Metode Integral Lipat Tiga dalam Perhitungan Volume dan Titik Berat Air Waduk Jatiluhur : Studi Analitik dan Diskretisasi Grid

Aisyah Aditiya Lestari Lubis [1], Dina Theresya Sitorus [2], Endi Saputra[3] Joel Indrawan Damanik[4]
[1,2,3,4] Matematika, Universitas Negeri Medan, Kota Medan, 20221, Indonesia
*Corresponding Author: sayaaisyahlubis@gmail.com

Abstrak

Waduk Jatiluhur merupakan waduk terbesar di Indonesia yang berfungsi penting dalam irigasi, penyediaan air baku, pembangkit listrik tenaga air, dan pengendalian banjir, namun kapasitas tampungannya terus berkurang akibat sedimentasi. Penelitian ini bertujuan menghitung volume dan titik berat waduk dengan model paraboloid menggunakan metode integral lipat tiga serta validasi numerik melalui diskretisasi grid. Model kedalaman udara diformulasikan sebagai $h(r) = h_{max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$dimana h(r)itu kedalaman air pada jarak radiar r,R itu jari jari ekuivalen waduk, h_{max} itu kedalaman maksimum waduk. Volume ditentukan melalui integral rangkap tiga dalam koordinat silinder, yaitu $V = \int_0^{2\pi}\int_0^{R}\int_0^{h(r)} r\, dz\, dr\, d\theta$. Hasil perhitungan menunjukkan volume sebesar ±2.448 × 10^9 m konsisten dengan kapasitas resmi waduk. Titik berat Vertikaldiperoleh melalui $\bar{z} = \frac{1}{v}\iiint \Omega\, Z\, dv$ dengan hasil sekitar 19,7 m dari dasar waduk dari dasar waduk. Validasi numerik menggunakan diskretisasi grid berukuran 100 x100 m,menghasilkan nilai volume dan titik berat yang konsisten dengan hasil analitik. Penelitian ini membuktikan bahwa metode integral lipat tiga dan diskretisasi grid efektif untuk memperkirakann volume serta distribusi massa air waduk, dan dapat diterapkan sebagai dasar dalam monitoring kapasitas serta pengendalian sedimentasi secara berkelanjutan.
Kata kunci: Waduk Jatiluhur, Integral Lipat Tiga, Paraboloid, Diskretisasi Grid

Abstract

Jatiluhur Dam is one of the largest reservoirs in Indonesia, playing a vital role in irrigation, hydropower generation, and flood control. Over time, its storage capacity has decreased due to sedimentation, requiring a mathematical method to accurately estimate the water volume and centroid. This study applies the triple integral method to calculate the volume and centroid of the reservoir modeled as a paraboloid and validates it using the grid discretization approach. The reservoir shape is represented by the depth function $h(r) = h_{max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$ *where is the maximum depth and the equivalent radius. The volume is determined using the triple integral in cylindrical coordinates* $V = \int_0^{2\pi}\int_0^{R}\int_0^{h(r)} r\, dz\, dr\, d\theta$. *The results show that the reservoir volume is approximately, which is consistent with the official normal capacity. The vertical centroid is calculated using* $\bar{z} = \frac{1}{v}\iiint \Omega\, Z\, dv$*yielding a depth of about 19.7 meters above the reservoir bottom. The grid discretization validation with cells provides results consistent with the analytical method. The study concludes that the triple integral and grid discretization are effective for estimating reservoir volume and centroid, offering a reliable basis for monitoring storage capacity and sedimentation control.*
Keywords: Jatiluhur Dam, triple integral, paraboloid, centroid, grid discretization.

Citation: Lubis, A. A. L., dkk. (2025). Metode Integral Lipat Tiga dalam Perhitungan Volume dan Titik Berat Air Waduk Jatiluhur : Studi Analitik dan Diskretisasi Grid. *Prodising Seminar Nasional Jurusan Matematika 2025*. 454 – 461.

PENDAHULUAN

Waduk memiliki peranan yang sangat penting dalam pengelolaan sumber daya air, baik untuk irigasi, penyediaan air baku, pembangkit listrik, pengendalian banjir, maupun fungsi ekologi dan juga sosial lainnya. Salah satu aspek utama di dalam pengelolaan waduk adalah kemampuan suatu waduk untuk menyimpan volume air yang cukup sesuai desainnya, serta mengetahui distribusi kedalaman dan titik berat air agar operasi dan pemeliharaan waduk dapat dilakukan secara optimal. Namun, banyak waduk di Indonesia, termasuk Waduk Jatiluhur, menghadapi tantangan sedimentasi, yang menyebabkan berkurangnya volume tampungan seiring waktu serta perubahan kondisi dasar waduk yang berdampak pada fungsi dan umur tampungnya. Studi mengenai Waduk Jatiluhur menunjukkan bahwa laju sedimentasi di sub-DAS (Daerah Aliran Sungai) Jatiluhur cukup tinggi. Menurut Aji, Hafil Gusni Santana dan Pandjaitan (2014), laju sedimen yang memasuki waduk pada tahun 2013 mencapai sekitar 2.758.922,1 m^3/tahun, dan assuming tidak ada perubahan penutup lahan, umur manfaat waduk masih diperkirakan dapat mencapai 195 tahun lagi jika tidak ada intervensi.Selain itu, penelitian *Sedimentation Prediction in Jatiluhur DAM* yang dilakukan oleh Sheftiana et al. (2018) mengindikasikan bahwa kapasitas tampung waduk menurun dari tahun ke tahun—data menunjukkan bahwa volume di Waduk Jatiluhur pada tahun 1964 adalah 2.970 juta m^3, pada 1987 menjadi 2.556 juta m^3, kemudian 2.448 juta m^3 pada tahun 2000.

