiap individu yang rentan akan terpapar oleh penyakit; (5) adanya tingkat kematian yang diakibatkan oleh penyakit; (6) individu yang sembuh tidak menjadi rentan Kembali; (7) vaksin hanya diberikan pada individu kelas populasi rentan; dan (8) kekebalan yang terjadi karena vaksin bersifat permanen. Berdasarkan penjelasan di atas dirumuskan, suatu diagram kompartemen yang menginterpretasikan skenario model matematika penyebaran penyakit tuberkulosis tipe MSEITR yang dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Diagram Kompartemen model matematika penyebaran penyakit Tuberkolosis

Berdasarkan diagram kompartemen yang ditunjukkan pada Gambar 1, dapat disusun sistem persamaan diferensial sebagai berikut; $\frac{dM}{dt} = \alpha N - bM - \mu M$;$\frac{dS}{dt} = bM - (1-v)\beta\frac{1}{N}S - vS - \mu S$; $\frac{dE}{dt} = (1-v)\beta\frac{1}{N}S - (1-\psi)\varepsilon E - \psi E - \delta_1 E - \mu E$; $\frac{dI}{dt} = (1-\psi)\varepsilon E - (1-\omega)\delta I - (\omega + \mu + \sigma_1)I$; $\frac{dT}{dt} = \omega I + \psi E - (\theta + \sigma_2)T - \mu T$; $\frac{dR}{dt} = \theta T + vS + (1-\omega)\delta I + \delta_1 E - \mu R$. Dalam rangka mempermudah analisis model, dilakukan normalisasi terhadap variabel dengan mendefinisikan $m = \frac{M}{N}, s = \frac{S}{N}, e = \frac{E}{N}, i = \frac{I}{N}, t_h = \frac{T}{N}, dan\ r = \frac{R}{N}$. Hasil dari proses ini menghasilkan sistem persamaan

diferensial baru yang dinyatakan sebagai berikut; (1) $\frac{dm}{dt} = \alpha - bm - \mu m$; (2) $\frac{ds}{dt} = bm - (1-v)\beta iS - vs - \mu s$; (3) $\frac{de}{dt} = (1-v)\beta is - (1-\psi)\varepsilon e - \psi e - \delta_1 e - \mu e$; (4) $\frac{di}{dt} = (1-\psi)\varepsilon e - (1-\omega)\delta_2 i - (\omega + \mu + \sigma_1)i$; (5) $\frac{dt_h}{dt} = \omega i + \psi e - (\theta + \sigma_2)t_h - \mu t_h$; dan (6) $\frac{dr}{dt} = \theta t_h + vs + (1-\omega)\delta_2 i + \delta_1 e - \mu r$. Titik Kritis (Equalibrium) $\frac{dm}{dt} = 0$; $\frac{di}{dt} = 0$; $\frac{ds}{dt} = 0$ $\frac{de}{dt} = 0$; $\frac{dt_h}{dt} = 0$; $\frac{dr}{dt} = 0$

- Titik Bebas Penyakit (E_0) $I = 0$

1. $\frac{dm}{dt} = 0$
   $\alpha - bm - \mu m = 0$
   $m_0 = \frac{\alpha}{b+\mu}$

2. $\frac{ds}{dt} = 0$
   $bm - (1-v)\beta iS - vs - \mu s = 0$
   $s_0 = \frac{bm^*}{v+\mu}$
   $s_0 = \frac{b\alpha}{(v+\mu)(b+\mu)}$

3. $\frac{dr}{dt} = 0$
   $\theta t_h + vs + (1-\omega)\delta_2 i + \delta_1 e - \mu r = 0$
   $r_0 = \frac{vs^*}{\mu}$
   $r_0 = \frac{vb\alpha}{\mu(v+\mu)(b+\mu)}$

Maka, $E_0(m, s, e, i, t_h, r) = \left(\frac{\alpha}{b+\mu}, \frac{b\alpha}{(v+\mu)(b+\mu)}, 0,0,0, \frac{vb\alpha}{\mu(v+\mu)(b+\mu)}\right)$

Maka, $E_0(m, s, e, i, t_h, r) = \left(\frac{\alpha}{b+\mu}, \frac{b\alpha}{(v+\mu)(b+\mu)}, 0,0,0, \frac{vb\alpha}{\mu(v+\mu)(b+\mu)}\right)$

