Dynamical and Stability Analysis of the Cooperative Lotka–Volterra Model in the Case of Two Automotive Industries in Indonesia

Melissa Chandra [1*], Danu Rama Dani [2], Khoiriyati Azmi[3], Mikolis Etimanta Ginting [4], Retno Ayu Zalianti[5], Hamidah Nasution[6], Alvi Sahrin Nasution[7]
[1,2,3,4,5,6,7] Matematika, Universitas Negeri Medan, Kota Medan, 20221, Indonesia
*Corresponding Author:mlsschndra.4223230003@mhs.unimed.ac.id

Abstrak

Penelitian ini menganalisis model Lotka–Volterra Kooperatif untuk menggambarkan dinamika interaksi dua industri otomotif besar di Indonesia, yaitu Toyota dan Daihatsu, melalui produk Calya–Sigra. Model ini digunakan untuk mengetahui bagaimana perubahan parameter kerja sama (μ) memengaruhi kestabilan sistem dan terjadinya bifurkasi transkritikal. Analisis dilakukan dengan menentukan titik-titik keseimbangan, menilai kestabilan lokal menggunakan matriks Jacobian, serta mengidentifikasi perubahan struktur kestabilan saat parameter interaksi melampaui nilai kritis. Hasil penelitian menunjukkan bahwa sistem mengalami bifurkasi transkritikal ketika $\mu = -1$, di mana titik keseimbangan P_2 dan P_4 saling bertukar kestabilan. Sebelum melewati nilai kritis, sistem hanya memiliki satu titik stabil (P_2), sedangkan setelahnya kestabilan berpindah ke titik P_4 yang merepresentasikan kondisi koeksistensi stabil antarindustri. Secara ekonomi, hal ini menunjukkan bahwa peningkatan intensitas kolaborasi antarperusahaan mampu mengubah struktur pasar dari dominasi tunggal menuju keseimbangan kolaboratif yang berkelanjutan.
Kata kunci: Bifurkasi Transkritikal; Industri Otomotif; Kestabilan; Lotka–Volterra Kooperatif; Sistem Dinamik.

Abstract

This study analyzes the cooperative Lotka–Volterra model to describe the interaction dynamics between two major automotive industries in Indonesia, Toyota and Daihatsu, represented by the Calya and Sigra products. The model is employed to investigate how changes in the cooperation parameter (μ) affect system stability and lead to a transcritical bifurcation. The analysis involves determining equilibrium points, assessing local stability using the Jacobian matrix, and identifying stability shifts when the interaction parameter crosses a critical value. The results show that the system undergoes a transcritical bifurcation at $\mu = -1$, where the equilibrium points P_2 and P_4exchange their stability. Before reaching the critical value, only one equilibrium (P_2) is stable, while after the threshold, stability shifts to P_4, representing a stable coexistence between the two industries. Economically, this implies that increasing collaboration intensity between companies can transform the market structure from single dominance into a sustainable cooperative equilibrium.
***Keywords**: Transcritical bifurcation; Automotive industry; Stability; Cooperative Lotka–Volterra; Dynamic system*

Citation: Chandra, M., dkk. (2025). Dynamical and Stability Analysis of the Cooperative Lotka–Volterra Model in the Case of Two Automotive Industries in Indonesia. *Prodising Seminar Nasional Jurusan Matematika 2025*. 234 – 243.

PENDAHULUAN

Pembangunan ekonomi Indonesia merupakan salah satu sektor yang berkontribusi besar terhadap pertumbuhan produk domestik bruto melalui peningkatan ekspor, penyerapan tenaga kerja, serta penguatan rantai pasok nasional. Sejak dua dekade terakhir, pertumbuhan ekonomi yang relatif stabil dan jumlah penduduk yang besar menjadikan Indonesia pasar potensial bagi produk otomotif. Kondisi ini mendorong banyak perusahaan, baik lokal maupun asing, untuk menanamkan modalnya di sektor ini. Dalam proses perkembangannya, industri otomotif Indonesia menghadapi berbagai tantangan seperti globalisasi, integrasi ekonomi kawasan, serta kemajuan teknologi menyebabkan struktur persaingan semakin kompleks. Perubahan perilaku konsumen yang cenderung mengutamakan efisiensi dan inovasi menuntut perusahaan otomotif untuk menyesuaikan diri dengan cepat. Pada saat yang sama, muncul kebijakan ekonomi yang mendorong kolaborasi lintas negara, seperti *Indonesia–Japan Economic Partnership Agreement* (IJEPA). Kebijakan ini membuka peluang transfer teknologi dan peningkatan kualitas sumber daya manusia, tetapi juga memunculkan ketergantungan antara perusahaan lokal dan asing (Fritscilia & Rifai, 2025). Ketergantungan yang berlebihan berpotensi menimbulkan ketidakseimbangan dalam pasar dan memengaruhi stabilitas industri secara keseluruhan.

Fenomena hubungan saling bergantung antarperusahaan menunjukkan bahwa persaingan di pasar otomotif tidak selalu bersifat destruktif. Dalam banyak kasus, kolaborasi antarpelaku industri justru menjadi strategi adaptif untuk mempertahankan keberlanjutan bisnis. Kerjasama memungkinkan perusahaan berbagi sumber daya, teknologi, maupun jaringan distribusi sehingga dapat memperkuat posisi kompetitif mereka. Namun demikian, tidak semua bentuk kerjasama menghasilkan keseimbangan yang stabil. Ketika intensitas kolaborasi meningkat melebihi batas tertentu, hubungan yang awalnya saling menguntungkan bisa berubah menjadi tidak seimbang, menyebabkan salah satu pihak

mendominasi atau bahkan menghambat pertumbuhan pihak lain (Tsakila et al., 2025). Kondisi semacam ini memperlihatkan bahwa dinamika industri otomotif dapat dianalisis seperti halnya sistem biologis yang memiliki interaksi antarorganisme. Dalam biologi, hubungan antarpopulasi organisme digambarkan menggunakan pendekatan sistem dinamik, yakni suatu kerangka matematis yang mempelajari perubahan variabel terhadap waktu. Sistem dinamik tidak hanya menjelaskan bagaimana suatu variabel berubah, tetapi juga bagaimana variabel-variabel tersebut saling berinteraksi sehingga membentuk perilaku sistem secara keseluruhan. Melalui model sistem dinamik, dapat dilakukan prediksi terhadap kestabilan, osilasi, maupun titik keseimbangan dari suatu sistem (M & Baqi, 2018).

Salah satu model yang paling dikenal dalam kajian sistem dinamik adalah model Lotka–Volterra. Model ini pertama kali diperkenalkan untuk menjelaskan interaksi antara dua populasi biologis, yaitu mangsa dan pemangsa. Dalam model tersebut, perubahan jumlah masing-masing populasi dipengaruhi oleh laju pertumbuhan alami serta tingkat interaksi antara keduanya. Hubungan ini kemudian direpresentasikan dalam bentuk sistem persamaan diferensial nonlinier yang menggambarkan pertumbuhan dan penurunan populasi dari waktu ke waktu. Keunggulan model Lotka–Volterra terletak pada kemampuannya menangkap interaksi timbal balik antarentitas dengan cara yang relatif sederhana namun informatif. Perkembangan teori matematika telah memperluas penggunaan model Lotka–Volterra ke berbagai bidang. Riset yang dilakukan oleh Monica, dkk (2014) mengembangkan model tiga spesies untuk menganalisis kestabilan populasi dan menemukan bahwa penambahan satu spesies baru dalam sistem dapat menimbulkan perubahan signifikan terhadap kestabilan keseluruhan. Riset dari Panigoro dan Savitri (2020) menambahkan konsep efek Allee pada predator dan menemukan adanya bifurkasi Hopf, yaitu fenomena ketika kestabilan sistem berubah menjadi osilasi periodik akibat variasi parameter. Temuan-temuan tersebut menunjukkan bahwa perubahan kecil pada parameter interaksi dapat menghasilkan perubahan besar terhadap perilaku dinamik sistem (Ritania Monica, Leli Deswita, 2014)(Panigoro & Savitri, 2020).

