Markov Chain K-Means Cluster Model Dalam Dinamika Transisi Tingkat Kemiskinan Berdasarkan Indeks Kedalaman dan Keparahan Kemiskinan di Provinsi Sumatera Utara

Desto Wardana Siregar[1*], Pardomuan Sitompul[2]
[1,2] Matematika, Universitas Negeri Medan, Kota Medan, 20221, Indonesia
*Corresponding Author: wardanadesto@gmail.com

Abstrak

Kemiskinan merupakan masalah multidimensi yang kompleks dan memerlukan pendekatan analitis untuk memahami dinamikanya.Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis dinamika transisi tingkat kemiskinan di Provinsi Sumatera Utara yang diukur berdasarkan Indeks Kedalaman Kemiskinan (Poverty Gap Index-P_1) dan Indeks Keparahan Kemiskinan (Poverty Severity Index-P_2) menggunakan Markov Chain K-Means Cluster Model. Data yang digunakan adalah data sekunder dari Badan Pusat Statistik Sumatera Utara tahun 2023-2024. Penelitian ini diuraikan ke dalam dua bagian utama yakni K-Means Clustering untuk segmentasi kabupaten/kota berdasarkan tingkat kemiskinan, dan analisis Markov Chain untuk memodelkan transisi antar cluster kemiskinan. Hasil klasterisasi menunjukkan bahwa data terbagi menjadi tiga cluster optimal: Cluster 1 dengan centroid (0,02251, 0,00561) pada tahun 2023 dan (0,01885, 0,0037) pada tahun 2024, Cluster 2 dengan centroid (0,01384, 0,003263) pada tahun 2023 dan (0,01225, 0,00275) pada tahun 2024, dan Cluster 3 dengan centroid (0,00833, 0,001593) pada tahun 2023 dan (0,007778, 0,001328) pada tahun 2024. Analisis Markov Chain menghasilkan matriks peluang transisi yang memenuhi sifat ergodic (irreducible, aperiodic dan positive recurrent) dengan kondisi steady state dicapai pada periode ke-18 dimana dalam model ini ditemukan bahwa pada tahun 2041, Provinsi Sumatera Utara diproyeksikan sepenuhnya terbebas dari cluster kemiskinan tinggi (ekstrem) dengan probabilitas sebesar 76,69%.
Kata kunci: Clustering, Ergodic, Kemiskinan, Markov Chain, Steady state.

Abstract

Poverty is a complex multidimensional problem that requires an analytical approach to understand its dynamics. This study aims to analyze the transition dynam ics of poverty level clusters in North Sumatra Province, measured by the Poverty Gap Index (P_1) and the Poverty Severity Index (P_2), using the Markov Chain K Means Cluster Model. The data used are secondary data from the North Suma tra Central Bureau of Statistics for the years 2023–2024. The study is divided into two main parts: K-Means Clustering for the segmentation of regencies/cities based on poverty levels, and Markov Chain analysis to model transitions between poverty clusters. The clustering results show that the data is optimally divided into three clusters: Cluster 1 with centroids (0.02251,0.00561) in 2023 and (0.01885,0.0037) in 2024; Cluster 2 with centroids (0.01384,0.003263) in 2023 and (0.01225,0.00275) in 2024; and Cluster 3 with centroids (0.00833,0.001593) in 2023 and (0.007778,0.001328) in 2024. The Markov Chain analysis generates a transition probability matrix satisfying ergodic properties (irreducible, aperiodic, and recurrent), achieving steady-state conditions at the 18th period. The model projects that by 2041, North Sumatra Province has a 76.69% probability of complete transition out of the high-extreme poverty cluster.
Keywords: Clustering, Ergodic, Markov Chain, Poverty, Steady state.

Citation: Siregar, D. W. & Sitompul, P. (2025). Markov Chain K-Means Cluster Model Dalam Dinamika Transisi Tingkat Kemiskinan Berdasarkan Indeks Kedalaman dan Keparahan Kemiskinan di Provinsi Sumatera Utara. *Prodising Seminar Nasional Jurusan Matematika 2025*. 750 – 761.

