Penerapan Integral Lipat Tiga dalam Menghitung Volume Piramida

Maisarah Putri Lalyta Siregar[1], Sophie Alisya Sinurat[2], Regina Grace Olivia Purba[3], Brigita Arheti Hutabarat[4]
[1,2,3,4] Matematika, Universitas Negeri Medan, Kota Medan, 20221, Indonesia
*Corresponding Author: maisarahputri2006@gmail.com

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk menghitung volume piramida melalui dua pendekatan, yaitu secara analitik menggunakan integral lipat tiga dan secara numerik dengan metode Simpson Komposit 2D. Model piramida dibangun berdasarkan sistem koordinat kartesius dengan alas berbentuk persegi dan ketinggian tertentu. Hasil perhitungan analitik menunjukkan kesesuaian dengan rumus bangun ruang limas. Sementara itu, metode Simpson Komposit 2D digunakan untuk mendekati nilai integral secara numerik dengan cara membagi daerah alas menjadi sejumlah grid teratur. Implementasi dilakukan melalui Google Colab untuk memvisualisasikan bentuk tiga dimensi piramida Dari hasil analisis diperoleh bahwa semakin kecil ukuran grid, hasil perhitungan volume semakin mendekati nilai analitik dengan galat yang sangat kecil. Oleh karena itu, metode integral lipat tiga dan Simpson Komposit 2D terbukti efisien dalam menghitung volume piramida serta berpotensi diterapkan dalam pembelajaran kalkulus multivariabel berbasis teknologi komputasi.
Kata kunci: Integral Lipat Tiga; Metode Simpson Komposit 2D; Perhitungan Volume

Abstract

This research focuses on determining the volume of a pyramid through two different approaches: an analytical method using a triple integral and a numerical method applying the 2D Composite Simpson's Rule. The pyramid is represented within a Cartesian coordinate system, characterized by a square base and a specific height. Analytical calculations produce results that align with the classical volume formula for a pyramid. In contrast, the 2D Composite Simpson's Method is utilized to numerically approximate the integral by dividing the base region into a set of evenly spaced grids. The implementation was conducted through Google Colab, which also enabled three-dimensional visualization of the pyramid model. The findings reveal that smaller grid sizes lead to results that closely match the analytical values with minimal error. Consequently, the triple integral and 2D Composite Simpson's Method are shown to be efficient for computing the volume of a pyramid and hold great potential for use in multivariable calculus learning supported by computational technology.
Keywords*: Triple Integral; 2D Composite Simpson's Method; Volume Calculation*

Citation: Siregar, M.P. L., dkk. (2025). Penerapan Integral Lipat Tiga dalam Menghitung Volume Piramida. *Prodising Seminar Nasional Jurusan Matematika 2025*. 405 – 412.

PENDAHULUAN

Piramida Giza salah satu warisan paling megah dari peradaban Mesir Kuno yang masih berdiri kokoh hingga saat ini. Bangunan ini berlokasi di Dataran Tinggi Giza. Tepat di sebelah barat Sungai Nil, sekitar 13 KM dari pusat Kota Kairo, Mesir (Kawae,Y, 2024). Kawasan ini merupakan nekropolis terbesar di Mesir, yang didominasi oleh tiga struktur kolosal: Piramida Khufu, Khafre, dan Menkaure, yang dibangun berturut-turut oleh tiga generasi Firaun dari Dinasti Keempat.Berlandaskan pernyataan itu, dapat ditarik kesimpulan bahwa piramida merupakan salah satu bangun ruang tiga dimensi yang memiliki peranan penting dalam sejarah matematika maupun aplikasi praktis di berbagai bidang. Bangun ini ditandai dengan alas berbentuk poligon dan sisi-sisi tegak berupa segitiga yang bertemu pada satu titik puncak. Contoh paling terkenal adalah piramida di Mesir, khususnya Piramida Giza, yang tidak hanya menjadi bukti kecanggihan arsitektur kuno, tetapi juga menjadi objek kajian matematis sejak ribuan tahun lalu.