Dalam bidang ekonomi, terutama pada sektor industri yang kompleks seperti otomotif, perusahaan dapat dipandang sebagai populasi ekonomi yang saling berinteraksi. Masing-masing perusahaan memiliki kapasitas pertumbuhan sendiri, tetapi keberadaannya juga dipengaruhi oleh perusahaan lain melalui hubungan kompetitif atau Kooperatif. Dengan demikian, model Lotka–Volterra dapat diadaptasi untuk menggambarkan *dynamics of cooperation* maupun *competition* antarperusahaan (Windarto & Eridani, 2020). Melalui pendekatan ini, perusahaan dapat dianggap memiliki "populasi pasar" yang bertumbuh atau menurun tergantung pada kekuatan interaksi dengan kompetitor maupun mitra bisnis. Riset yang dilakukan oleh Rachmawati, dkk (2024) merupakan salah satu contoh penerapan model Lotka–Volterra Kooperatif dalam konteks ekonomi Indonesia. Mereka mengkaji interaksi dua industri otomotif besar dan menemukan bahwa terdapat kondisi tertentu di mana keduanya dapat mencapai titik keseimbangan stabil. Namun, stabilitas tersebut sangat bergantung pada nilai parameter interaksi positif antarindustri. Ketika nilai parameter berubah melampaui batas tertentu, sistem kehilangan kestabilan dan salah satu industri dapat mendominasi pasar. Fenomena inilah yang dalam teori sistem dinamik dikenal sebagai bifurkasi transkritikal, yaitu keadaan ketika dua titik keseimbangan saling bertukar kestabilan seiring dengan perubahan parameter (Panigoro & Savitri, 2020)(Rachmawati et al., 2024).

Model Lotka–Volterra pertama kali diperkenalkan oleh Alfred Lotka dan Vito Volterra pada awal abad ke-20 sebagai model matematis untuk menggambarkan hubungan antara dua spesies biologis yang saling memengaruhi, yaitu mangsa dan pemangsa. Secara umum, model ini terdiri dari dua persamaan diferensial nonlinier yang menunjukkan laju perubahan populasi setiap spesies terhadap waktu. Model ini kemudian menjadi salah satu kerangka paling dasar dalam kajian sistem dinamik, karena mampu menjelaskan fenomena seperti kestabilan, osilasi, dan koeksistensi antarentitas (M & Baqi, 2018). Seiring perkembangannya, banyak penelitian mengembangkan model Lotka–Volterra untuk kasus yang lebih kompleks. (Ritania Monica, Leli Deswita, 2014) mengkaji kestabilan populasi pada model tiga spesies dan menemukan bahwa sistem dengan lebih dari dua entitas memiliki dinamika yang lebih sulit diprediksi. Penelitian ini menunjukkan bahwa kestabilan sistem sangat sensitif terhadap nilai parameter interaksi antarpopulasi. Sementara itu, (Panigoro & Savitri, 2020) memperkenalkan model Lotka–Volterra orde-fraksional dengan efek Allee aditif pada predator. Mereka menemukan fenomena bifurkasi Hopf, yaitu perubahan kondisi sistem dari stabil menjadi berosilasi periodik saat parameter tertentu melewati nilai ambang. Temuan ini penting karena menunjukkan bahwa bahkan perubahan kecil pada parameter dapat menyebabkan perubahan besar terhadap perilaku dinamik sistem.

Dalam bidang biologi terapan, (Dewi et al., 2024) mengembangkan model kompetitif dengan mempertimbangkan efek ketakutan (fear effect) yang dialami oleh mangsa akibat adanya sumber daya biotik bersama. Mereka menemukan bahwa adanya faktor psikologis dapat mengubah kestabilan sistem walaupun parameter interaksi tetap konstan. Penelitian (Fardinah et al., 2025) memperkaya pemahaman ini dengan menambahkan komponen penyakit

dan kanibalisme dalam model predator–mangsa menggunakan fungsi tanggapan Holling tipe II. Mereka menemukan bahwa dinamika sistem dapat berubah drastis tergantung pada kombinasi parameter yang digunakan. Di sisi lain, (Resmawan et al., 2025) meneliti model predator–mangsa dengan efek Allee dan fungsi tanggapan Holling tipe IV, dan menemukan bahwa sistem dapat mengalami perubahan kestabilan lokal maupun global bergantung pada nilai parameter tertentu. Model semacam ini menunjukkan betapa pentingnya analisis parameter dalam memahami kestabilan sistem dinamik. (Saputra et al., 2020) juga meneliti model penyebaran penyakit tuberkulosis dengan laju infeksi tersaturasi dan menemukan bahwa kestabilan titik ekuilibrium dapat berubah secara mendadak saat parameter infeksi melewati nilai kritis. Fenomena semacam ini memiliki kemiripan dengan dinamika ekonomi di mana perubahan kecil dalam intensitas interaksi antarperusahaan dapat menyebabkan pergeseran besar dalam keseimbangan pasar.

Selain dalam bidang biologi, model Lotka–Volterra telah diadaptasi dalam berbagai bidang lain, termasuk ekonomi dan industri. (Windarto & Eridani, 2020) menunjukkan bahwa model ini dapat digunakan untuk menganalisis kompetisi antarperusahaan dengan memperhitungkan faktor-faktor seperti pertumbuhan pasar, kapasitas produksi, dan tingkat interaksi kompetitif. Mereka menegaskan bahwa sistem kompetitif memiliki titik keseimbangan yang dapat berubah ketika parameter interaksi meningkat atau menurun. (Wang et al., 2021) memperluas pendekatan ini dengan mengkaji model Lotka–Volterra tiga dimensi untuk populasi industri. Mereka menemukan bahwa keseimbangan sistem tergantung pada intensitas kompetisi dan tingkat pertumbuhan alami setiap entitas industri. Sementara itu, penelitian (Puspita et al., 2024) menjadi salah satu studi penting yang mengaplikasikan model kompetitif Lotka–Volterra pada kasus nyata di Indonesia, yakni pangsa pasar sistem operasi seluler. Mereka menemukan bahwa dua perusahaan dapat mencapai keseimbangan stabil apabila tingkat interaksi kompetitif berada dalam batas optimal. Penelitian ini memperlihatkan bahwa pendekatan matematis Lotka–Volterra mampu menggambarkan perilaku pasar dan kompetisi bisnis secara kuantitatif.