- Titik tetap endemik (E_1) $I \neq 0$

1. $\frac{dm}{dt} = 0$
   $\alpha - bm - \mu m = 0$
   $m_* = \frac{\alpha}{b+\mu}$

2. $\frac{ds}{dt} = 0$
   $bm - (1-v)\beta iS - vs - \mu s = 0$
   $(v + \mu + (1-v)\beta i^*)s^* = bm^*$
   $s^* = \frac{bm^*}{v+\mu+(1-v)\beta i^*}$

3. $\frac{de}{dt} = 0$
   $(1-v)\beta is - (1-\psi)\varepsilon e - \psi e - \delta_1 e - \mu e = 0$
   $\big((1-\psi)\varepsilon + \psi + \delta_1 + \mu\big)e^* = (1-v)\beta i^* s^*$
   $e^* = \frac{(1-v)\beta i^* s^*}{(1-\psi)\varepsilon+\psi+\delta_1+\mu}$
   $e^* = \frac{(1-v)\beta i^* s^*}{\varepsilon+\psi+\delta_1+\mu-\varepsilon\psi}$

4. $\frac{di}{dt} = 0$
   $(1-\psi)\varepsilon e - (1-\omega)\delta_2 i - (\omega + \mu + \sigma_1)i = 0$
   $\big((1-\omega)\delta_2 + (\omega + \mu + \sigma_1)\big)i^* = (1-\psi)\varepsilon e^*$
   $i^* = \frac{(1-\psi)\varepsilon e^*}{(1-\omega)\delta_2+(\omega+\mu+\sigma_1)}$
   $i^* = \frac{(1-\psi)\varepsilon e^*}{\delta_2+\omega+\mu+\sigma_1+\delta_2\omega}$

© Jurusan Matematika - Universitas Negeri Medan

5. $\frac{dt_h}{dt} = 0$

$\omega i + \psi e - (\theta + \sigma_2)t_h - \mu t_h = 0$

$((\theta + \sigma_2) + \mu)t_h^* = \omega i^* + \psi e^*$

$t_h^* = \frac{\omega i^* + \psi e^*}{(\theta+\sigma_2)+\mu}$

6. $\frac{dr}{dt} = 0$

$\theta t_h + vs + (1-\omega)\delta_2 i + \delta_1 e - \mu r = 0$

$\mu r^* = \theta t_h + vs + (1-\omega)\delta_2 i + \delta_1 e$

$r^* = \frac{vs^* + \theta t_h^* + \delta_2 i^* - \delta_2 \omega i^* + \delta_1 e}{\mu}$

Maka, $E_1(m_*, s_*, e_*, i_*, t_{h_*}, r_*) = \left(\frac{\alpha}{b+\mu}, \frac{bm^*}{v+\mu+(1-v)\beta i^*}, \frac{(1-v)\beta i^* s^*}{\varepsilon+\psi+\delta_1+\mu-\varepsilon\psi}, \frac{(1-\psi)\varepsilon e^*}{\delta_2+\omega+\mu+\sigma_1+\delta_2\omega}, \frac{\omega i^* + \psi e^*}{(\theta+\sigma_2)+\mu}, \frac{vs^* + \theta t_h^* + \delta_2 i^* - \delta_2\omega i^* + \delta_1 e}{\mu}\right)$

Untuk menghitung bilangan reproduksi dasar, digunakan pendekatan *Next Generation Matrix*. Melalui metode ini, diperoleh bentuk matriks F dan V yang dievaluasi pada kondisi kesetimbangan tanpa infeksi Ω_0 sebagai berikut:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b(1-v)\alpha\beta}{(b+\mu)(v+\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} \mu + (1-\psi)\varepsilon + \psi + \delta_1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon(1-\psi) & \mu + \sigma_1 + \delta_2(1-\omega) + \omega & 0 \\ -\psi & -\omega & \theta + \mu + \sigma_2 \end{pmatrix}$$

Bilangan reproduksi dasar adalah nilai eigen positif terbesar dari matriks FV^{-1}, yaitu

$$R_0 = \frac{b\alpha\beta\varepsilon(1-v)(1-\psi)}{(b+\mu)(v+\mu)(\varepsilon+\mu+\psi(1-\varepsilon)+\delta_1)(\mu+\sigma_1+\delta_2+\omega(1-\omega)}$$

Linearisasi

$f_1(m,s,e,i,t_h,r) = \alpha - bm - \mu m$

$f_2(m,s,e,i,t_h,r) = bm - (1-v)\beta i S - vs - \mu s$

$f_3(m,s,e,i,t_h,r) = (1-v)\beta i s - (1-\psi)\varepsilon e - \psi e - \delta_1 e - \mu e$