Penurunan kapasitas ini tidak hanya disebabkan oleh sedimentasi saja, tetapi juga faktor perubahan muka air, penggunaan lahan di sekitar DAS, serta aktivitas manusia lainnya yang mempengaruhi pasokan sedimen.Kondisi ini menuntut adanya metode yang tepat untuk memperkirakan volume aktual air waduk serta letak titik berat air agar

© Jurusan Matematika - Universitas Negeri Medan

manajemen dan perawatan waduk dapat dilakukan secara presisi, serta proyeksi umur layanan waduk dapat diperbaharui secara berkala.Data ini menunjukkan bahwa sedimentasi memberi dampak nyata terhadap kapasitas waduk, sehingga diperlukan metode matematis seperti integral lipat tiga untuk menghitung volume terkini.



Gambar 1. Waduk Jatiluhur

Dalam konteks matematika dan teknik sipil, integral lipat tiga merupakan alat yang sangat sesuai untuk masalah perhitungan volume benda atau ruang tiga dimensi. Integral lipat tiga memungkinkan perhitungan volume berdasarkan batas geometris yang diketahui, dan bisa dikombinasikan dengan data diskret seperti data bathimetri. Integral lipat dua dengan diskretisasi grid juga sering digunakan ketika data kedalaman tersedia dalam bentuk matriks (grid) dari survei batimetri. Penggunaan metode semacam itu telah terbukti efektif dalam penelitian sedimentasi di berbagai waduk dan sungai, misalnya pada studi bathimetri sungai Serang untuk mendukung pengembangan infrastruktur di Yogyakarta.

Berdasarkan latar belakang tersebut, penelitian ini memilih Judul: "Metode Integral Lipat Tiga dalam Perhitungan Volume dan Titik Berat Air Waduk Jatiluhur: Studi Analitik dan Diskretisasi Grid". Tujuan penelitian ini adalah (1) menghitung kedalaman maksimum dan titik berat air waduk dari model analitik, (2) mengimplementasikan diskretisasi grid pada data kedalaman fiktif atau simulasi untuk memperkirakan volume dan titik berat, serta (3) membandingkan hasil antara metode analitik dan numerik agar dapat mengevaluasi tingkat ketepatan dan aplikasi untuk monitoring sedimentasi waduk nyata.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan dua pendekatan utama, yaitu pendekatan analitik melalui penerapan metode integral lipat tiga dan pendekatan numerik dengan metode diskretisasi grid. Pendekatan analitik digunakan untuk memperoleh model matematis volume dan titik berat air waduk berdasarkan bentuk geometris ideal, sedangkan pendekatan numerik digunakan untuk melakukan validasi perhitungan terhadap hasil analitik menggunakan data grid kedalaman.Secara konseptual, waduk dimodelkan menyerupai bentuk paraboloid satu lembar, karena bentuk ini merepresentasikan geometri cekungan dengan kedalaman maksimum di pusat waduk dan menurun secara gradual menuju tepi.

Dengan asumsi bentuk waduk simetris terhadap sumbu vertikal, maka sistem koordinat silinder digunakan karena lebih efisien dalam menggambarkan volume benda berputar.Fungsi kedalaman air dinyatakan dalam bentuk matematis sebagai : $h_{max}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$ dengan h_{max} kedalaman maksimum dan R jari jari ekuivalen waduk

Volume dihitung melalui integral lipat tiga $V=\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\int_0^{h(r)} r\,dz\,dr\,d\theta$ sedangkan titik berat air waduk di tentukan dengan $\bar{z}=\frac{1}{v}\iiint \Omega\, Z\, dv$ untuk validasi hasil analitik,digunakan metode diskretisasi grid, dimana area waduk dibagi memjadi sel berukuran 100 x100 m. Volume total diperoleh melalui pendekatan numerik yaitu $V\approx\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} h(xi,yj)\Delta A$. Tahapan penelitian meliputi pembentukan model paraboloid, penerapan integral lipat tiga untuk perhitungan volume dan titik berat, serta validasi menggunakan diskretisasi grid sebagai pembanding hasil analitik.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Waduk Jatiluhur merupakan waduk terbesar di Indonesia yang terletak di Kabupaten Purwakarta, Jawa Barat, dengan luas genangan mencapai sekitar 83 km². Waduk ini dibangun pada tahun 1957–1967 melalui pembangunan