Dalam konteks ekonomi kolaboratif, (Rachmawati et al., 2024) memperkenalkan model Lotka–Volterra Kooperatif untuk menggambarkan hubungan dua industri otomotif besar di Indonesia. Mereka menemukan bahwa hubungan positif antarperusahaan dapat menghasilkan titik keseimbangan stabil, tetapi kestabilan tersebut sangat bergantung pada nilai parameter interaksi positif. Ketika nilai parameter meningkat melampaui ambang tertentu, sistem kehilangan kestabilannya dan salah satu perusahaan menjadi dominan. Temuan ini memberikan dasar teoretis penting untuk menganalisis dinamika kolaborasi antarperusahaan dalam konteks industri otomotif yang terus berubah. Selain penelitian-penelitian yang berfokus pada analisis matematis, terdapat pula studi yang menyoroti dimensi manajerial dan strategis dari kolaborasi industri. (Tsakila et al., 2025) mengkaji kepemimpinan kreatif dan disrupsi pasar dalam konteks ekonomi modern. Mereka menunjukkan bahwa pemimpin yang inovatif mampu mengubah struktur pasar dengan menciptakan model bisnis baru yang menantang pola persaingan tradisional. Walaupun tidak menggunakan pendekatan matematis, penelitian ini menegaskan bahwa dinamika sistem industri juga dipengaruhi oleh faktor perilaku dan strategi organisasi, yang dalam model matematis dapat direpresentasikan melalui perubahan nilai parameter interaksi.

Sebagian besar penelitian terdahulu berfokus pada model Lotka–Volterra kompetitif dan predator–mangsa, sementara model Kooperatif masih jarang dikaji, khususnya dalam konteks ekonomi industri. Penelitian (Rachmawati et al., 2024) memang telah menerapkan model Lotka–Volterra Kooperatif untuk dua industri otomotif Indonesia, namun pembahasannya masih terbatas pada identifikasi titik keseimbangan dan kestabilan lokal. Belum ada analisis yang secara eksplisit mengkaji bagaimana perubahan parameter interaksi positif dapat menyebabkan pergeseran sifat kestabilan sistem, padahal fenomena semacam ini sangat penting dalam memahami batas-batas stabilitas kolaborasi antarindustri. Penelitian terdahulu belum banyak yang menghubungkan hasil analisis matematis dengan implikasi ekonomi yang konkret. Sebagian besar model difokuskan pada penyelesaian sistem diferensial dan penentuan kestabilan tanpa memberikan interpretasi ekonomi terhadap perubahan parameter. Padahal, dalam konteks industri otomotif, perubahan parameter interaksi dapat merepresentasikan perubahan intensitas kerja sama, alih teknologi, atau kompetisi pasar (Fritscilia & Rifai, 2025). Keterhubungan antara hasil matematis dan implikasi kebijakan inilah yang masih jarang dikaji secara mendalam.

Sebagian penelitian tentang bifurkasi, seperti yang dilakukan oleh (Panigoro & Savitri, 2020) serta (Resmawan et al., 2025), hanya diterapkan pada bidang biologi. Belum ada studi yang secara khusus mengaplikasikan konsep bifurkasi transkritikal pada sistem ekonomi, padahal konsep ini sangat relevan untuk menjelaskan perubahan struktur keseimbangan pasar akibat fluktuasi kerja sama antarindustri. Dalam konteks ekonomi otomotif, bifurkasi dapat diartikan sebagai kondisi ketika keseimbangan kolaboratif berubah menjadi dominasi salah satu perusahaan karena peningkatan intensitas kerja sama yang melampaui batas optimal. Belum terdapat penelitian yang menggabungkan analisis kestabilan

dan bifurkasi dalam satu kerangka model yang utuh untuk menjelaskan interaksi dua industri otomotif Indonesia. Padahal, analisis simultan terhadap kestabilan dan bifurkasi dapat memberikan pemahaman yang lebih komprehensif mengenai bagaimana sistem berubah ketika nilai parameter melampaui titik kritisnya. Dengan memahami hal ini, dapat diperoleh gambaran matematis yang lebih akurat tentang dinamika kolaborasi antarindustri dan implikasinya terhadap struktur pasar nasional.

Selain itu, kebaruan juga muncul pada aspek interpretasi ekonomi dari hasil matematis, di mana setiap parameter dalam model dikaitkan dengan fenomena nyata di industri otomotif, seperti intensitas kolaborasi, penguasaan pasar, dan tingkat adaptasi teknologi. Dengan demikian, penelitian ini tidak hanya mengembangkan model matematis semata, tetapi juga menjembatani teori sistem dinamik dengan realitas ekonomi Indonesia. Dalam konteks penelitian (Rachmawati et al., 2024), model Lotka–Volterra Kooperatif memang telah digunakan, namun belum dilakukan eksplorasi terhadap kondisi bifurkasi maupun implikasi ekonominya. Penelitian ini memperluas cakupan analisis dengan menambahkan komponen bifurkasi sebagai dasar untuk memahami transformasi keseimbangan antarindustri. Kebaruan lainnya terletak pada penerapan model Kooperatif dalam sistem industri dengan karakteristik dualitas interaksi, yaitu persaingan dan kerja sama yang terjadi secara simultan. Industri otomotif Indonesia merupakan contoh nyata dari sistem yang memiliki interaksi ganda semacam ini. Perusahaan-perusahaan besar seperti produsen kendaraan, pemasok komponen, dan mitra distribusi tidak hanya bersaing untuk mendapatkan pangsa pasar, tetapi juga bekerja sama dalam pengembangan teknologi, rantai pasok, dan standarisasi produk. Dalam kerangka sistem dinamik, kondisi semacam ini memunculkan model dengan parameter interaksi positif dan negatif yang saling memengaruhi kestabilan sistem secara kompleks (Tsakila et al., 2025).

Permasalahan utama dalam penelitian ini berangkat dari fenomena dinamis hubungan antarperusahaan dalam industri otomotif Indonesia yang tidak selalu menunjukkan keseimbangan yang stabil. Dalam praktiknya, terdapat masa di mana kolaborasi antarperusahaan berjalan efektif dan saling menguntungkan, namun di sisi lain terdapat pula kondisi ketika kerja sama tersebut berubah menjadi ketergantungan yang berlebihan, bahkan dominasi salah satu pihak. Hal ini memperlihatkan adanya dinamika nonlinier dalam interaksi antarindustri yang memerlukan pemodelan matematis untuk memahami perilakunya secara menyeluruh (Rachmawati et al., 2024). Model Lotka–Volterra Kooperatif dipilih karena mampu merepresentasikan hubungan saling menguntungkan antara dua entitas ekonomi, seperti perusahaan otomotif dan mitranya. Dalam konteks penelitian ini, parameter interaksi positif dalam model mencerminkan intensitas kolaborasi antarindustri. Namun, intensitas tersebut tidak selalu membawa sistem menuju keseimbangan yang stabil. Ketika parameter interaksi melebihi batas tertentu, sistem dapat mengalami perubahan struktur keseimbangan yang dikenal dengan istilah bifurkasi transkritikal (Panigoro & Savitri, 2020). Fenomena ini menjadi sangat penting karena dapat menjelaskan pergeseran sistem dari kolaborasi stabil menuju dominasi satu pihak atau bahkan ketidakseimbangan total.

Berdasarkan penelitian yang telah dijelaskan sebelumnya, tujuan utama penelitian ini adalah mengembangkan model matematis Lotka–Volterra Kooperatif untuk menganalisis dinamika interaksi dua industri otomotif di Indonesia. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan titik-titik keseimbangan sistem, menganalisis kestabilan lokal maupun global dari setiap titik keseimbangan, serta mengidentifikasi terjadinya bifurkasi transkritikal yang menandai perubahan struktur keseimbangan akibat variasi parameter interaksi positif. Melalui pendekatan tersebut, diharapkan dapat diketahui bagaimana perubahan kecil dalam parameter interaksi dapat memengaruhi kestabilan sistem kolaboratif antarindustri otomotif, sekaligus menjelaskan kondisi ideal yang menjaga keseimbangan hubungan tersebut. Secara lebih luas, penelitian ini juga bertujuan untuk memberikan interpretasi ekonomi terhadap hasil analisis matematis yang dilakukan, sehingga model yang dikembangkan tidak hanya berhenti pada tataran teoritis tetapi juga memiliki relevansi praktis bagi pengambil kebijakan dan pelaku industri.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan metode analisis matematis untuk membangun model interaksi Kooperatif antara dua sistem yang saling berpengaruh. Pendekatan ini dipilih karena mampu merepresentasikan hubungan dinamis antarvariabel secara kuantitatif serta memungkinkan dilakukannya analisis kestabilan dan simulasi perilaku sistem terhadap waktu. Tahapan penelitian dilakukan secara sistematis, dimulai dari pembentukan model matematis, penentuan parameter, analisis kestabilan, analisis bifurkasi, hingga simulasi numerik.