$f_4(m,s,e,i,t_h,r) = (1-\psi)\varepsilon e - (1-\omega)\delta_2 i - (\omega + \mu + \sigma_1)i$

$f_5(m,s,e,i,t_h,r) = \omega i + \psi e - (\theta + \sigma_2)t_h - \mu t_h$

$f_6(m,s,e,i,t_h,r) = \theta t_h + vs + (1-\omega)\delta_2 i + \delta_1 e - \mu r$

Matriks Jacobian

$$J_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial m} & \frac{\partial f_1}{\partial s} & \frac{\partial f_1}{\partial e} & \frac{\partial f_1}{\partial i} & \frac{\partial f_1}{\partial t_h} & \frac{\partial f_1}{\partial r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial m} & \frac{\partial f_2}{\partial s} & \frac{\partial f_2}{\partial e} & \frac{\partial f_2}{\partial i} & \frac{\partial f_2}{\partial t_h} & \frac{\partial f_2}{\partial r} \\ \frac{\partial f_3}{\partial m} & \frac{\partial f_3}{\partial s} & \frac{\partial f_3}{\partial e} & \frac{\partial f_3}{\partial i} & \frac{\partial f_3}{\partial t_h} & \frac{\partial f_3}{\partial r} \\ \frac{\partial f_4}{\partial m} & \frac{\partial f_4}{\partial s} & \frac{\partial f_4}{\partial e} & \frac{\partial f_4}{\partial i} & \frac{\partial f_4}{\partial t_h} & \frac{\partial f_4}{\partial r} \\ \frac{\partial f_5}{\partial m} & \frac{\partial f_5}{\partial s} & \frac{\partial f_5}{\partial e} & \frac{\partial f_5}{\partial i} & \frac{\partial f_5}{\partial t_h} & \frac{\partial f_5}{\partial r} \\ \frac{\partial f_6}{\partial m} & \frac{\partial f_6}{\partial s} & \frac{\partial f_6}{\partial e} & \frac{\partial f_6}{\partial i} & \frac{\partial f_6}{\partial t_h} & \frac{\partial f_6}{\partial r} \end{bmatrix}$$

$$J_0 = \begin{bmatrix} -b-\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & -v-\mu & 0 & -\dfrac{b(1-v)\alpha\beta}{(b+\mu)(v+\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu-\varepsilon(1-\psi)-\psi-\delta_1 & \dfrac{b(1-v)\alpha\beta}{(b+\mu)(v+\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon(1-\psi) & -\mu-\sigma_1-\delta_2(1-\omega)-\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi & \omega & -\theta-\mu-\sigma_2 & 0 \\ 0 & v & 0 & \delta_2(1-\omega) & \theta & -\mu \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, dilakukan pencarian nilai eigen dari matriks J_0, dengan menyelesaikan persamaan berikut:

$$\det(J_0 - \lambda I) = 0$$

Empat eigenvalue langsung dari faktor-faktor linear pada polinomial karakteristik adalah

$$\lambda_1 = -(b+\mu),\ \lambda_2 = -(v+\mu),\ \lambda_3 = -(\theta+\mu+\sigma_2),\ \lambda_4 = \mu$$

Hal ini menunjukan bahwa empat nilai eigen dari matriks J_o bernilai negative. Dua nilai eigen lainnya dari matriks J_0 diperoleh

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

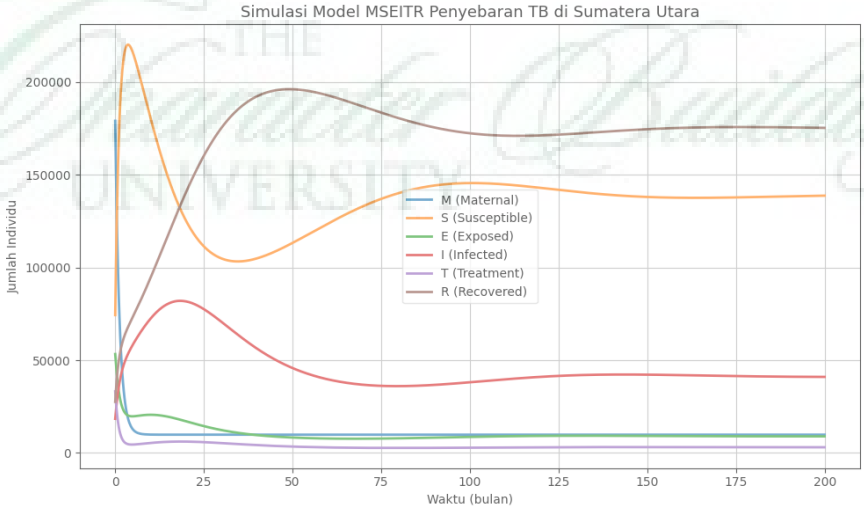
$$a_1 = 2\mu + \sigma_1 + \varepsilon(1-\psi) + \psi + \delta_1 + \delta_2(1-\omega) + \omega$$