Piramida Khufu dibangun sekitar tahun 2560 sebelum Masehi, pada masa pemerintahan Firaun Khufudari Dinasti Keempat. Pembangunan piramida ini bertujuan sebagai makam raja sekaligus sebagai lambang kekuasaan dan keabadian Firaun (Hutagalung dkk., 2025). Fungsinya jauh melampaui sekadar tempat peristirahatan; ia melambangkan kekuatan absolut, otoritas ilahi, dan janji keabadian Firaun. Keyakinan masyarakat Mesir Kuno terhadap kehidupan setelah kematian menjadi alasan utama mengapa pembangunan piramida dilakukan dengan begitu megah dan teliti. Piramida Khufu merupakan yang terbesar di antara semua piramida di Giza. Panjang sisi alasnya mencapai sekitar 230,36 meter, dengan luas dasar sekitar 53.000 meter persegi. Tinggi awal piramida diperkirakan 146,6 meter, namun hanya sekitar 138,8 meter karena sebagian puncaknya telah terkikis dan menyebabkan hilanganya lapisan. Struktur tersusun dari sekitar 2,3 juta balok batu kapur dan granit, berbobot antara 2 hingga 15 ton, dengan volume total mencapai 2,6 juta meter kubik. Selain sebagai tempat peristirahatan Firaun, Piramida Giza juga bukti nyata kemajuan ilmu pengetahuan masyarakat mesir kuno (Kawae,Y, 2024).

Integral lipat tiga merupakan bentuk perluasan dari konsep integral tunggal dan ganda yang digunakan untuk menghitung volume atau massa suatu benda tiga dimensi. Integral ini menghitung jumlah tak hingga dari nilai fungsi pada seluruh titik dalam ruang, sehingga dapat digunakan untuk menentukan volume, massa, momen inersia, dan distribusi densitas dalam suatu benda padat (Ardiansyah & Hadi, 2022). integral lipat tiga memungkinkan menghitung volume bangun ruang dengan batas-batas yang tidak selalu teratur, misalnya piramida, kerucut, atau benda padat dengan permukaan melengkung (Nasir, dkk., 2022).

Metode Simpson Komposit 2D merupakan salah satu teknik integrasi numerik yang digunakan untuk memperkirakan nilai integral ganda dari suatu fungsi dua variabel. Metode ini merupakan pengembangan dari aturan Simpson 1/3 satu dimensi, yang kemudian diperluas ke dua arah (x dan y) untuk menghitung luas atau volume pada bidang dua dimensi (Suherly & Shiddiq, 2020). Metode Simpson Komposit 2D berfungsi sebagai pendekatan numerik yang efisien untuk menghitung volume suatu bangun ruang dengan bentuk atau fungsi yang kompleks. Dalam konteks penelitian ini, metode tersebut membantu memperkuat analisis matematis melalui pembuktian numerik (Irawati, dkk., 2025). Artikel ini bertujuan untuk mengkaji serta membandingkan hasil perhitungan volume piramida menggunakan dua pendekatan berbeda, yaitu pendekatan analitik melalui integral lipat tiga dan pendekatan numerik dengan metode Simpson Komposit 2D. Selain itu, penelitian ini dimaksudkan untuk memperlihatkan pemanfaatan perangkat lunak sebagai sarana bantu dalam proses komputasi dan visualisasi, sehingga dapat memperdalam pemahaman terhadap konsep kalkulus multivariabel serta penerapannya pada permasalahan geometri tiga dimensi, khususnya pada bangun piramida.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini mengimplementasikan pendekatan kalkulus multivariabel melalui teknik integral lipat tiga untuk menghitung volume Piramida Giza secara analitik dan eksak. Metode yang digunakan terdiri dari beberapa tahapan kunci berikut, Data dimensi Piramida Giza mengacu pada studi oleh Kawae, Y(2024), dengan tinggi piramida (H) = 138 m dan panjang sisi alas (a) = 230 m. Piramida dimodelkan sebagai bangun ruang dengan alas persegi sempurna dan puncak yang terletak tepat di atas pusat geometris alas. Sistem koordinat Kartesius tiga dimensi ditetapkan dengan; (a) titik pusat (0, 0, 0) terletak di pusat bidang alas piramida; (b) sumbu-z berorientasi vertikal dengan arah positif menuju puncak piramida; (c) puncak piramida berada pada koordinat (0, 0, H). Notasi dan Derivasi Fungsi Penampang dan didefinisikan simbol-simbol; *s(z)*: Panjang sisi penampang persegi pada ketinggian z; dann *l(z)*: Setengah dari panjang sisi penampang *s(z)*. Fungsi ini akan menjadi batas integrasi untuk variabel x dan y.