Pembentukan model matematis dilakukan untuk menggambarkan interaksi Kooperatif antar dua entitas dengan menggunakan sistem persamaan diferensial nonlinier berdasarkan model Lotka-Volterra. Model ini digunakan untuk merepresentasikan dinamika perubahan populasi kedua entitas terhadap waktu secara matematis. Selanjutnya, dilakukan

penentuan parameter dan asumsi yang meliputi laju pertumbuhan alami, kapasitas dukung, serta tingkat interaksi antar entitas sebagai dasar dalam simulasi model (Rachmawati et al., 2024).

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x\left(1 - \frac{x}{K_1} + \frac{\mu y}{K_2}\right), \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta y\left(1 - \frac{y}{K_2} + \frac{\delta x}{K_1}\right), \quad (2)$$

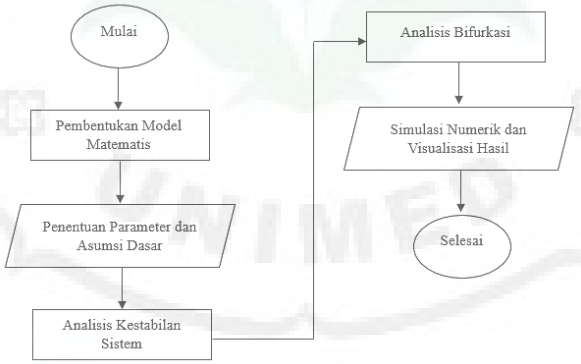
Dengan $x(t)$ dan $y(t)$ masing-masing menyatakan jumlah entitas pertama dan kedua pada waktu t. Parameter α dan β adalah laju pertumbuhan alami, K_1 dan K_2 merupakan kapasitas dukung, serta μ dan δ menunjukan tingkat interaksi Kooperatif antara kedua entitas tersebut (Rachmawati et al., 2024).

Titik keseimbangan sistem diperoleh dengan mensubstitusikan $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$. Analisis kestabilan dilakukan dengan linearisasi sistem di sekitar titik keseimbangan menggunakan matriks Jacobian berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Dengan f_1 dan f_2 masing-masing menyatakan fungsi pertumbuhan dari x dan y (Amalia & Savitri, 2023). Nilai eigen dari matriks Jacobian diperoleh dari persamaan karakteristik $det(J - \lambda I) = 0$. Suatu titik kesetimbangan dikatakan stabil apabila bagian real dari seluruh nilai eigen bernilai negatif, dan sebaliknya tidak stabil bila terdapat nilai eigen dengan bagian real positif.

Untuk memverifikasi hasil analisis teoritis, dilakukan simulasi numerik menggunakan perangkat lunak Python dengan pustaka NumPy, SciPy, dan Matplotlib. Simulasi ini menampilkan dinamika perubahan variabel terhadap waktu dalam bentuk grafik dua dimensi, sehingga memudahkan visualisasi perilaku sistem. Peralatan utama yang digunakan dalam penelitian ini meliputi perangkat komputer atau laptop sebagai media komputasi, serta perangkat lunak Python dengan pustaka yang disebutkan sebelumnya untuk mendukung analisis numerik dan visualisasi hasil. Untuk memperjelas alur kegiatan penelitian, tahapan metode penelitian ini disajikan dalam bentuk diagram alir seperti pada Gambar 1.



Gambar 1. Diagram alur penelitian model Kooperatif Lotka–Volterra

HASIL DAN PEMBAHASAN

Interaksi kerja sama antara PT Toyota Motor Manufacturing indonesia dengan produk Calya dan produk Sigra dimodelkan menggunakan tiga tahap penyusunan model, yaitu:

$$\{f_1(x,y) = \alpha x\left(1 - \frac{x}{K_1} + \frac{\mu y}{K_2}\right) f_2(x,y) = \beta y\left(1 - \frac{y}{K_2} + \frac{\delta x}{K_1}\right)$$

Pertumbuhan awal penjualan diasumsikan mengikuti bentuk pertumbuhan eksponensial. Jumlah penjualan pada waktu t ditulis sebagai $x(t)$ untuk calya dan $y(t)$ untuk sigra. Persamaan yang diperoleh $\frac{dx}{dt} = \alpha x$ dan $\frac{dy}{dt} = \beta y$, dengan α dan β masing-masing menyatakan laju pertumbuhan penjualan calya dan sigra.

Pada kenyataannya, pertumbuhan penjualan tidak terus meningkat tanpa batas karena adanya keterbatasan sumber daya seperti bahan baku, kapasitas produksi, maupun permintaan pasar. Hal ini dimodelkan dengan logistik, yaitu:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x\left(1 - \frac{x}{K_1}\right), \qquad \frac{dy}{dt} = \beta y\left(1 - \frac{y}{K_2}\right)$$

Dengan K_1 dan K_2 merupakan daya dukung *(carrying capacity)* penjualan maksimum untuk masing-masing produk. Selanjutnya, dimasukan pengaruh kerja sama antara kedua perusahaan. Interaksi ini berbentuk saling mendukung sehingga meningkatkan pertumbuhan penjualan masing-masing produk. Persamaan model Lotka–Volterra Kooperatif

ditunjukkan kembali pada (1) dan (2). Dengan parameter μ menyatakan tingkat kontribusi Sigra terhadap pertumbuhan Calya, sedangkan δ menyatakan kontribusi Calya terhadap pertumbuhan Sigra. Model inilah yang dikenal sebagai *Lotka-Volterra* Kooperatif. Pada titik equilibrium (Keseimbangan) model yang digunakan:

$$f_1(x,y) = \alpha x\left(1 - \frac{x}{K_1} + \frac{\mu y}{K_2}\right), \qquad f_2(x,y) = \beta y\left(1 - \frac{y}{K_2} + \frac{\delta x}{K_1}\right)$$