Bendungan Ir. H. Djuanda di Sungai Citarum. Secara hidrologis, waduk ini berfungsi sebagai pusat pengendali aliran Sungai Citarum yang memiliki daerah aliran sungai (DAS) seluas lebih dari 4.500 km². Fungsi utama Waduk Jatiluhur adalah sebagai sumber air irigasi untuk lebih dari 240.000 hektar sawah di Jawa Barat dan DKI Jakarta, FFpenyediaan air baku untuk industri dan domestik di wilayah Jabodetabek, pembangkit listrik tenaga air (PLTA) dengan kapasitas terpasang ±187 MW, serta sebagai sarana perikanan darat, transportasi, pariwisata, dan pengendali banjir.

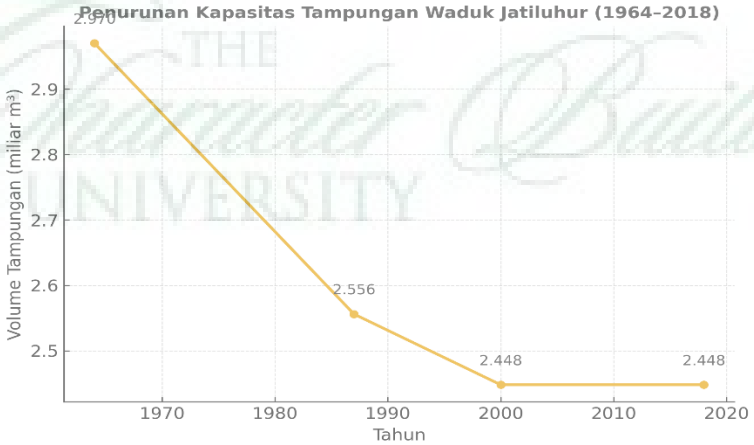
Berdasarkan data hidrologi, Waduk Jatiluhur memiliki kapasitas tampungan normal sekitar $2{,}448 \times 10^9$ m³ (Sheftiana et al., 2018). Angka ini menjadi salah satu parameter penting dalam analisis kapasitas waduk karena menggambarkan kemampuan waduk dalam menyimpan air pada kondisi operasi standar. Selain itu, volume ini juga digunakan sebagai acuan validasi dalam penelitian ini, sehingga hasil perhitungan matematis yang diperoleh dari metode analitik dan numerik dapat dibandingkan dengan data aktual. Namun, seperti waduk besar lainnya, kapasitas tampungan Waduk Jatiluhur mengalami penurunan seiring waktu akibat proses sedimentasi. Beberapa penelitian mencatat bahwa volume efektif waduk telah menurun dari sekitar 2.970 juta m³ pada tahun 1964 menjadi 2.556 juta m³ pada tahun 1987, hingga mencapai 2.448 juta m³ pada tahun 2000. Hal ini menunjukkan adanya akumulasi sedimen yang signifikan di dasar waduk, yang berdampak pada berkurangnya umur layanan waduk (Aji et al., 2014; BRIN, 2023). Oleh karena itu, analisis volume tampungan aktual dan distribusi kedalaman air sangat penting, baik untuk evaluasi kapasitas tampungan maupun untuk mendukung kebijakan pengelolaan sumber daya air yang berkelanjutan. Penurunan volume air Waduk Jatiluhur juga diduga akibat pengurangan pasokan air dari DAS, selain sedimentasi (Mulyadi,dkk, 2013).

Dalam konteks penelitian ini, data luas genangan (83 km²) dan volume tampungan normal ($2{,}448 \times 10^9$ m³) digunakan sebagai parameter dasar pemodelan matematis waduk. Dengan menganggap waduk berbentuk paraboloid, data tersebut memungkinkan penentuan radius ekuivalen waduk, kedalaman maksimum air, serta validasi hasil perhitungan volume dan titik berat air menggunakan metode integral lipat tiga, baik secara analitik maupun numerik melalui diskretisasi grid.

Tabel 1. Deskripsi Data Waduk Jatiluhi.

Parameter	Keterangan
Nama Waduk	Waduk Jatiluhur (Bendungan Ir. H. Djuanda)
Lokasi	Kabupaten Purwakarta, Jawa Barat,Indonesia.
Sungai Utama	Sungai Citarum
Tahun pembangunan	1957 – 1967 (resmi diresmikan tahun 1967)
Luas daerah aliran sungai (DAS)	±4.500 km²
Luas genangan	±83 km² (8.300 ha)
Kapasitas tampungan awal	$\pm 2.970 \times 10^9$ m³ (1964)
Kapasitas tampungan (1987)	$\pm 2.556 \times 10^9$ m³
Kapasitas tampungan normal saat ini	$\pm 2.448 \times 10^9$ m³ (Sheftiana et al., 2018)

Grafik berikut menunjukkan tren penurunan kapasitas tampungan Waduk Jatiluhur sejak awal pengoperasian hingga tahun 2018 akibat sedimentasi.