PENDAHULUAN

Kemiskinan merupakan permasalahan sosial yang kompleks dan multidimensi yang dihadapi oleh hampir seluruh negara di dunia, termasuk Indonesia (Amelia et al., 2025). Kemiskinan adalah keadaan dimana seseorang atau sekelompok orang, baik laki-laki maupun perempuan, tidak mampu memenuhi hak-hak dasar mereka seperti pangan, pendidikan, kesehatan, perumahan, air bersih, transportasi dan sanitasi (Badan Pusat Statistik, 2024a). Berdasarkan cara pengukurannya, jenis kemiskinan yang sering digunakan di Indonesia bahkan oleh lembaga pemerintahan seperti Badan Pusat Statistik karna bersifat universal adalah kemiskinan absolut (Adon & Jeraman, 2023), dimana penduduk miskin didefinisikan sebagai penduduk dengan rata-rata pengeluaran per kapita per bulan di bawah garis kemiskinan. Garis kemiskinan atau batas kemiskinan adalah tingkat minimum pendapatan yang dianggap perlu dipenuhi untuk memperoleh standar hidup yang mencukupi di suatu wilayah dengan Garis Kemiskinan (GK) dihitung dengan menjumlahkan dari Garis Kemiskinan Makanan (GKM) dan Garis Kemiskinan Non Makanan (GKNM) (Aprilia & Sembiring, 2021).

Kemiskinan ekstrem secara global dan nasional mengalami tren penurunan, namun kendati demikian menurut data Pensasaran Percepatan Penghapusan Kemiskinan Ekstrem (P3KE), estimasi penduduk yang mengalami kemiskinan ekstrem pada tahun 2024 di Provinsi Sumatera Utara mengalami peningkatan 0,02% (Noor Achmad et al., 2024).

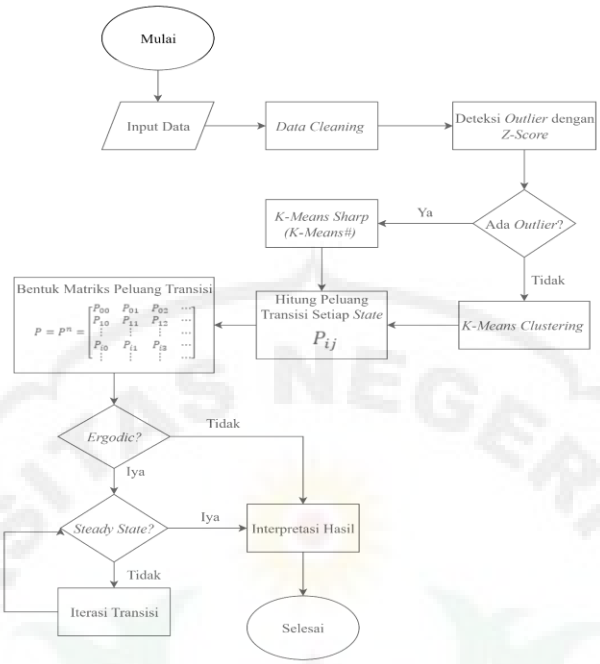
Berdasarkan fakta bahwa kemiskinan ekstrem adalah titik terendah dalam spektrum kemiskinan maka diperlukan upaya penanganan yang serius dan berkelanjutan agar masalah ini cepat teratasi dan Sumatera Utara segera terbebas dari kemiskinan ekstrem serta dapat bertransisi ke tingkat kemiskinan yang lebih rendah. Dengan mempertimbangkan adanya kenaikan kemiskinan ekstrem ini, maka penting untuk menganalisis apakah Provinsi Sumatera Utara berpotensi untuk bertransisi ke tingkat kemiskinan yang lebih buruk lagi dan bagaimana tingkat kemiskinan ini akan diproyeksikan untuk tahun-tahun berikutnya. Penelitian semacam ini belum banyak dilakukan, terlebih apabila ditinjau berdasarkan dimensi kedalaman dan keparahan kemiskinan suatu wilayah untuk bisa bertransisi melalui analisis dengan pendekatan model matematis.