$$a_2 = (1-R_0)\big(\varepsilon+\mu+\psi(1-\varepsilon)\big)\big(\delta_1+\delta_2(1-\omega)+\mu+\sigma_1+\omega(1-\delta_2)\big)$$

Karena semua parameter nilainya positif dan berada pada rentang nilai $[0,1]$ diperoleh $a_1 > 0$ untuk penentuan nilai a_2 bergantung pada nilai R_0. Bila $R_0 < 1$ maka $a_2 > 0$ sehingga akar karakteristiknya memiliki bagian real negatif san titik bebas penyakit stabil. Sebaliknya, jika $R_0 >$ maka $a_2 < 0$ menyebabkan salah satu nilai eigen positif dan sistem menjadi tidak stabil. eskipun pada awalnya hanya sedikit individu yang terinfeksi, penyakit akan berkembang dan menyebar ke populasi secara luas. Kondisi ini menandakan bahwa penyakit akan menetap atau menjadi endemik dalam sistem.

Tabel 2. Parameter Untuk Simulasi MSEITR di Sumatera Utara

Parameter	Nilai
α	$0{,}021/bulan$
b	$0{,}8/\ bulan$
μ	$0{,}021/bulan$
σ_1	$0{,}004/bulan$
σ_2	$0{,}008/bulan$
β	$0{,}335/bulan$
v	$0{,}0001/bulan$
ω	$0{,}07/bulan$
θ	$0{,}99/bulan$
ε	$0{,}48/bulan$
ψ	$0{,}03/bulan$
δ_1	$0{,}02/\ bulan$
δ_2	$0{,}01/\ bulan$



Gambar 2 Simulasi Model Mseitr Penyebaran TBC di Sumatera Utara

Grafik simulasi Model MSEITR penyebaran TB di Sumatera Utara menunjukkan dinamika perubahan jumlah individu pada tiap kompartemen terhadap waktu (bulan). Pada awal simulasi, individu dengan imunitas maternal (M) menurun tajam, yang menyebabkan kelompok rentan (S) meningkat pesat. Akibatnya, terjadi lonjakan pada individu terinfeksi (I) dalam beberapa bulan pertama. Setelah puncak awal ini, jumlah penderita TB menurun karena peningkatan jumlah individu yang sembuh (R) dan sebagian masuk dalam pengobatan (T). Seiring waktu, semua kompartemen mengalami penyesuaian hingga mencapai keadaan stabil (endemi). Pada kondisi jangka panjang, jumlah Recovered (R) menjadi paling tinggi, diikuti oleh Susceptible (S), sedangkan Infected (I) menetap pada tingkat menengah. Hal ini menunjukkan bahwa penyakit TB masih bertahan di populasi meskipun tidak lagi meledak seperti awal. Kompartemen Treatment (T), Exposed (E), dan Maternal (M) tetap relatif kecil pada kondisi stabil. Simulasi ini juga menggambarkan bahwa TB di Sumatera Utara cenderung menuju kondisi endemik, di mana penyakit tetap ada dalam populasi pada tingkat konstan. Untuk menekan angka infeksi lebih lanjut, peningkatan cakupan pengobatan, pencegahan penularan, dan perlindungan bagi kelompok rentan perlu diperkuat.

KESIMPULAN

Pengembangan model matematika MSEITR dengan mempertimbangkan faktor kesembuhan alami pada individu yang terpapar memberikan gambaran yang lebih realistis terhadap dinamika penyebaran penyakit tuberkulosis di Provinsi Sumatera Utara. Hasil analisis menunjukkan bahwa kestabilan sistem sangat bergantung pada nilai bilangan reproduksi dasar (R_0), di mana penyakit dapat dikendalikan apabila $R^0 < 1$. Simulasi numerik memperlihatkan bahwa TB cenderung menetap dalam kondisi endemik apabila intervensi seperti vaksinasi dan pengobatan belum optimal.