Fungsi *l(z)* digunakan sebagai setengah panjang sisi penampang horizontal piramida pada ketinggian z yang diturunkan berdasarkan prinsip kesebangunan segitiga. Analisis geometri dilakukan dengan mempertimbangkan profil diagonal piramida yang membentuk segitiga sama kaki dengan; (a) Alas segitiga: Panjang sisi alas piramida (a = 230 m); (b) panjang segitiga: Tinggi Piramida (H = 138 m). Pada ketinggian z tertentu dari alas, penampang horizontal piramida membentuk persegi dengan panjang sisi *s(z)*. Berdasarkan prinsip kesebangunan segitiga, diperoleh hubungan proporsionalitas pada persamaan 1.

$$\frac{\text{Sisi penampang pada ketinggian z}}{\text{Sisi alas}} = \frac{\text{Jarak dari titik puncak menuju z}}{\text{Tinggi}} \quad (1)$$

Yang dapat dinyatakan secara matematis dengan: $\frac{s(z)}{a} = \frac{H-z}{H}$, sehingga diperoleh $s(z) = a \cdot \frac{H-z}{H}$. Karena dalam sistem koordinat integrasi dilakukan dari -x hingga x, maka fungsi panjang sisi penampang dibagi menjadi setengah panjang sisi penampang:

$$l(z) = \frac{s(z)}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{H-z}{H} \quad (2)$$

Fungsi linear ini dipilih karena secara akurat merepresentasikan pengecilan dimensi penampang piramida yang proporsional terhadap ketinggian, yang merupakan karakteristik fundamental dari bentuk piramida dengan sisi-sisi lurus.

Berdasarkan fungsi *l(z)* yang telah diturunkan, volume piramida dihitung melalui integral lipat tiga dengan batas-batas integrasi yang ditentukan berdasarkan geometri piramida; integrasi terhadap z: dari 0 hingga H (dari alas ke puncak); dan integrasi terhadap x dan y: dari *-l(z)* hingga l*(z)* pada setiap ketinggian z. Sehingga formulasi lengkap volume dinyatakan pada persamaan 3. Dengan substitusi $l(z) = \frac{s(z)}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{H-z}{H}$ dan substitusi nilai dari a dan H, integral

diselesaikan secara berurutan dimulai dari integrasi paling dalam terhadap x, dilanjutkan terhadap y, dan diakhiri dengan integrasi terhadap z.

$$V = \iiint_S \, dV = \int_{z=0}^{z=H} \int_{y=-l(z)}^{y=l(z)} \int_{x=-l(z)}^{x=l(z)} dx\, dy\, dz \tag{3}$$

Sebagai validasi dan perbandingan, volume piramida juga dihitung menggunakan metode Simpson Komposit 2D. Prinsip metode ini adalah mendiskritisasi alas piramida menjadi grid $N_x \times N_y$ dan mengakumulasi volume elemen-elemen prisma tegak. Implementasi ini dilakukan dengan Langkah pertama diskritisasi domain dengan alas piramida dibagi menjadi $N_x \; dan \; N_y$segmen dengan $N_x = N_y = n$, dimana *n* harus genap. Ukuran langkah dihitung dengan persamaan 4.

$$h_x = \frac{Batas\ atas - batas\ bawah(a)}{N_x}, h_y = \frac{Batas\ atas - batas\ bawah(a)}{N_y} \tag{4}$$

Langkah selanjutnya konstruksi grid, Dimana titik-titik grid didefinisikan sebagai $x_i = i \cdot h_x, \;\; y_j = j \cdot h_y \; untuk \; i,j = 0,1,2,\ldots,n$. Sedangkan untuk fungsi ketinggian, tinggi piramida pada setiap titik (x,y) dimodelkan dengan persamaan 5.

$$\mathrm{z(x,y)} = \max(0, \mathrm{H} - \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{a/2}} \cdot \max(|\mathrm{x} - \mathrm{a}/2|, |\mathrm{y} - \mathrm{a}/2|) \tag{5}$$

Pada tahap penentukan koefisien simpson, untuk *n* genap, pola koefisien 1D mengikuti bobot Simpson [1, 4, 2, 4, ..., 2, 4, 1]. Koefisien 2D merupakan produk tensor dari koefisien 1D sumbu-x (c_i) dan sumbu-y (d_j). Sehingga formulasi volume numerik dihitung dengan persamaan 6.

$$V_{Numerik} = \left(\frac{H_x}{3}\right)\left(\frac{H_y}{3}\right) \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} c_i d_j z(x_i, y_j) \tag{6}$$

Konvergensi dan analisis error, dilakukan untuk berbagai nilai *n*. Galat terhadap solusi analitik dianalisis menggunakan persamaan 7

$$\text{Error relatif} = \frac{\text{Error absolut}}{\mathrm{V_{analitik}}} \times 100\% \tag{7}$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Implementasi perhitungan volume piramida dalam penelitian ini dilakukan secara analitik dengan metode Integral Lipat Tiga dan secara numerik dengan metode Simpson Komposit 2D. Pemilihan metode ini bertujuan untuk membandingkan hasil dari proses pengintegralan secara analitik dan dengan Simpson Komposit 2D secara numerik. Apakah kedua metode perhitungan yang berbeda tersebut akan tetap menghasilkan jawaban yang sama atau berbeda. Perhitungan ini juga menunjukkan bahwa menghitung suatu bangun ruang tidak hanya dengan satu cara melainkan dengan berbagai cara yang berbeda-beda. Dengan formulasi integral lipat tiga, volume piramida dinyatakan dengan persamaan 8.