Dalam kemiskinan absolut, tingkat kemiskinan dapat diukur dengan menggunakan Indeks Kedalaman Kemiskinan *(Poverty Gap Indeks* - P_1*)* dan Indeks Keparahan Kemiskinan *(Poverty Severity Index* - P_2*)* yang dikembangkan oleh Foster-Greer-Thorbecke pada tahun 1984 (World Bank, 2005). Indeks Kedalaman Kemiskinan menjelaskan seberapa jauh jarak rata-rata pengeluaran penduduk dibandingkan garis kemiskinan sedangkan Indeks Keparahan Kemiskinan menjelaskan seberapa besar ketimpangan atau ketidakmerataan sebaran pengeluaran diantara penduduk miskin. Diartikan (Tan & Syafri, 2024) sebagaimana dikutip dari (World Bank, 2005), semakin tinggi nilai dari indeks-indeks ini, maka semakin sulit pula untuk suatu wilayah bisa keluar dari kemiskinan. Berdasarkan data September 2024, Indeks Kedalaman Kemiskinan Provinsi Sumatera Utara mencapai angka 1,23%, lebih rendah dibandingkan Indeks Kedalaman Kemiskinan nasional yang berada pada angka 1,364%, namun ironinya terdapat 12 kabupaten/kota yang berada di bawah rata-rata P_1 provinsi, dengan kemiskinan terdalam terjadi di Nias Utara yang bernilai 10 kali lipat lebih besar dari minimum kedalaman kemiskinan kabupaten/kota di Sumatera Utara. Sedangkan Indeks Keparahan Kemiskinan Sumatera Utara berada pada angka 0,30%, ini juga lebih rendah dari Indeks Keparahan Kemiskinan nasional yang berada pada angka 0,322% namun terdapat pula 7 kabupaten/kota yang berada dibawah rata-rata provinsi, dengan nilai maksimum keparahan kemiskinan juga terjadi di Nias Utara, yang bernilai 16 kali lipat lebih besar dari nilai minimumnnya (Badan Pusat Statistik, 2024b). Artinya dari data tersebut diketahui sebaran kemiskinan tidak merata di Provinsi Sumatera Utara, maka perlu dilakukan segmentasi pada kabupaten/kota yang ada di Sumatera Utara supaya dapat diketahui daerah mana yang paling rentan dan pola sebarannya untuk tiap-tiap tingkat kemiskinan. Karena data yang digunakan tidak berlabel maka pengklasteran yang sesuai dan paling efisien secara komputasi adalah *K-Means Clustering.*

K-Means Clustering merupakan jenis metode *clustering* tanpa adanya label *(Unsupervised learning)* yang melakukan pengelompokan data untuk mendapatkan karasteristik yang sama dengan sistem partisi berbasis jarak rata-rata data ke *centroid* (Huang et al., 2024). Secara persis penelitian dengan menggunakan dimensi kedalamanan dan keparahan sebagai fitur penjelas kemiskinan di Provinsi Sumatera Utara belum dilakukan, maka *clustering* ini masih relevan untuk dilakukan. Hasil klasterisasi ini nantinya dapat dipergunakan untuk menggambarkan pola sebaran kemiskinan, serta dapat juga dipergunakan untuk memproyeksikan transisi tingkat kemiskinan dengan menganalisisnya lebih lanjut menggunakan Rantai Markov *(Markov Chain).* Rantai Markov *(Markov Chain)* merupakan proses stokastik dimana keadaan masa depan dapat diprediksi dengan menggunakan data keadaan masa sekarang (Lestari & Jasuni, 2023). Transisi tingkat kemiskinan ini mengikuti proses stokastik, artinya nilai peluangnya berubah-ubah seiring waktu dalam suatu ketidakpastian, maka perubahan tingkat kemiskinan ini hanya dapat dijelaskan berdasarkan struktur peluang. Hal tersebutlah yang tepatnya dapat dilakukan oleh Rantai Markov dan dikarenakan transisi ini bergerak dalam langkah waktu diskrit maka jenis Rantai Markov yang digunakan adalah DTMC *(Discrete Time Markov Chain).* Penelitian ini akan diuraikan kedalam dua bagian besar yakni *clustering* atau segmentasi tingkat kemiskinan dan analisis perubahan probabilitas dalam sistem yang dinamis.