Titik keseimbangan diperoleh dari kondisi awal $x = 0, y = 0$, Dari kombinasi kasus-kasus tersebut diperoleh empat titik keseimbangan; (1) kasus $P_1 : x = 0$ dan $y = 0$, menghasilkan titik $P_1 = (0,0)$; (2) kasus $P_2 : x = 0$ dan $y \neq 0$, persamaan pertama menjadi $\beta y\left(1 - \frac{y}{K_2} + \frac{\delta \cdot 0}{K_1}\right) = 0$ diperoleh $y = K_2$, Sehingga titik $P_2 = (0, K_2)$; (3) kasus $P_3 : x \neq 0$ dan $y = 0$, persamaan menjadi $\alpha x\left(1 - \frac{x}{K_1} + \frac{\mu \cdot 0}{K_2}\right) = 0$, deoperoleh $x = K_1$, sehingga titik $P_3 = (K_1, 0)$; (4) kasus P_4 (koeksistensi) $: x \neq 0$ dan $y \neq 0$, $1 - \frac{x}{K_1} + \frac{\mu y}{K_2} = 0$ dan $1 - \frac{y}{K_2} + \frac{\delta x}{K_1} = 0$ serta definisikan $u = \frac{x}{K_1}$ dan $v = \frac{y}{K_2}$. Persamaan kemudian disesuaikan ke model : $1 - u + uv = 0 \ dan \ 1 - v + \delta u = 0$, sehingga diperoleh $: u - uv = 1 \ dan \ v - \delta u = 1$ Maka, dari persamaan pertama : $u = 1 + uv$ dan $v = 1 + \delta u$. Kemudian disubtitusikan ke persamaan kedua maka diperoleh

$$v = \frac{1+\mu}{1-\mu\delta} \text{ dan } u = \frac{1+\delta}{1-\mu\delta}$$

Kemudian jika kembali ke x, y sehingga diperoleh persamaa:

$$x = K_1 u = \frac{K_1(1+\mu)}{1-\mu\delta} \qquad y = K_2 v = \frac{K_2(1+\delta)}{1-\mu\delta}$$

sehingga diperoleh titik equilibrium (koeksistensi) $P_4 = \left(\frac{K_1(1+\mu)}{1-\mu\delta}, \frac{K_2(1+\delta)}{1-\mu\delta}\right)$. Dengan demikian, diperoleh ke-4 titik keseimbangan (equilibrium); $P_1 = (0,0)$ untuk keduanya nol; $P_2 = (0, K_2)$ untuk sigra Maksimal; $P_3 = (K_1, 0)$ untuk calya Maksimal dan $P_4 = \left(\frac{K_1(1+\mu)}{1-\mu\delta}, \frac{K_2(1+\delta)}{1-\mu\delta}\right)$

Analisis Kestabilan dengan Jacobian

Untuk sistem $\{f_1(x,y) = \alpha x\left(1 - \frac{x}{K_1} + \frac{\mu y}{K_2}\right) \ f_2(x,y) = \beta y\left(1 - \frac{y}{K_2} + \frac{\delta x}{K_1}\right)$ turunan parsialnya yang membentuk Matriks Jacobian adalah: $Jf(x,y) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \ \frac{\partial f_2}{\partial y} \ \frac{\partial f_2}{\partial x} \ \frac{\partial f_2}{\partial y}\right) = \left(\alpha\left(1 - \frac{2x}{K_1} + \frac{\mu y}{K_2}\right) \ \frac{\alpha\mu}{K_2} x \ \frac{\beta\delta}{K_1} y \ \beta\left(1 + \frac{\delta x}{K_1} - \frac{2y}{K_2}\right)\right)$. Hitung turunan-parsial f_1, f_2 terhadap x, y. Matriks Jacobian umum di (x_0, y_0) adalah; $J_f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \ \frac{\partial f_1}{\partial y} \ \frac{\partial f_2}{\partial x} \ \frac{\partial f_2}{\partial y}\right) = \left(\alpha\left(1 - \frac{2x_0}{K_1} + \frac{\mu y_0}{K_2}\right) \ \alpha\mu \frac{x_0}{K_2} \ \beta\delta \frac{y_0}{K_1} \ \beta\left(1 + \frac{\delta x_0}{K_1} - \frac{2y_0}{K_2}\right)\right)$. Untuk setiap titik ekuilibrium P_i kita substitusi (x_0, y_0) lalu cari nilai *eigen value* (akar polinom karakteristik).

- Titik $P_1 = (0,0)$ Substitusi $x_0 = 0, y_0 = 0$ ke Jacobian: $J_f(0,0) = \left(\alpha(1 - 0 + 0)\alpha\mu \cdot 0 \ \beta\delta \cdot 0 \ \beta(1 + 0 - 0)\right) = (\alpha \ 0 \ 0 \ \beta)$ diperoleh Polinom karakteristik: $det(J - \lambda I) = (\alpha - \lambda)(\beta - \lambda) = 0$ Jadi eigen values: $\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = \beta$, Karena $\alpha > 0, \beta > 0$ (parameter positif), kedua eigen positif → *unstable node*.
- Titik $P_2 = (0, K_2)$, Substitusi $x_0 = 0, y_0 = K_2$ diperoleh $\frac{\partial f_1}{\partial x} = \alpha\left(1 - 0 + \mu \cdot \frac{K_2}{K_2}\right) = \alpha(1+\mu)$, $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \alpha\mu \frac{x_0}{K_2} = 0, \frac{\partial f_2}{\partial x} = \beta\delta \frac{y_0}{K_1} = \beta\delta \frac{K_2}{K_1}$, dan $\frac{\partial f_2}{\partial y} = \beta\left(1 + \delta \frac{x_0}{K_1} - 2\frac{y_0}{K_2}\right) = \beta(1-2) = -\beta$. Sehingga : $J_f(0, K_2) = \left(\alpha(1+\mu) \ 0 \ \beta\delta \frac{K_2}{K_1} \ -\beta\right)$. Polinom karakteristik diperoleh: $det(J - \lambda I) = (\alpha(1+\mu) - \lambda)(-\beta - \lambda) - 0 \cdot (\cdots)$, Karena matriks berbentuk triangular bawah (elemen kanan atas $= 0$), *eigen* adalah diagonal *entries* adalah sebagai berikut: $\lambda_1 = \alpha(1+\mu), \lambda_2 = -\beta$. Satu *eigen value* positif (karena $\alpha(1+\mu) > 0$) dan satu negatif $(-\beta < 0)$ → *unstable saddle*.
- Titik $P_3 = (K_1, 0)$, Substitusi $x_0 = K_1, y_0 = 0$ diperoleh $\frac{\partial f_1}{\partial x} = \alpha\left(1 - 2\frac{K_1}{K_1} + \mu \cdot 0\right) = \alpha(1-2) = -\alpha$, $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \alpha\mu \frac{x_0}{K_2} = \alpha\mu \frac{K_1}{K_2}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x} = \beta\delta \frac{y_0}{K_1} = 0$, dan $\frac{\partial f_2}{\partial y} = \beta\left(1 + \delta \frac{x_0}{K_1} - 2\frac{y_0}{K_2}\right) = \beta(1+\delta)$ jadi $J_f(K_1, 0) = \left(-\alpha \ \alpha\mu \frac{K_1}{K_2} \ 0 \ \beta(1+\delta)\right)$. Kembali karena elemen kiri bawah $= 0$ (bentuk triangular atas), eigen value sama dengan entri diagonal: $\lambda_1 = -\alpha, \lambda_2 = \beta(1+\delta)$, Satu negatif dan satu positif → saddle (unstable saddle)
- Titik interior $P_4 = \left(\frac{K_1(1+\mu)}{1-\mu\delta}, \frac{K_2(1+\delta)}{1-\mu\delta}\right)$, ini menjadi titik di mana kedua spesies *coexist*. Kita harus substitusi x_0, y_0 tersebut ke Matriks Jacobian dan hitung nilai *trace* serta determinan untuk mendapatkan nilai *eigen value*.