Gambar 2. Penurunan Kapasistas Tampungan Waduk Jatiluhur (2064 – 2018)

Waduk Jatiluhur merupakan waduk terbesar di indonesia,dibangun di Sungai Citarum,Jawa Barat. Berdasarkan Data literatur, Waduk ini memiliki; Luas genangan (A) = $83km^2 = 83 \times 10^6 m^2$; dan Volume tampungan normal (Vref) = $2.448 \times 10^9 m^3$. Data ini digunakan sebagai parameter validasi dalam penelitian waduk dimodelkan sebagai sebuah paraboloid satu lembar dengan kedalaman maksimum di pusat dan menipis hingga nol di tepi waduk. Persamaan

kedalaman paraboloid dalam koordinat silinder (persamaan 1), dimana $h(r) =$ kedalaman air pada jarak radial r; $R =$ jari jari ekuivalen waduk; dan $h_{max} =$ kedalaman maksimum waduk.

$$h(r) = h_{max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (1)$$

Luas waduk diasumsikan berbentuk lingkaran ekuivalen dengan persamaan 2, dan peroleh Radius ekuivalen waduk $\approx 5{,}14\ km$

$$A = \pi R^2 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \quad (2)$$

Perhitungan Volume dengan Integral Lipat Tiga dalam koordinat silinder (persamaan 3)

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{R}\int_0^{h(r)} r\, dz\, dr\, d\theta \quad (3)$$

Integrasi terhadap θ, diperole $\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$, sehingga $V = 2\pi \int_0^R r\, h(r) dr$, kemudian disubtitusikan fungsi $h(r)$ akan diperolleh $V = 2\pi h_{max} \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) dr$. Setelah itu menentukan Integral terhadap r $\int_0^R r\, dr = \frac{R^2}{2}, \int_0^R r^3\, dr = \frac{R^4}{4}$ dan diperoleh $V = 2\pi h_{max}.\frac{R^2}{4} = \frac{\pi R^2 h_{max}}{2}$. Karena A = $\pi R^2, maka,\ V = \frac{A h_{max}}{2}$ sehingga diperoleh $h_{max} = \frac{2V}{A} = \frac{2\times 2.488\times 10^9}{83\times 10^6}$ = 58,99 m. sedangkan untuk titik berat air menggunanken definisi Centroid (Persamaan 4).

$$\bar{z} = \frac{1}{V}\iiint \Omega\, z\, dV \quad (4)$$

Perhitungan di awali dengan menentukan integral terhadap z, $\int_0^{h(r)} zr\, dz = r.\frac{h(r)^2}{2}$ sehingga diperoleh $\bar{z} = \frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{rh(r)^2}{2}\, dr\, d\theta$. Kemudian menghitung integrasi terhadap θ, $\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$ dan diperoleh $\bar{z} = \frac{\pi}{V}\int_0^R rh\,(r)^2\, dr$. Melakukan subtitusi h(r) $h\,(r)^2 = h_{max}^2\left(1 - \frac{2r^2}{R^2} + \frac{r^4}{R^4}\right)$ maka diperoleh $\bar{z} = \frac{\pi h_{max}^2}{V}\int_0^R \left(r - \frac{2r^3}{R^2} + \frac{r^5}{R^4}\right) dr$. Kemudian menghitung Integral terhadap r, $\int_0^R r\, dr = \frac{R^2}{2}, \int_0^R r^3\, dr = \frac{R^4}{4}, \int_0^R r^5\, dr = \frac{R^6}{6}$, dan diperoleh $\bar{z} = \frac{\pi h_{max}^2}{V}.\frac{R^2}{6}$. Karena V = $\frac{\pi h_{max}^2}{V}, maka\ \bar{z} = \frac{h_{max}}{3}$ dab diperoleh $\bar{z}$ = 19,66, sehingga titik berat air $\approx 19.66\ m$ dari dasar waduk.