METODE PENELITIAN

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yang bersumber dari *website* Badan Pusat Statistik Sumatera Utara yang mencakup data Indeks Kedalaman Kemiskinan (*Poverty Gap Indeks* - P_1) dan Indeks Keparahan Kemiskinan (*Poverty Severity Index* - P_2) kabupaten/kota di Provinsi Sumatera Utara tahun 2023-2024. Tahapan analisis dalam penelitian ini dilakukan secara sistematis dengan urutan prosedur penelitian seperti gambar 1.



Gambar 1. Diagram Alir Analisis Data

HASIL DAN PEMBAHASAN

Data menunjukkan adanya perubahan sebaran kedalaman kemiskinan di Provinsi Sumatera Utara pada transisi tahun 2023-2024, terjadi peningkatan kedalaman kemiskinan pada 12 wilayah kabupaten/kota dan penurunan pada 21 kabupaten/kota lainnya. Peningkatan kedalaman kemiskinan paling signifikan terjadi di Kabupaten Nias Utara dengan kenaikan sebesar 0,0182, sementara penurunan paling signifikan terjadi di Kabupaten Langkat dengan penurunan nilai sebesar 0,0104. Sama halnya dengan P_1, Indeks Keparahan Kemiskinan (*Poverty Severity*- P_2) Sumatera Utara berada pada angka 0,30%, juga lebih rendah dari Indeks Keparahan Kemiskinan Nasional yang berada pada angka 0,322% namun terdapat pula 7 kabupaten/kota yang berada dibawah rata-rata provinsi, dengan nilai maksimum keparahan kemiskinan juga terjadi di Nias Utara, yang bernilai 16 kali lipat lebih besar dari nilai minimumnnya yang dicapai oleh Kabupaten Tapanuli Selatan. Secara ringkas informasi umum data disajikan pada tabel statistik deskriptif (tabel 1).