$$V = \iiint_S \, dV = \int_{z=0}^{z=H} \int_{y=-l(z)}^{y=l(z)} \int_{x=-l(z)}^{x=l(z)} dx\, dy\, dz \tag{8}$$

Substitusi nilai $l(z) = \frac{a}{2} \cdot \frac{H-z}{H}$:

$$V = \iiint_S \, dV = \int_{z=0}^{z=H} \int_{-\left(\frac{a}{2} \cdot \frac{H-z}{H}\right)}^{\frac{a}{2} \cdot \frac{H-z}{H}} \int_{-\left(\frac{a}{2} \cdot \frac{H-z}{H}\right)}^{\frac{a}{2} \cdot \frac{H-z}{H}} dx\, dy\, dz$$

Substitusi nilai a dan H:

$$V = \iiint_S \, dV = \int_{0}^{138} \int_{-\left(\frac{230}{2} \cdot \frac{138-z}{138}\right)}^{\frac{230}{2} \cdot \frac{138-z}{138}} \int_{-\left(\frac{230}{2} \cdot \frac{138-z}{138}\right)}^{\frac{230}{2} \cdot \frac{138-z}{138}} dx\, dy\, dz$$

Integral terhadap x:

$$\int_{-\left(\frac{230}{2} \cdot \frac{138-z}{138}\right)}^{\frac{230}{2} \cdot \frac{138-z}{138}} dx = x\Big|_{-\left(\frac{230}{2} \cdot \frac{138-z}{138}\right)}^{\frac{230}{2} \cdot \frac{138-z}{138}} = \frac{230}{2} \cdot \frac{138-z}{138} - \left(-\left(\frac{230}{2} \cdot \frac{138-z}{138}\right)\right) = 230 \cdot \frac{138-z}{138}$$

Integral terhadap y:

$$\int_{-\left(\frac{230}{2} \cdot \frac{138-z}{138}\right)}^{\frac{230}{2} \cdot \frac{138-z}{138}} 230 \cdot \frac{138-\mathrm{z}}{138}\, dy = 230 \cdot \frac{138-z}{138} \int_{-\left(\frac{230}{2} \cdot \frac{138-z}{138}\right)}^{\frac{230}{2} \cdot \frac{138-z}{138}} dy = 2 = 230^2 \cdot \left(\frac{138-z}{138}\right)^2$$

Integral terhadap z:

$$V = \int_0^{138} 230^2 \cdot \left(\frac{138 - z}{138}\right)^2 dz = 230^2 \cdot \frac{1}{138^2} \int_0^{138} (138 - z)^2 dz$$

Dengan memisalkan u = 138-*z*, maka du = $-du$, dan diperoleh ketika z = 0 maka u = 138 dan ketika z = 138 maka u = 0, sehingga

$$\mathrm{V} = 230^2 \cdot \frac{1}{138^2} \int_0^{138} (138 - \mathrm{z})^2 dz = 230^2 \cdot \frac{1}{138^2} \int_{138}^{0} u^2(-du) = 230^2 \cdot \frac{1}{138^2} \int_0^{138} u^2 du = 2.433.400$$

Maka dengan menggunakan integral lipat tiga diperoleh volume dari salah satu Piramida Giza adalah 2.433.400 m^3.

Kemudian hasil tersebut dibandingkan dengan metode Simpson Komposit (Numerik), diawalai dengan menentukan jumlah pembagian dengan Nx = Ny = 4 (Genap), sehingga diperoleh H_x = 57,5 m dan H_y = 5,75 m. Kelanjutnya menentukan titik grid. Dengan $Xi = i\,.Hx \quad untuk\ i = 0,1,2,3,4$ diperoleh $X = [0{,}57{,}5, 115{,}172{,}5, 230]$ dan $Yj = j\,.Hy\ untuk\ j = 0,1,2,3,4$ diperoleh $Y = [0{,}57{,}5, 115{,}172{,}5, 230]$. Kemudian menentukan nilai fungsi $Z(x_i,y_i)$, sehingga dengan $Z\,(x\,,y) = max\left(0, 138 - \frac{138}{115}\,.\max(|x - 115|), (|y - 115|)\right)$, diperoleh $Z\,(115\,,115\,) = 138$, dan $Z\,(115\,,57{,}5\,)$=69. Dengan demikian dapat disusun matriks Z = [$Z(x_i,y_i)$].