Jika data bathymetry tersedia dalam bentuk diskrit,volume dapat dihitung dengan menghitung Integral lipat tiga untuk volume waduk (persamaan 5) Jika ditulis dalam bentuk integral lipat dua (karena kedalaman waduk = fungsi dari posisi horizontal) (Persamaan 6.)

$$V = \iiint \Omega\, dv \quad (5)$$

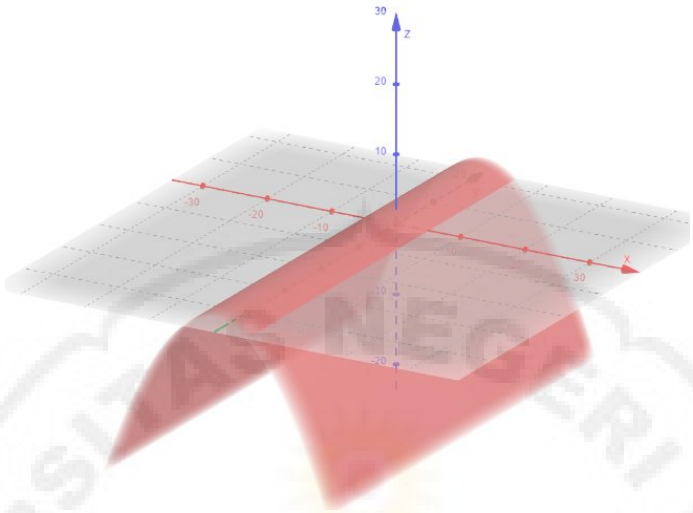
$$V = \iint D\, h(x,y) dA \quad (6)$$

Dimana h(x,y) = kedalaman air pada titik koordinat horizontal (x,y); D = proyeksi area waduk pada bidang horizontal (luas permukaan); dan dA = elemen luas kecil pada bidang horizontal. Kedalaman rata-rata di setiap sel h(x_i,y_j) (diukur atau dihitung dari model paraboloid)h(x_i, y_j), Maka, volume total waduk dapat didekati dengan penjumlahan kedalaman × luas sel: $V \approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} h(xi, yi)\Delta A$. Dalam praktik lapangan, data kedalaman waduk diperoleh dari peta bathymetry. Survei ini menghasilkan titik-titik pengukuran kedalaman di lokasi-lokasi tertentu. Untuk memudahkan perhitungan, area waduk dibagi menjadi grid persegi berukuran seragam, misalnya 100 m × 100 m. Luas waduk 83 km² dibagi grid 100 m × 100 m, sehingga Jumlah sel grid (ideal):

$$N = \frac{A}{\Delta A} = \frac{83\ x\ 10^6}{10000} = 8.300\ sel$$

Fungsi kedalaman pada setiap titik grid diambil dari model paraboloid: $h(x,y) = h_{max}\ 1 - \frac{x^2+y^2}{R^2}\ R = 5140\ m, h_{max} = 59\ m$. Dengan menjumlahkan kontribusi setiap sel grid (persamaan 7), maka diperoleh volume numerik 2,448 x 10^9 m^3 dan titik berat vertical V_{grid} = 19,66 m. Dalam penelitian ini, simulasi grid (100 m ×100 m) menghasilkan; Luas sel grid = 10.000 $m^{2;}$ Jumlah sel efektif ≈ 8.307; dan volume hasil numerik = 2.448 ×10^9 m^3

$$V \approx \sum_{i,j} h(xi, yj)\ \Delta A \quad (7)$$



Gambar 2. Model Paraboloid

Tabel 2. Hasil Numerik Konsisten

Parameter	Hasil Perhitungan
Radius ekuivalen (R)	5140 M(5,14 km)
Kedalaman maksimum	59 m
Volume waduk (v)	2,448× $10^9 m^3$
Titik berat ($\bar{z}$)	19,7 m dari dasar waduk
Metode numerik grid	Konsisten dengan analitik & data resmi

Visualisasi dalam penelitian ini berperan penting untuk memperlihatkan hasil perhitungan baik secara analitik maupun numerik, serta untuk memberikan gambaran yang lebih intuitif mengenai bentuk waduk Jatiluhur. Pertama, dibuat visualisasi paraboloid 3D halus yang menggambarkan model matematis ideal dari waduk. Permukaan halus ini merepresentasikan fungsi paraboloid dengan kedalaman maksimum 59 m di pusat dan menurun secara simetris menuju tepi waduk dengan radius ekuivalen sekitar 5140 m. Tampilan ini menunjukkan bagaimana asumsi paraboloid dapat memodelkan profil dasar waduk secara kontinu. Selanjutnya, ditampilkan visualisasi paraboloid 3D dengan diskretisasi grid. Dalam pendekatan ini, permukaan waduk dibagi ke dalam sel-sel persegi dengan ukuran tertentu, misalnya 100 m × 100 m. Setiap sel dihitung kedalamannya berdasarkan fungsi paraboloid, sehingga diperoleh representasi numerik yang berbentuk kotak-kotak. Permukaan diskretisasi ini menunjukkan bahwa semakin kecil ukuran grid yang digunakan, hasil numerik akan semakin mendekati bentuk paraboloid halus. Dengan demikian, visualisasi ini menegaskan peran resolusi grid dalam meningkatkan akurasi perhitungan numerik.