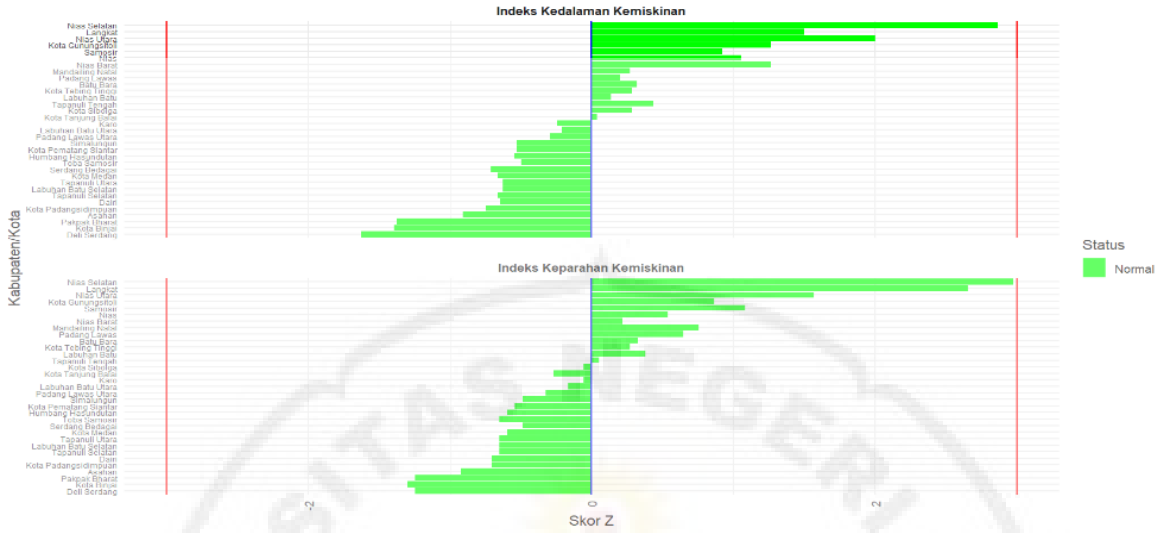
Tabel 1. Statistik Deskriptif

Ukuran Statitik	*Poverty Gap*		*Poverty Severity*	
	2023	2024	2023	2024
Mean	0,013178788	0,01249697	0,00300303	0,002627273
Median	0,0117	0,0111	0,0025	0,0021
Mode	0,0092	0,0111	0,0018	0,0029
Std Deviasi	0,006008419	0,007133481	0,001845854	0,002131354
Count	33	33	33	33

Berdasarkan Tabel 1 dapat diketahui, bahwa secara keseluruhan rata-rata *Poverty Gap* dan *Poverty Severity* di Provinsi Sumatera Utara sama-sama mengalami penurunan. Pada tahun 2023 nilai rata-rata P_1 adalah 0,0131 kemudian menurun sebesar 5,17% menjadi 0,0124 di tahun 2024. Turunnya nilai P_1 ini mengindikasikan adanya kecenderungan peningkatan rata-rata pengeluaran konsumsi penduduk miskin, atau dengan kata lain selisih pengeluaran penduduk miskin terhadap garis kemiskinan semakin berkurang. Nilai rata-rata P_2 Sumatera Utara pada tahun 2023 adalah 0,003 kemudian menurun sebesar 12,51% menjadi 0,0026, artinya ketimpangan pengeluaran konsumsi diantara penduduk miskin semakin berkurang, atau dengan kata lain penyebaran pengeluaran konsumsi semakin baik atau merata.

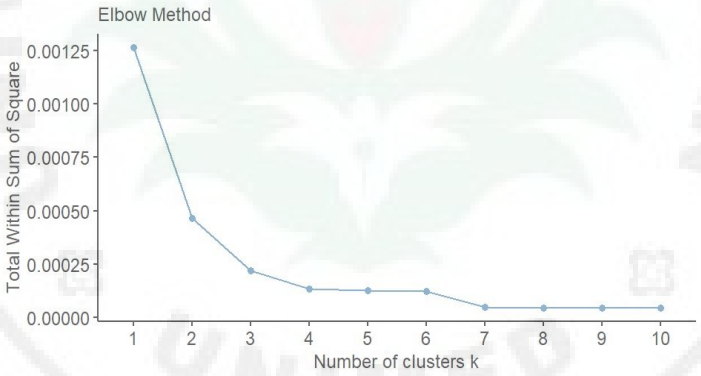
Sebelum melakukan klasterisasi umumnya selalu dilakukan eksplorasi untuk mendeteksi ada tidaknya *outlier* dalam dataset. Pada praktiknya terdapat beberapa metode dalam pendeteksian *outlier,* salah satunya adalah menggunakan *Z-Score*. Dengan menggunakan persamaannya dihitung nilai *Z-Score* setiap unit data dari kedua fitur, yang disajikan pada gambar 2. Berdasarkan Gambar 2 dapat diketahui bahwa pada data tahun 2023 kedua fitur yakni P_1 dan P_2 bersih dari *outlier* dengan nilai *Z-Score* maksimum bernilai positif sebesar 2,86 untuk P_1 dan 2,97 untuk P_2 mendekati batas 3 yang ditetapkan sebagai batas kenormalan. Namun meskipun data ini masih dikatakan bersih dari *outlier* dan layak untuk diklasterkan menggunakan *K-Means Clustering*.