$$z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 69 & 69 & 69 & 0 \\ 0 & 69 & 138 & 69 & 0 \\ 0 & 69 & 69 & 69 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Langkah selanjutnya penentukan koefisien Simpson dengan $Ci = [1,4,2,4,1\,] \quad untuk\ i = 0,\ldots\ldots,4$ dan $dj = [1,4,2,4,1\,] \quad untuk\ j = 0,\ldots\ldots,4$. Menggunakan rumus simson 2D (persamaan 9).

$$V = \left(\frac{Hx}{3}\right)\left(\frac{Hy}{3}\right) \sum_{i=0}^{Nx} \sum_{j=0}^{Ny} ci\ dj\ z(Xi,\ Yj) \qquad (9)$$

Faktor depan= $\frac{Hx}{3}\ .\ \frac{Hy}{3} = \frac{57{,}5\ .\ 57{,}5}{9} = \frac{3306{,}25}{9}$ = 367, 3611 m^2 dan jumlah berbobot $\left(\sum_{i=0}^{Nx} \sum_{i=0}^{Ny} cidjZ(Xi,Yj)\right)$, $c1 = 4\ c2 = 2, c3 = 4\ dan\ d1 = 4, d2 = 2\ , d3 = 4$. Dengan persamaan $\boldsymbol{Ji,j} = cidjZi,j$, untuk $Baris\ j = 1\ (d1 = 4)$, diperoleh J1,1 = *c1d1 Z1,1* = 4.4.69 = 16 . 69 = 1104; J2,1 = *c2d1 Z2,1* = 2.4.69 = 8 . 69 = 552; dan J3,1 = *c3d1 Z3,1* = 4.4.69 = 16 . 69 = 1104 sehingga diperoleh

$$\sum_{i=1}^{3} cidjZi,j = 1104 + 552 + 1104 = 2760$$

Kemudian $Baris\ j = 2\ (d2 = 2)$, diperoleh J1,2 = *c1d2 Z1,2* = 4.2.69 = 8 . 69 = 552; J2,2 = *c2d2 Z2,2* = 2.2.138 = 4 . 138 = 552; dan J3,2 = *c3d2Z3,2* = 4.2.69 = 8 . 69 = 552 dan dapat disusun

$$\sum_{i=1}^{3} cid2\ Zi,2 = 552 + 552 + 552 = 1656$$

Selanjutnya untuk $Baris\ j = 3\ (d2 = 4)$, diperoleh J1,3 = *c1d1 Z1,3* = 4.4.69 = 16 . 69 = 1104; J2,3 = *c2d3 Z2,3* = 2.4.69 = 8 . 69 = 552; dan J3,3 = *c3d3 Z3,3* = 4.4.69 = 16 . 69 = 1104. Sehingga diperoleh

$$\sum_{i=1}^{3} cid3Zi,3 = 1104 + 552 + 1104 = 2760 \text{ dan } \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{3} cidjZi,j\right) = 2760 + 1656 + 2760 = 7176$$

Tahapan selanjutannya adalah menentukan Volume hasil Simpson dengan $V = Faktor\,.(Total\ semua\ kontribusi\ nonzero\ )$ maka akan diperoleh $V = 2.636.183,33\ m^3$. Berdasarkan hasil yang diperoleh $Vsimpson(N = 4) = 2.636.183,33\ m^3$ dan $Vanalitik = \frac{1}{3}\ .\ L^2.$ H = $\frac{1}{3}\ .\ (230)^2.$ 138 = 2.433.400 m^3, perlu dilakukan perhitungan yang sama dengan angka berbeda hingga nilainya mendekati nilai analitik, dengan grid halus (nx = ny = 200) : $V_{200} \approx 2.433.481{,}11\ m^3$ dan Galat absolut $Error\ abs = V_{simpson(200)} - V_{analitik} = 2{,}433{,}481.11 - 2{,}433{,}400 = 81{,}11\ m^3$, serta galat relatif0.00333%, ini membuktikan bahwa bahwa semakin besar n, semakin kecil galatnya.

Tabel 1. Volume metode Simpson dan tingkat eror

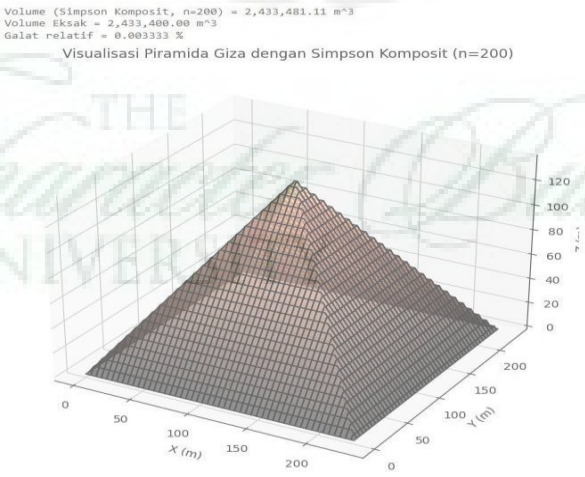
n	V_Simpson (m^3)	Error absolut (m^3)	Error relatig (%)
4	2,636,183.333333	202,783.333333	8.333333
10	2,465,845.333333	32,445.333333	1.333333
50	2,434,698.813333	1,297.813333	0.053333
100	2,433,724.453333	324.453333	0.013333