Untuk memberikan gambaran yang lebih sederhana mengenai distribusi kedalaman, dibuat pula grafik 2D profil radial yang memperlihatkan hubungan antara jarak dari pusat waduk terhadap kedalaman air. Kurva parabola yang terbentuk menunjukkan bahwa kedalaman maksimum berada di pusat dan menurun hingga nol pada tepi. Pada grafik ini ditambahkan garis horizontal putus-putus yang menunjukkan titik berat (centroid) vertikal pada kedalaman sekitar 19,7 m dari dasar. Garis centroid ini penting karena menggambarkan kedalaman rata-rata massa air terhadap dasar waduk.

```
>> % ========================================
% Perhitungan Volume Waduk Jatiluhur (Paraboloid)
% dengan Diskretisasi Grid
% ========================================

clc; clear; close all;

% ----------------------------
% Parameter Waduk
% ----------------------------
A = 83e6;              % luas permukaan waduk (m^2)
V_ref = 2.448e9;       % volume referensi (m^3)
R = sqrt(A/pi);        % radius ekuivalen (m)
H = 59;                % kedalaman maksimum (m)

fprintf('=== Parameter Waduk Jatiluhur ===\n');
fprintf('Radius ekuivalen : %.2f m\n', R);
fprintf('Kedalaman maksimum : %.2f m\n', H);
```

```
% ----------------------------
% Diskretisasi Grid
% ----------------------------
grid_size = 100;       % 100 m x 100 m
x = -R:grid_size:R;
y = -R:grid_size:R;
[X, Y] = meshgrid(x, y);

% fungsi kedalaman paraboloid
r2 = X.^2 + Y.^2;
depth_matrix = H * (1 - r2 / R^2);
depth_matrix(r2 > R^2) = 0;   % nolkan di luar radius

dx = x(2) - x(1);
dy = y(2) - y(1);
cell_area = dx * dy;

% ----------------------------
% Hitung Volume & Titik Berat
% ----------------------------
volume_numeric = sum(depth_matrix(:)) * cell_area;

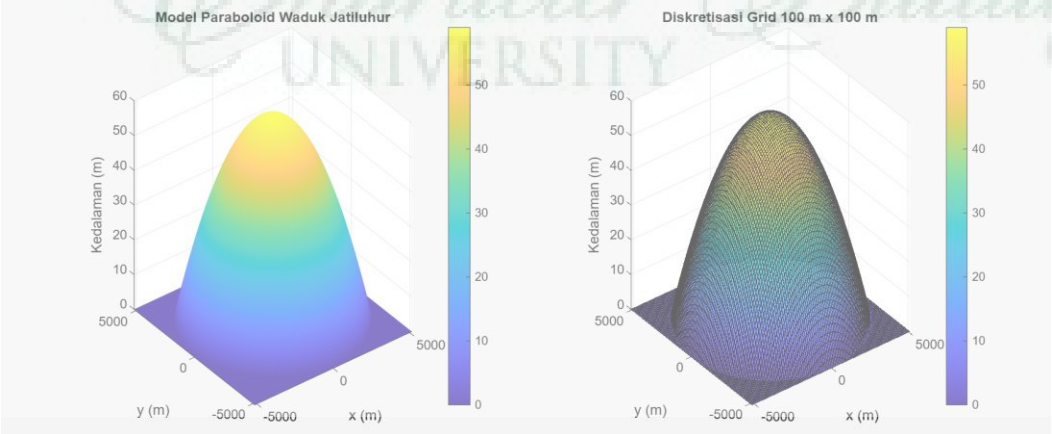
% centroid vertikal (z = h/2 rata-rata tiap sel)
z_centroid = sum((depth_matrix(:)/2) .* depth_matrix(:) * cell_area) / volume_numeric;

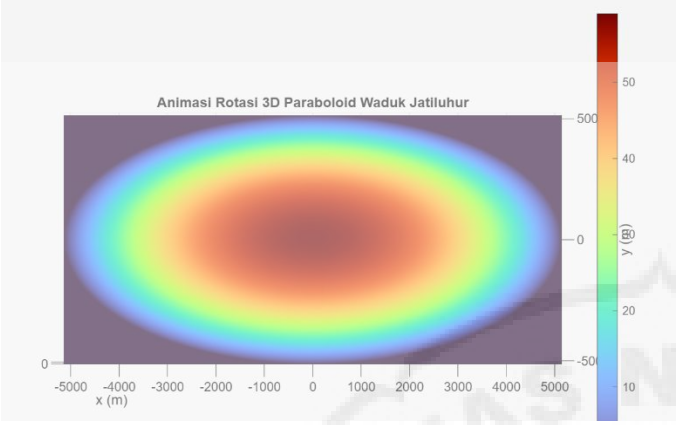
% ----------------------------
% Cetak hasil
% ----------------------------
fprintf('\n=== Hasil Perhitungan Numerik ===\n');
fprintf('Volume Numerik     : %.3e m^3\n', volume_numeric);
fprintf('Titik Berat Vertik : %.2f m dari dasar\n', z_centroid);
fprintf('Volume Referensi   : %.3e m^3\n', V_ref);
fprintf('Error vs V_ref     : %.3f %%\n', abs(volume_numeric - V_ref)/V_ref*100);

% ----------------------------
% Visualisasi 3D
% ----------------------------
figure('Position',[100 100 1200 500]);


% paraboloid halus
subplot(1,2,1);
[Xc, Yc] = meshgrid(linspace(-R,R,200), linspace(-R,R,200));
r2c = Xc.^2 + Yc.^2;
Zc = H * (1 - r2c / R^2);
Zc(r2c > R^2) = 0;
surf(Xc, Yc, Zc, 'EdgeColor','none');
title('Model Paraboloid Waduk Jatiluhur');
xlabel('x (m)'); ylabel('y (m)'); zlabel('Kedalaman (m)');
colormap('turbo'); colorbar;

% grid diskretisasi
subplot(1,2,2);
surf(X, Y, depth_matrix, 'EdgeColor','k', 'FaceAlpha',0.9);
title(sprintf('Diskretisasi Grid %d m x %d m', grid_size, grid_size));
xlabel('x (m)'); ylabel('y (m)'); zlabel('Kedalaman (m)');
colormap('parula'); colorbar;
```