(a) Substitusi - hitung entri Jacobian di P_4 dengan menggunakan $x_0 = \frac{K_1(1+\mu)}{1-\mu\delta}$ dan $y_0 = \frac{K_2(1+\delta)}{1-\mu\delta}$ dengan memasukkan ke entri-entri:

- *Upper-left*:
$$\frac{\partial f_1}{\partial x}|_{P_4} = \alpha\left(1 - 2\frac{x_0}{K_1} + \frac{\mu y_0}{K_2}\right) = \alpha\left(1 - 2\frac{1+\mu}{1-\mu\delta} + \mu\frac{1+\delta}{1-\mu\delta}\right) = \alpha\frac{(1-\mu\delta) - 2(1+\mu) + \mu(1+\delta)}{1-\mu\delta}$$
Selanjutnya pembilang disederhanakan untuk mempermudah perhitungan: $(1-\mu\delta) - 2 - 2\mu + \mu + \mu\delta = (1-2) + (-2\mu+\mu) + (-\mu\delta+\mu\delta) = -1-\mu$, sehingga diperoleh: $\frac{\partial f_1}{\partial x}|_{P_4} = \alpha\frac{-1-\mu}{1-\mu\delta} = -\frac{\alpha(1+\mu)}{1-\mu\delta}$
- *Upper-right:*
$$\frac{\partial f_1}{\partial y}|_{P_4} = \alpha\mu\frac{x_0}{K_2} = \alpha\mu\frac{K_1(1+\mu)}{(1-\mu\delta)K_2} = \frac{\alpha\mu K_1(1+\mu)}{(1-\mu\delta)K_2}$$
- *Lower-left*:
$$\frac{\partial f_2}{\partial x}|_{P_4} = \beta\delta\frac{y_0}{K_1} = \beta\delta\frac{K_2(1+\delta)}{(1-\mu\delta)K_1} = \frac{\beta\delta K_2(1+\delta)}{(1-\mu\delta)K_1}$$
- *Lower-right*:
$\frac{\partial f_2}{\partial y}|_{P_4} = \beta\left(1 + \delta\frac{x_0}{K_1} - 2\frac{y_0}{K_2}\right) = \beta\left(1 + \delta\frac{1+\mu}{1-\mu\delta} - 2\frac{1+\delta}{1-\mu\delta}\right) = \beta\frac{(1-\mu\delta)+\delta(1+\mu)-2(1+\delta)}{1-\mu\delta}$, Selanjutnya pembilang disederhanakan untuk mempermudah perhitungan: $(1-\mu\delta) + \delta + \mu\delta - 2 - 2\delta = (1-2) + (\delta - 2\delta) + (-\mu\delta+\mu\delta) = -1-\delta$, Sehingga diperoleh:
$$J_f(P_4) = \frac{1}{1-\mu\delta}\left(-\alpha(1+\mu)\ \alpha\mu\frac{K_1(1+\mu)}{K_2}\ \beta\delta\frac{K_2(1+\delta)}{K_1} - \beta(1+\delta)\right)$$

(b) Trace dan determinan di P_4, *Trace* (jumlah diagonal):
$$trJ_f(P_4) = -\frac{\alpha(1+\mu)}{1-\mu\delta} + -\frac{\beta(1+\delta)}{1-\mu\delta} = -\frac{\alpha(1+\mu)+\beta(1+\delta)}{1-\mu\delta}$$
Determinan:
$$detJ_f(P_4) = \frac{1}{(1-\mu\delta)^2}\left((-\alpha(1+\mu)(-\beta(1+\delta)) - \left(\alpha\mu\frac{K_1(1+\mu)}{K_2}\right)\left(\beta\delta\frac{K_2(1+\delta)}{K_1}\right)\right) = \frac{\alpha\beta(1+\mu)(1+\delta)}{1-\mu\delta} \quad (4)$$

(c) *Eigen values* di P_4, *Eigen values* adalah akar kuadrat dari persamaan karakteristik: $\lambda_{1,2} = \frac{trJ_f(P_4) \pm \sqrt{\left(trJ_f(P_4)\right)^2 - 4detJ_f(P_4)}}{2}$ Dengan substitusi *trace* dan determinan di atas, maka akan didapatkan: $\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{\alpha(1+\mu)+\beta(1+\delta)}{1-\mu\delta} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha(1+\mu)+\beta(1+\delta)}{1-\mu\delta}\right)^2 - 4\frac{\alpha\beta(1+\mu)(1+\delta)}{1-\mu\delta}}}{2}$. Untuk analisis tanda (stabilitas) cukup perhatikan *trace* dan determinan: Jika $1-\mu\delta > 0$ (yakni $\mu\delta < 1$), maka denominator positif; Trace $trJ_f(P_4) = -\frac{\alpha(1+\mu)+\beta(1+\delta)}{1-\mu\delta} \Rightarrow$ negatif (karena pembilang positif dan tanda minus di depan);dan determinan $detJ_f(P_4) = \frac{\alpha\beta(1+\mu)(1+\delta)}{1-\mu\delta} > 0$ bila $\mu\delta < 1$. Karena *trace* < 0 dan determinan > 0, kedua eigen values ini memiliki *real part* negatif (baik *real* atau kompleks konjugat) $\rightarrow P_4$ stabil. Riset ini menyatakan kondisi stabilitas P_4 adalah $\mu\delta < 1$.

Analisis Bifurkasi *Hopf*

Analisis *bifurkasi hopf* dipakai karena dapat mendeteksi apakah kerja sama/kompetisi dua perusahaan akan tetap stabil atau berubah menjadi tidak stabil. Analisis ini digunakan untuk melihat apakah ada titik di mana kondisi ekuilibrium bisa berubah dari stabil ke tidak stabil. Secara umum, syarat terjadinya bifurkasi Hopf adalah sebagai $tr(Jf(P_4)) = 0$, $det(Jf(P_4)) > 0$ Dengan Hasil di P_4:
$$tr\left(J_f(P_4)\right) = \frac{-\alpha(1+\mu) - \beta(1+\delta)}{1-\mu\delta}, det\left(J_f(P_4)\right) = \frac{\alpha\beta(1+\mu)(1+\delta)}{1-\mu\delta}$$
Periksa syarat *hopf* dengan *trace* dititik *equilibrium* P_4 Syarat $tr(Jf(P_4)) = 0, tr\left(J_f(P_4)\right) = \frac{-\alpha(1+\mu)-\beta(1+\delta)}{1-\mu\delta}$ Karena $1-\mu\delta \neq 0$ (agar titik P_4 ada), maka syarat *trace* $= 0$ hanya bisa terjadi jika pembilangnya $= 0$ diperoleh $-\alpha(1+\mu) - \beta(1+\delta) = 0$, Maka didapat nilai kritis parameter $\alpha_0, \beta_0, \mu_0, \delta_0$

- Menentukan α_0 dengan persamaan $-\alpha(1+\mu) - \beta(1+\delta) = 0$ akan diperoleh $\alpha(1+\mu) + \beta(1+\delta) = 0$ sehingga $\alpha_0 = -\frac{\beta(1+\delta)}{1+\mu}$. Kemudian dengan subsitusikan dengan determinan yang terdapat pada persamaan (4) menghasilkan:

$det\ det\ \alpha_0 = \frac{\alpha_0\beta(1+\mu)(1+\delta)}{1-\mu\delta} = \frac{\left(-\frac{\beta(1+\delta)}{1+\mu}\right)\beta(1+\mu)(1+\delta)}{1-\mu\delta} = -\frac{\beta^2(1+\delta)^2}{1-\mu\delta}$