© Jurusan Matematika - Universitas Negeri Medan

n	V_Simpson (m³)	Error absolut (m³)	Error relatig (%)
200	2,433,481.113333	81.113333	0.003333

Berikut ini visualisasi gambar (Gambar 1) dengan rumus Python:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
# Parameter piramida Giza
a = 230   # panjang sisi alas (m)
H = 138   # tinggi piramida (m)
# Fungsi tinggi piramida
def z_pyramid(x, y, a, H):
    return H * (1 - (2/a) * np.maximum(abs(x - a/2), abs(y - a/2)))
# Simpson Komposit 2D
def simpson_2d(f, ax, bx, ay, by, nx, ny):
    hx = (bx - ax) / nx
    hy = (by - ay) / ny
   x = np.linspace(ax, bx, nx+1)
    y = np.linspace(ay, by, ny+1)
    X, Y = np.meshgrid(x, y, indexing='ij')
    Z = f(X, Y, a, H)
   # koefisien Simpson di x
    cx = np.ones(nx+1)
    cx[1:nx:2] = 4
    cx[2:nx-1:2] = 2
   # koefisien Simpson di y
    cy = np.ones(ny+1)
    cy[1:ny:2] = 4
    cy[2:ny-1:2] = 2
   C = np.outer(cx, cy)
    integral = (hx*hy/9) * np.sum(C * Z)
    return integral
# Hitung dengan n=200
nx, ny = 200, 200
V_simpson = simpson_2d(z_pyramid, 0, a, 0, a, nx, ny)
# Volume eksak
V_exact = (1/3) * a**2 * H
print(f"Volume (Simpson Komposit, n={nx}) = {V_simpson:,.2f} m^3")
print(f"Volume Eksak = {V_exact:,.2f} m^3")
print(f"Galat relatif = {abs(V_simpson - V_exact)/V_exact * 100:.6f} %")
# ==================== Visualisasi Piramida ====================
fig = plt.figure(figsize=(10,8))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
# Mesh untuk permukaan
X = np.linspace(0, a, 100)
Y = np.linspace(0, a, 100)
X, Y = np.meshgrid(X, Y)
Z = z_pyramid(X, Y, a, H)
ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap='copper', edgecolor='k', alpha=0.7)
ax.set_xlabel('X (m)')
ax.set_ylabel('Y (m)')
ax.set_zlabel('Z (m)')
ax.set_title(f"Visualisasi Piramida Giza dengan Simpson Komposit (n={nx})")
plt.show()
```



Gambar 1. Visualisasi Giza dengan Simson Komposit (n = 200)

KESIMPULAN

Berdasarkan analisis yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa pendekatan matematis melalui integral lipat tiga berhasil memverifikasi volume Piramida Giza sebesar 2.433.400 m³, yang konsisten dengan hasil perhitungan

menggunakan rumus volume limas konvensional. Hal ini mengkonfirmasi validitas model geometri yang dibangun dalam sistem koordinat Kartesius dengan batas integral yang diturunkan berdasarkan prinsip kesebangunan.

Di sisi lain, implementasi metode Simpson Komposit 2D sebagai solusi numerik menunjukkan konvergensi nilai hasil aproksimasi terhadap solusi analitik seiring dengan penambahan kepadatan grid. Pada nilai n = 200, diperoleh galat relatif sebesar 0,00333%, yang mengindikasikan tingkat akurasi yang sangat tinggi dan stabilitas numerik yang baik. Fenomena ini sejalan dengan teori error pada metode kuadratur numerik, di mana peningkatan jumlah partisi berbanding lurus dengan penurunan galat pemotongan.

Secara implisit, penelitian ini juga menggaris bawahi signifikansi integrasi antara pendekatan analitik dan numerik dalam menyelesaikan permasalahan geometri ruang. Hasil yang diperoleh tidak hanya memperkuat pemahaman konseptual kalkulus multivariabel, tetapi juga membuka peluang pengembangan model numerik untuk bentuk-bangun ruang yang lebih kompleks dan tidak teratur dalam aplikasi rekayasa dan komputasi geometri.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang tulus kepada Ibu Hamidah Nasution dan Ibu Alvi Syahrin S.Si, M.Si selaku dosen pengampu mata kuliah Kalkulus Peubah Banyak atas bimbingan, arahan, dan dukungan berharga selama proses pelaksanaan penelitian ini. Ucapan terima kasih juga penulis sampaikan kepada seluruh pihak yang telah berkontribusi secara langsung maupun tidak langsung dalam penyusunan dan penyempurnaan naskah artikel ini. Tak lupa, apresiasi setinggi-tingginya penulis ucapkan kepada seluruh anggota tim peneliti atas dedikasi, kerjasama, dan upaya kerasnya sehingga penelitian ini dapat diselesaikan dengan baik.