DAFTAR PUSTAKA

Muhafzan, M., Khairunnisa, K., & Baqi, A. I. (2024). Kestabilan Titik Tetap Model Seir Penyebaran Penyakit Tuberkulosis. *Jurnal Matematika UNAND*, *13*(3), 149–156. https://doi.org/10.25077/jmua.13.3.149-156.2024

Putri, T. R., Hilmi, I. L., & Salman, S. (2023). Review Artikel : Hubungan Pemberian Imunisasi Bcg Terhadap Penyakit Tuberkulosis Pada Anak. *Journal of Pharmaceutical and Sciences*, *6*(1), 237–242. https://doi.org/10.36490/journal-jps.com.v6i1.16

Saleng, R. A. S., Nuha, A. R., Yahya, L., & Resmawan, R. (2022). Analisis Dinamik Model Matematika Penyebaran Penyakit Tuberkulosis dengan Pengaruh Vaksin dan Pengobatan di Provinsi Gorontalo. *Equator: Journal of Mathematical and Statistical Sciences*, *1*(1), 18. https://doi.org/10.26418/ejmss.v1i1.59111

Syam, R., Side, S., & Said, C. S. (2021). Model SEIRS Penyebaran Penyakit Tuberkulosis di Kota Makassar. *Journal of Mathematics Computations and Statistics*, *3*(1), 11. https://doi.org/10.35580/jmathcos.v3i1.19180

Badan Pusat Statistik Provinsi Sumatera Utara. (2024). *Kasus penyakit menurut kabupaten/kota dan jenis penyakit di Provinsi Sumatera Utara, 2024.* Diakses dari https://sumut.bps.go.id/id/statistics table/3/YTA1Q1ptRmhUMEpXWTBsQmQyZzBjVzgwUzB4aVp6MDkjMyMxMjAw/kasus-penyakit-menurut-kabupaten-kota-dan-jenis-penyakit-di-provinsi-sumatera-utara.html?year=2024

Badan Pusat Statistik Provinsi Sumatera Utara. (2024). *Jumlah penduduk menurut jenis kelamin dan kabupaten/kota.* Diakses dari https://sumut.bps.go.id/id/statistics-table/2/NjUjMg==/jumlah-penduduk-menurut-jenis-kelamin-dan-kabupaten-kota.html

Badan Pusat Statistik Provinsi Sumatera Utara. (2024). *Total Fertility Rate (TFR) Sumatera Utara hasil Long Form SP2020 sebesar 2,48.* Diakses dari https://share.google/nvBWPNEjCyKTVSxG6

Dinas Kesehatan Provinsi Sumatera Utara. (2024). *Sumut mantapkan langkah menuju eliminasi TBC 2030 bersama 7 provinsi lain.* Diakses dari https://dinkes.sumutprov.go.id/artikel/sumut-mantapkan-langkah-menuju-eliminasi-tbc-2030-bersama-7-provinsi-lain-1756368393

Badan Pusat Statistik. (2020). *Angka kelahiran total / Total Fertility Rate (TFR) hasil Long Form SP2020 menurut provinsi / kabupaten / kota, 2020.* Diakses dari https://www.bps.go.id/id/statistics-table/1/MjIxMSMx/angka-kelahiran-total---total-fertility-rate--tfr--hasil-long-form--lf--sp2020-menurut-provinsi-kabupaten-kota--2020-.html

Avilov, K. K., Danilova, I. D., Romanova, E. S., & Klinkova, A. S. (2022). *Mathematical modeling of the progression of active tuberculosis: Definitions and role of self-cure in models. Infectious Disease Modelling, 7*(4), 640–652. https://doi.org/10.1016/j.idm.2022.06.008

Carabalí-Isajar, M. L., Mejía-Galeano, E., Ortiz, B. L., & Hernández-Patiño, C. E. (2023). *Clinical manifestations and immune response to tuberculosis: Current understanding and perspectives. Frontiers in Immunology, 14*, 1185472.

https://doi.org/10.3389/fimmu.2023.1185472

Churchyard, G. J., Fielding, K. L., Esmail, H., & Lawn, S. D. (2024). *Implications of subclinical tuberculosis for vaccine trial design and control strategies. The Lancet Microbe, 5*(1), e12–e24. https://doi.org/10.1016/S2666-5247(23)00242-9