- Menentukan β_0 dengan persamaan $-\alpha(1+\mu)-\beta(1+\delta)=0$ akan diperoleh $\beta(1+\delta)=-\alpha(1+\mu)$, sehingga $\beta_0 = -\frac{\alpha(1+\mu)}{1+\delta}$. Subsitusikan dengan determinan yang terdapat pada persamaan (4) menghasilkan $det\left(J_f(P_4)\right) = \frac{\alpha\beta(1+\mu)(1+\delta)}{1-\mu\delta}$ dan $det\ \det\beta_0 = \frac{\alpha\beta_0(1+\mu)(1+\delta)}{1-\mu\delta} = det\ \det\beta_0 = -\frac{\alpha^2(1+\mu)^2}{1-\mu\delta}$
- Menentukan μ_0 dengan persmaaan $-\alpha(1+\mu)-\beta(1+\delta)=0$, akan diperoleh $\alpha\mu = -\alpha-\beta(1+\delta)$, sehingga $\mu_0 = -1-\frac{\beta(1+\delta)}{\alpha}$. Subsitusikan dengan determinan yang terdapat pada persamaan (4) menghasilkan $det\ \det\mu_0 = -\frac{\alpha\beta^2(1+\delta)}{\alpha+\beta\delta}$.
- Menentukan δ_0 dengan persamaan $-\alpha(1+\mu)-\beta(1+\delta)=0$ akan diperoleh $\alpha\mu = -\alpha-\beta(1+\delta)$, sehingga $\delta_0 = -1-\frac{\alpha(1+\mu)}{\beta}$. Subsitusikan dengan determinan yang terdapat pada persamaan (4) menghasilkan persamaan $det\ det\ \delta_0 = -\frac{\alpha^2\beta(1+\mu)}{\beta+\alpha\mu}$. Berdasarkan tabel 1 diperoleh bahwa $det\ det\ (J) > 0$. Maka syarat *Bifurkasi Hopf* tidak terpenuhi

Tabel 1. Bifurkasi *Hoph* apa titik ekuilibrium P_4

Equilibrium Point	Parameters	$\det(Jf(P_4))$
$P_4\left(\frac{K_1(1+\mu)}{1-\mu\delta}, \frac{K_2(1+\delta)}{1-\mu\delta}\right)$	$\alpha_0 = -\frac{\beta(1+\delta)}{1+\mu}$	$-\frac{\beta^2(1+\delta)^2}{1-\mu\delta}$
	$\beta_0 = -\frac{\alpha(1+\mu)}{1+\delta}$	$-\frac{\alpha^2(1+\mu)^2}{1-\mu\delta}$
	$\mu_0 = -\frac{\beta(1+\delta)}{\alpha} - 1$	$-\frac{\alpha\beta^2(1+\delta)}{\alpha+\beta\delta}$
	$\delta_0 = -\frac{\alpha(1+\mu)}{\beta} - 1$	$-\frac{\alpha^2\beta(1+\mu)}{\beta+\alpha\mu}$

.

Analisis Bifurkasi Transkritikal

Berdasarkan analisis bifurkasi *Hopf* yang telah dilakukan sebelumnya, diperoleh hasil bahwa tidak terjadi bifurkasi karena syarat bifurkasi *Hopf* tidak terpenuhi. Kondisi ini menunjukkan bahwa sistem tidak mengalami perubahan kestabilan yang menghasilkan osilasi periodik pada parameter yang diuji. Selanjutnya, dilakukan analisis bifurkasi transkritikal untuk meninjau kemungkinan adanya jenis bifurkasi lain pada model yang sama. Analisis ini bertujuan untuk mengetahui bagaimana perubahan parameter interaksi antarspesies dapat menyebabkan dua titik kesetimbangan bertemu dan saling bertukar kestabilan. Pendekatan ini memberikan sudut pandang berbeda terhadap dinamika sistem Kooperatif dan membantu memahami kondisi kritis yang memengaruhi kestabilan sistem.

Secara umum, bifurkasi transkritikal terjadi ketika suatu parameter sistem dalam model ini dilambangkan dengan μ melintasi nilai kritis tertentu, sehingga kestabilan berpindah dari satu titik kesetimbangan ke titik lainnya. Dengan menganalisis perubahan tersebut, dapat diketahui bagaimana struktur kestabilan sistem Lotka–Volterra Kooperatif berubah terhadap variasi parameter, sekaligus memperluas pemahaman terhadap perilaku dinamis model secara keseluruhan. Model Lotka–Volterra Kooperatif yang digunakan dinyatakan kembali pada (1) dan (2). Bifurkasi transkritikal terjadi ketika dua titik keseimbangan bertemu pada nilai parameter tertentu dan bertukar kestabilan setelah nilai parameter tersebut dilampaui.

Titik keseimbangan sistem diperoleh dari syarat $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$ diiperoleh $\alpha x\left(1 - \frac{x}{K_1} + \frac{\mu y}{K2}\right) = 0$, $\beta y\left(1 - \frac{y}{K_2} + \frac{\delta x}{K_1}\right) = 0$. Dari sini diperoleh dua titik keseimbangan yang relevan untuk analisis bifurkasi: $P_2 = (0, K_2)$ dan $P_4 = \left(\frac{K_1(1+\mu)}{1-\mu\delta}, \frac{K_2(1+\delta)}{1-\mu\delta}\right)$. Keduanya bergantung pada parameter μ. Ketika $\mu = -1$, titik P_4 menjadi $x_4 = \frac{K_1(1+\mu)}{1-\mu\delta} = 0$, $y_4 = \frac{K_2(1+\delta)}{1-\mu\delta} = K_2$, sehingga P_4 berimpit dengan P_2 di $\mu = -1$. Hal ini merupakan tanda utama terjadinya bifurkasi transkritikal: dua cabang titik keseimbangan bertemu di satu titik. Kestabilan titik-titik keseimbangan ditentukan menggunakan nilai eigen dari matriks Jacobian sistem:

$$Jf(x,y) = \left[\left[\alpha\left(1 - \frac{2x}{K1} + \frac{\mu y}{K2}\right), \frac{\alpha\mu x}{K2}\right], \left[\frac{\beta\delta y}{K1}, \beta\left(1 + \frac{\delta x}{K1} - \frac{2y}{K2}\right)\right]\right]$$

Untuk titik $P_2(0, K_2)$, dengan $\lambda_1 = \alpha(1 + \mu)$, $\lambda_2 = -\beta$. Sehingga P_2 stabil jika $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 < 0$, yaitu saat $\mu < -1$. Untuk titik P_4, tanda dari *trace* dan determinan matriks Jacobian untuk menentukan kestabilan. Diketahui bahwa ketika $\mu\delta < 1$, titik P_4 stabil jika $\mu > -1$ dan menjadi tidak stabil jika $\mu < -1$. Dari hasil ini terlihat bahwa ketika μ melewati nilai -1, kestabilan berpindah dari titik P_2 ke P_4; (1) untuk $\mu < -1 \rightarrow P_2$ stabil, P_4 tidak stabil; dan (2) untuk $\mu > -1 \rightarrow P_2$ tidak stabil, P_4 stabil.

Fenomena ini adalah ciri khas dari bifurkasi transkritikal, di mana kedua titik keseimbangan saling bertukar kestabilan. Untuk membuktikan bahwa bifurkasi yang terjadi benar-benar transkritikal, diperiksa kondisi; (1) salah satu *eigen value* bernilai nol di titik kritis $(\mu = -1) : \lambda_1 = \alpha(1 + \mu) = 0$; (2) turunan *eigen value* terhadap parameter tidak nol : $\frac{d\lambda 1}{d\mu} = \alpha \neq 0$ (syarat t*ransversality*); dan (3) terdapat dua cabang keseimbangan yang berpotongan di $\mu = -1$. Ketiga kondisi ini terpenuhi, sehingga dapat disimpulkan bahwa sistem mengalami bifurkasi transkritikal. Secara ekonomi, μ menggambarkan tingkat kerja sama antara dua produk atau perusahaan. Ketika $\mu < -1$, hubungan kerja sama belum efektif dan hanya satu produk yang mendominasi pasar (P_2 stabil). Namun saat μ meningkat melewati -1, pengaruh kooperatif meningkat sehingga kedua perusahaan dapat tumbuh bersama dalam kondisi koeksistensi yang stabil (P_4 stabil). Perubahan ini mencerminkan transisi struktural dari dominasi tunggal menuju keseimbangan bersama yang berkelanjutan.