DAFTAR PUSTAKA

Adriyansyah, R., & Hadi, M. S. (2022). Penentuan Volume Kerucut Elips Menggunakan Monte Carlo dengan Bantuan Python. Jurnal Pembelajaran dan Matematika Sigma (JPMS), 8(1).

Alkaramy, N. A. (2012). Derivation of Composition Methods for Evaluating Double Integrals and their Error Formulas from Trapezoidal and mid- point Methods and Improving Results using Accelerating Methods (Disertasi MS.c).

Aljassas, S. M. (2018). Numerical Methods for Evaluation of Double integrals with Continuous Integrands. College of Education for Girls: University of Kufa, Iraq.

Al-Taey, A. S. (2005). Some Numerical Methods for Evaluating Single and Double Integrals with Singularity (Disertasi MS.c).

Andika Saputra et al. (2020). Numerical Analysis of Double Integral of Trigonometric Function Using Romberg Method.

Aziz, A. (1992). Approximation to a function of two variables by the sum of functions of one variable. J. Approx. Theory, 71, 164–173.

Bergh, J., & Löfström, J. (1976). Interpolation spaces: an introduction. Springer-Verlag.

Berrut, J. P., & Trefethen, L. N. (2004). Barycentric lagrange lnterpolation. Siam Rev., 46, 501.

Budak, H., Ali, M. A., & Tunc, T. (2021). Quantum Ostrowski-type integral inequalities for functions of two variables. Math. Methods Appl. Sci., 44, 5857–5872.

Budak, H., Zhang, Z., & Yildirim, H. (2021). Some new Simpson's type inequalities for coordinated convex functions in quantum calculus. Math. Methods Appl. Sci., 44, 4515–4540.

Chakebo (2016). Comparing different method of double integral of iterations and determining their accucy to apply for Monte Carlo Method. Arba Minch Univ., Ethiopia.

Dahlquist, G., & Björck, Å. (2008). Numerical Methods in Scientific Computing, Volume 1. Society for Industrial and Applied Mathematics.

Das, S., & Suganthan, P. N. (2011). Differential evolution: a survey of the state-of-the-art. Evolutionary Computation, IEEE Transactions on, 15(1), 4-31.

Davis, P. J. (1975). Interpolation and approximation. Dover.

Deng, Z. X., Huang, F. D., & Liu, X. J. (2011). Differential evolution algorithm for numerical integral problem. Computer Engineering, 37(20), 206-207. (in Chinese)

Dickson, L. E. History of The Theory of Numbers, Volume II.

Eghaar, B. H. (2010). Some Numerical Methods For Evaluating Double and Triple Integrals (Disertasi MS.c).

Elsayed, S. M., Sarker, R. A., & Essam, D. L. (2011). Differential evolution with multiple strategies for solving CEC2011 real-world numerical optimization problems. In Evolutionary Computation (CEC), 2011 IEEE Congress on (pp. 1041-1048). IEEE.

Fox, L. (1967). Romberg Integration for a Class of Singular Integrands. comput. J., 10, 87-93.

Fox, L., & Hayes, L. (1970). On the Definite Integration of Singular Integrands. SIAM REVIEW., 12, 449-457.

Haber, S. (1970). Numerical evaluation of multiple integrals. SIAM Rev., 12, 481–526.

Hajdu, D., Borgioli, F., Michiels, W., Insperger, T., & Stepan, G. (2019). Robust stability of milling operations based on pseudospectral approach. Int. J. Mach. Tools Manuf., 149, 103516.

Hutagalung, S. M., Sihite, M., & Bangun, H. N. C. (2025). Piramida Mesir sebagai Keajaiban Dunia: Simbol Keagungan Peradaban Kuno. Jurnal Pendidikan Sosial dan Humaniora, 4(3), 5562–5567.

Irawati, S. M., Amin, F., & Paembonan, A. Y. (2025). Identifikasi dan Pemodelan 2D Zona Akuifer Daerah Buffalo River dengan Menggunakan Data Audiomagnetotelluric. Jurnal Geofisika, 23(1), 9–15.

Jafari, H., & Saeidy, M. (2008). Differential transform method for solving Volterra integral equation with separable kernels. Math. Comput. Model., 48, 1144–1149.

Kawae, Y. (2024). Structural Analysis of Pyramids: Insights from the Giza 3D Survey Project. The Indonesian Journal of Social Studies, 7(2), 238–244.