Model matematis waduk menggunakan pendekatan paraboloid, dengan kedalaman maksimum disekitar yaitu 59 meter pada pusat dan berkurang menuju tepi sesuai dengan persamaan yakni $h(r) = h_{max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$ di mana r adalah jarak radial dari pusat dan R jari-jari ekuivalen waduk. Luas genangan waduk berdasarkan data adalah sekitar 83 km² sehingga jari-jari ekuivalen waduk dihitung sekitar 5,14 km. Perhitungan volume air menggunakan integral lipat tiga di koordinat silinder menghasilkan volume sekitar $2{,}448\ x\ 10^9$ meter kubik (m³), sesuai dengan volume tampungan normal aktual waduk, yang menunjukkan kesesuaian model dengan keadaan nyata. Titik berat air waduk (centroid vertikal) dihitung berada pada ketinggian sekitar 19,66 meter dari dasar waduk, yang penting untuk memahami distribusi massa air dan pengaruhnya pada perhitungan stabilitas serta operasi waduk.

Selain perhitungan analitik, digunakan juga metode diskretisasi grid (misalnya grid 100 m x 100 m) untuk memperkirakan volume dan titik berat berdasarkan data kedalaman diskrit (bathimetri). Volume hasil perhitungan numerik ini juga mencapai $2{,}448\ x\ 10^9$ dengan titik berat sekitar 19,66 meter, sangat konsisten dengan nilai perhitungan analitik. Penurunan kapasitas waduk dari waktu ke waktu tercatat dari 2,970 juta m³ pada tahun 1964 menjadi 2,448 juta m³ pada tahun 2000 akibat sedimentasi, yang menjadi isu penting dalam pengelolaan waduk.Hasil perhitungan metode integral lipat tiga dan diskretisasi grid bisa digunakan sebagai alat monitoring volume nyata dan sedimentasi secara presisi guna evaluasi umur layanan waduk. Secara ringkas, hasil perhitungan menunjukkan bahwa model matematis paraboloid dengan metode integral lipat tiga dan diskretisasi grid memberikan estimasi volume dan titik berat yang akurat dan relevan untuk pengelolaan Waduk Jatiluhur, validasi metode dilakukan dengan membandingkan dengan data kapasitas waduk resmi. Sedimentasi masih menjadi faktor kritis yang perlu dipantau untuk mempertahankan fungsi waduk.

KESIMPULAN

Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa pemodelan Waduk Jatiluhur dengan pendekatan paraboloid mampu menggambarkan karakteristik waduk secara matematis. Melalui penerapan integral lipat tiga diperoleh estimasi volume sebesar ±2,448 × 10^9 m³, yang sesuai dengan kapasitas tampungan normal resmi. Titik berat air dihitung berada pada ketinggian sekitar 19,7 meter dari dasar waduk, nilai yang penting dalam memahami distribusi massa air dan implikasinya bagi operasi maupun stabilitas struktur. Selain itu, pendekatan numerik dengan diskretisasi grid menghasilkan hasil yang sejalan dengan metode analitik, sehingga dapat digunakan sebagai alternatif praktis terutama ketika data bathimetri diperoleh dalam bentuk diskrit. Secara keseluruhan, metode integral lipat tiga maupun diskretisasi grid terbukti efektif dan relevan sebagai alat bantu monitoring kapasitas waduk serta evaluasi dampak sedimentasi yang terus berlangsung.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Dosen Pengampu Mata Kuliah Kalkulus Peubah Banyak, Ibu Alvi Sahrin Nasution, M.Si., atas bimbingan, arahan, serta motivasi yang telah diberikan selama proses penyusunan penelitian ini. Ucapan terima kasih juga disampaikan kepada Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan, yang telah memberikan dukungan fasilitas dan kesempatan untuk melaksanakan penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

Apriandi, D., & Krisdiana. I.(2020).Analisis Kesulitan Mahasiswa Dalam Memahami Materi Integral Lipat Dua Pada Koordinat Polar Mata Kuliah Kalkulus Lanjut. *Al- Jabar : Jurnal Pendidikan Matematika*. 2(7) : 123-134.