Analisis menunjukkan bahwa model Lotka–Volterra Kooperatif mengalami bifurkasi transkritikal terhadap parameter μ. Pada $\mu = -1$, dua titik keseimbangan P_2 dan P_4 bertemu dan saling bertukar kestabilan. Sebelum titik kritis, hanya satu entitas yang stabil, sedangkan setelah melewati nilai kritis, terbentuk kondisi keseimbangan baru yang melibatkan keduanya. Hal ini menegaskan bahwa perubahan kecil pada tingkat kerja sama dapat menghasilkan perubahan besar pada keseimbangan sistem secara keseluruhan.

KESIMPULAN

Penelitian ini menganalisis model Lotka–Volterra Kooperatif yang merepresentasikan hubungan antara dua industri otomotif di Indonesia, yaitu Toyota dan Daihatsu, melalui produk Calya dan Sigra. Berdasarkan hasil analisis bifurkasi *Hopf*, diketahui bahwa syarat-syarat terjadinya bifurkasi tidak terpenuhi sehingga sistem tidak menunjukkan perubahan kestabilan yang menghasilkan osilasi periodik. Namun, melalui analisis bifurkasi transkritikal, diperoleh bahwa sistem mengalami perubahan kestabilan ketika parameter kerja sama (μ) melewati nilai kritis tertentu, di mana dua titik keseimbangan bertemu dan saling bertukar kestabilan. Sebelum melewati nilai kritis, hanya satu entitas yang stabil dan mendominasi pasar, sedangkan setelah nilai kritis tercapai, sistem beralih menuju kondisi koeksistensi stabil yang menggambarkan kolaborasi seimbang antara kedua industri. Secara ekonomi, hasil ini menunjukkan bahwa peningkatan intensitas kerja sama antarperusahaan mampu mentransformasi struktur pasar dari dominasi tunggal menjadi keseimbangan kooperatif yang lebih stabil dan berkelanjutan.

UCAPAN TERIMA KASIH

Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas rahmat dan karunia-Nya sehingga laporan proyek berjudul *"Dynamical and Stability Analysis of the Cooperative Lotka–Volterra Model in the Case of Two Automotive Industries in Indonesia"* dapat diselesaikan dengan baik dan tepat waktu. Penulis menyampaikan terima kasih kepada Ibu Dr. Hamidah Nasution, M.Si. dan Ibu Alvi Sahrin Nasution, M.Si. selaku dosen pengampu mata kuliah Pengantar Sistem Dinamik, atas bimbingan, arahan, serta ilmu yang telah diberikan selama proses penyusunan artikel ini. Ucapan terima kasih juga penulis sampaikan kepada seluruh pihak yang telah memberikan dukungan, baik secara langsung maupun tidak langsung, serta kepada keluarga dan rekan satu tim atas kerja sama dan dedikasinya. Penulis menyadari bahwa laporan ini masih memiliki kekurangan, oleh karena itu kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan demi penyempurnaan di masa mendatang.

DAFTAR PUSTAKA

Amalia, D., & Savitri, D. (2023). Analisis Dinamik Model Predator-Prey Dengan Fungsi Respon Monod Haldane. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika, 11*(2), 287–294. https://doi.org/10.26740/mathunesa.v11n2.p287-294

Dewi, M. K., Savitri, D., & Abadi, A. (2024). Dynamical Behavior in the Competitive Model Incorporating the Fear Effect of Prey Due to Allelopathy with Shared Biotic Resources. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan, 18*(4), 2663–2674. https://doi.org/10.30598/barekengvol18iss4pp2663-2674

Fardinah, H., Abubakar, R., Qadrini, L., Haris, & Salsabilah, N. (2025). Dynamic Analysis of Predator–Prey Model with Cannibalism Intervention and Disease Infection in Prey Using Holling Type II Response Function. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan, 19*(3), 1945–1956. https://doi.org/10.30598/barekengvol19iss3pp1945-1956

Fritscilia, Y., & Rifai, M. (2025). IJEPA dan Transformasi Industri Otomotif Indonesia. *Jurnal Ilmiah Wahana Pendidikan, 11*, 243–254.

M, T. Y., & Baqi, A. I. (2018). Analisis Kestabilan Model Lotka–Volterra. *Jurnal Matematika UNAND, 7*(4), 76–80. https://doi.org/10.25077/jmu.7.4.76-80.2018

Monica, R., Deswita, L., & Pane, R. (2014). Kestabilan Populasi Model Lotka–Volterra Tiga Spesies dengan Titik Kesetimbangan. *JOM FMIPA, 1*(2), 133–141.

Panigoro, H. S., & Savitri, D. (2020). Bifurkasi Hopf pada Model Lotka–Volterra Orde-Fraksional dengan Efek Allee Aditif pada Predator. *Jambura Journal of Biomathematics (JJBM), 1*(1), 16–24. https://doi.org/10.34312/jjbm.v1i1.6908

Puspita, A. S. H., Sutrima, S., Setiyowati, R., & Wibowo, S. (2024). Stability Analysis of Cellular Operating System Market Share in Indonesia with the Competitive Lotka–Volterra Model. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan, 18*(1), 333–340. https://doi.org/10.30598/barekengvol18iss1pp0333-0340

Rachmawati, Z. F., Sutrima, S., Setiyowati, R., & Kurniawan, V. Y. (2024). Analysis of the Cooperative Lotka–Volterra Model in the Case of Two Automotive Industries in Indonesia. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan, 18*(1), 295–302. https://doi.org/10.30598/barekengvol18iss1pp0295-0302

Resmawan, R., Suryanto, A., Darti, I., & Panigoro, H. S. (2025). Dynamics of a Prey–Predator Model with Allee Effects and Holling Type IV Functional Response: Local Stability and Numerical Exploration of Bifurcations. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan, 19*(4), 2891–2906. https://doi.org/10.30598/barekengvol19iss4pp2891-2906

Saputra, H. L., Sutimin, & Sutrisno. (2020). Analisis Kestabilan Model Penyebaran Penyakit Tuberkulosis dengan Laju Infeksi Tersaturasi. *Jurnal Matematika Thales, 2*(1), 11–22.

Tsakila, N. Q., Hardhiansyah, M. F., Faluvi, S. D., & Anshori, M. I. (2025). Kepemimpinan Kreatif dalam Menciptakan Disrupsi Pasar: Bagaimana Pemimpin Mendobrak Pasar dengan Model Bisnis Baru. *Jurnal Rimba: Riset Ilmu Manajemen Bisnis dan Akuntansi, 3*(2), 171–191. https://doi.org/10.61132/rimba.v3i2.1753

Wang, S. Y., Chen, W. M., & Wu, X. L. (2021). Competition Analysis on Industry Populations Based on a Three-Dimensional Lotka–Volterra Model. *Discrete Dynamics in Nature and Society, 2021*, Article 9935127. https://doi.org/10.1155/2021/9935127

Windarto, W., & Eridani, E. (2020). On Modification and Application of Lotka–Volterra Competition Model. *AIP Conference Proceedings, 2268*(1), 050019. https://doi.org/10.1063/5.0017242