LaTorre, A., Muelas, S., & Peña, J. M. (2011). Benchmarking a hybrid DE-RHC algorithm on real world problems. In Evolutionary Computation (CEC), 2011 IEEE Congress on (pp. 1027-1033). IEEE.

Mateen, A., Zhang, Z., & Ali, M. A. (2024). Some Milne's rule type inequalities for convex functions with their computational analysis on quantum calculus. Filomat, 38, 3329–3345.

Maxwell, J. C. (1880). On approximate multiple integration between limits of summation. Cambridge Phil. Soc. Proc., 3, 39–47.

McLeod, R. M. (1980). The generalized Riemann integral. Mathematical Association of America.

Mikeladze, Sh. E. (1953). Numerical methods of mathematical analysis. State Publishing House of Technical-Theoretical Literature.

Mishra, S. K., Sharma, R., & Bisht, J. (2024). Hermite–Hadamard-type inequalities for strongly (\alpha, m)-convex functions via quantum calculus. J. Appl. Math. Comput., 70, 4971–4994.

Mohammad (2008). Dynamic control of accuracy using the stochastic arithmetic double and improper integrals. Islamic Azad University.

Mohammed, A. H. (1984). Evaluations of Integrations with Singular Integrand (Disertasi MS.c).

Mohammed, A. H., Alkiffai, A. N., & Khudair, R. A. (2011). Suggested Numerical Method to Evaluate Single Integrals. Journal of Kerbala university, 9, 201-206.

Nasir, R., Pathuddin, P., Meinarni, W., Alfisyahra, A., & Lebagi, D. (2022). Peningkatan Partisipasi Mahasiswa melalui Implementasi Desain Didaktis Materi Integral Lipat Tiga Berbantuan GeoGebra dan Nearpod. Jurnal Kreatif Online, 10(1), 85–94.

Niu, J., Ding, Y., Zhu, L., & Ding, H. (2016). Stability Analysis of Milling Processes With Periodic Spindle Speed Variation Via the Variable-Step Numerical Integration Method. J. Manuf. Sci. Eng., 138, 114501.

Noor, M. A., Awan, M. U., & Noor, K. I. (2016). Quantum Ostrowski inequalities for q-differentiable convex functions. J. Math. Inequal., 10, 1013–1018.

Preston, C. Hammer, A. W. Wymore (1957). Numerical Evaluation of Multiple Integrals I. Math. Tables Other Aids Comput., 11, 59–67.

Qin, C., Tao, J., & Liu, C. (2018). A predictor-corrector-based holistic-discretization method for accurate and efficient milling stability analysis. Int. J. Adv. Manuf. Technol., 96, 2043–2054.

Ralston, A. (1965). A First Course in Numerical Analysis. McGraw-Hill Book Company.

Rehab (2019). Evaluate the double integrals with continuous integrand by driving numerical methods. College of Education for Girls: University of Kufa, Iraq.

Riesz, F. (1933). Sur les fonctions des variables dont les dérivées partielles sont bornées. Trans. Amer. Math. Soc., 35, 245–253.

Rudin, W. (1987). Real and complex analysis. McGraw-Hill.

Sard, A. (1963). Linear approximation. American Mathematical Society.

Sierpinski, W. (1964). Elementary Theory of Numbers. Warsaw.

Storn, R., & Price, K. (1995). Differential evolution-a simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces. ICSI, Berkeley.

Stroud, A. H. (1971). Approximate calculation of multiple integrals. Prentice-Hall.

Suherly, T., & Shiddiq, M. (2020). Estimasi Volume Buah Kiwi Menggunakan Metode Pencitraan dan Aturan Simpson. Jurnal Media Informatika Budidarma, 4(3), 535.

Talvila, E., & Wiersma, M. (2012). Simple derivation of basic quadrature formulas. Atl. Electron. J. Math., 5, 47–59.

Ueberhuber, C. W. (1997). Numerical computation, Vol. II. Springer–Verlag.

Wei, D. Q., & Wang, M. M. (2008). Dynamic control of accuracy using the stochastic arithmetic double and improper integrals. Journal of computers, 31(2), 196-206. (in Chinese)

Wei, X., & Zhou, Y. (2009). Numerical Integral Method Research Based on PSO. Microelectronics & Computer, 26(7), 117-119. (in Chinese)

© Jurusan Matematika - Universitas Negeri Medan