Damanik, R. N., Purba, G., Laoli, K., Togatorop, B. D., Suryani, W., & Panggabean, S. (2025). Estimasi Volume Air Waduk Lau Kawar Menggunakan Pendekatan Integral Volume Kulit Tabung. *Jurnal Matematika, Ilmu pengetahuan Alam, Kebumian dan Angkasa*. 3 (3) : 36-45

Mulyadi, D., Lestiana, H., Maria, R., & Sukristiyanti. (2013). Kajian Penyebab Penurunan Volume Air Waduk Jaatiluhur dari Aspek Geologi. *Prosiding Limnologi IV LIPI*. 244- 252.

Narpila, S. D., Salsabila, N., Husnida, W. A., & Ritongah, F. U. (2025). Tinjauan Kesulitan Dan Pemahaman Mahasiswa Pada Materi Integral Garis Dalam Ruang Dua Dan Tiga Dimensi. JICN: Jurnal Intelek dan Cendikiawan Nusantara3(2) : 1847- 1853.

Nasir, R., Pathuddin., Meinarni, W., Alfisyahra., & Lebagi, D. (2022). Peningkatan Partisipasi Mahasiswa Melalui Implementasi Desain Didaktis Materi Integral Lipat Tiga Berbantuan Geogebra dan Nearpod. Jurnal Kreatif Online (JKO). 1(10) : 85-94.

Rahayudi, B., & Marji, M. (2016). Pemetaaan Data dan Visualisasi Kedalaman Air Pada Bendungan atau Waduk. *Jurnal Teknologi Informasi dan Ilmu Komputer (JTIIK)*.3(2): 105-112.

Sanjaya, E.T., Lukman, M., & Tanan, B.(2020). Analisis Volume Sedimen Berdasarkan Hasil Pengukuran Dengan Echosounder Dalam Waduk Bili-bili Kabupaten Gowa. *Paulus Civil Engineering Journal.* 2(3): 192 -196

Sheftiana, U. S., Jarwadi Purwanto, M. Y., & Tarigan, S. D. (2021). Perkiraan Sedimentasi Pada Tahun 2018 di Waduk Jatiluhur, Kabupaten Purwakarta. Jurnal Ilmu Tanah & Lingkungan, 23(1), 18–21.

Tatipata, W.H., Yulistiyanto, B., & Cahyadi, A.(2013). Analisis Volume Sedimen Yang Mengendap Setelah Tahun Waduk Beroperasi R (Studi Kasus : Waduk Cirata).*Jurnal Teknik Sipil*. 20(3):227-238.

Tarigan, Y.W.(2024). ANALISIS KAPASITAS TAMPUNGAN WADUK BENDUNGAN WAY SEKAMPUNG. *Jurnal Elektro dan Telkomunikasi.*98:98-104.

Wulandari, D. P., Trihayuningtyas, E., & Wulandari, W. (2021). Pengembangan Waduk Jatiluhur Sebagai Kawasan Wisata Terpadu Kabupaten Purwakarta. *Rang Teknik Journal*, *4*(2)

Br Saragih, N., Tamba, L. T., Munthe, N. E., Ambarita, J. D., & Bukit, A. F. (2025). APLIKASI INTEGRAL LIPAT DUA DALAM PERHITUNGAN LUAS DAN VOLUME PADA GEOMETRI RUANG (TABUNG). *JURNAL PENDIDIKAN KREATIVITAS PEMBELAJARAN. 7(2):159-166*

Azmi, U., & Hendrajaya, L. (2016).INTEGRAL LIPAT DALAM MENGHITUNG VOLUME DAN LUAS PERMUKAN BENDA GEOMETRI SEDERHANA DAN TERPANCUNG. *Seminar Nasional Pendidikan dan Saintek (ISSN: 2557-533X)*

Supriadi, A. (2021). PEMAHAMAN MAHASISWA TENTANG INTEGRAL LIPAT DUA BERDASARKAN TEORI APOS. *Jurnal Inovasi Pendidikan Matematika. 4(1): 55-63*

Utari, R. S., Septy, L., & Hutauruk, L. (2021) Kesalahan Pemahaman Konsep Peserta Didik dalam Menyelesaikan Soal-Soal Integral Lipat Dua pada Koordinat Polar. *Inovasi Matematika (Inomatika).3(1):51 – 61*