© Jurusan Matematika - Universitas Negeri Medan



Gambar 2. Grafik Sebaran Skor Z Fitur pada Data Tahun 2023

Metode *elbow* (sikut) memilih nilai k atau jumlah *cluster* yang optimal dengan interpretasi melalui grafik WCSS *(Within Cluster Sum of Squares)* dimana nilai k optimal ditunjukkan oleh titik siku dimana penurunan WCSS secara drastis dan mulai melambat secara signifikan setelahnya. (Noviandy et al., 2024). Penentuan nilai k dengan *elbow method* dapat dilihat melalui grafik berikut:



Gambar 3. Grafik *Elbow Method* untuk penentuan Jumlah *Cluster* Optimal Data 2023

Gambar 3 menunjukkan bahwa nilai k optimal adalah 3 karena saat di titik $k = 3$, penurunan inersia masih terjadi secara signifikan dan setelahnya penurunan nilai inersia ini mulai melambat atau mulai melandai, juga merupakan titik yang paling membentuk *elbow* atau sikut. Namun apabila ditinjau kembali pada gambar tersebut, secara visual terdapat tekukan lainnya, yakni pada titik $k = 7$, maka untuk memverifikasi titik paling sikut yang sebenarnya perlu dilakukan perhitungan lanjutan dengan menggunakan Metode *Kneedle (Distance-to-Line).* Pada Gambar 3 , ditunjukan Grafik *Elbow Method* yang memproyeksikan WCSS terhadap berbagai nilai k mulai 1 sampai 10. Dalam Metode *Kneedle (Distance-to-Line),* titik *knee* atau sikut ditunjukkan oleh titik dengan jarak tegak lurus yang paling besar dari garis penghubung di kedua titik ujung k (Satopää et al., 2011), artinya titik sikut ini adalah titik yang mempunyai jarak tegak lurus maksimum dengan garis lurus yang menghubungkan titik $k = 1$ dengan titik $k = 10$. Dengan mengikuti algoritma metode ini dimana setelah melalui tahap penormalan data, garis lurus penghubung ujung titik k akan berada di koordinat $(0,1)$ untuk titik $k = 1$ dan $(1,0)$ untuk titik $k = 10$. Maka persamaan garis tersebut penghubung tersebut adalah

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$y + x - 1 = 0$$

Dan diperoleh persamaan untuk menghitung jarak tegak lurus dari titik k ke garis penghubung dengan persamaan adalah

$$d_k = \frac{|ax_k + by_k + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|x_k + y_k - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})|x_k + y_k - 1|}{2} \quad (1)$$

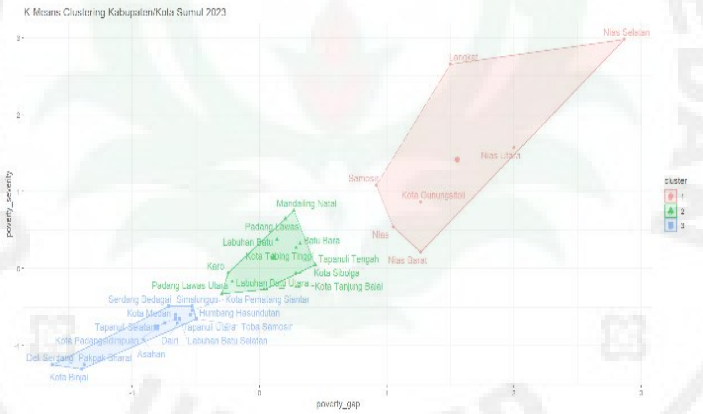
Maka dengan mengikuti algoritma Metode *Kneedle (Distance-to-Line)* diperoleh jarak tegak lurus setiap titik k yang disajikan pada tabel berikut:

Tabel 2. Jarak tegak lurus dengan metode *Kneedle (distance to line)* data2023

K	WCSS	*K Normalized*	*WCSS Normalized*	*Distance to line*
1	0,001264	0,000	1,00	0,00
2	0,000429	0,1111111	0,3325812	0,3933690
3	0,000218	0,2222222	0,1642865	0,4338038
4	0,000133	0,3333333	0,0961215	0,4034364
5	...	...	...	...
10	0,000013	1,000	0,00	0,000

Berdasarkan Tabel 2, jarak tegak lurus yang paling besar dari garis penghubung di kedua titik ujung k adalah di $k = 3$ dengan jarak sebesar 0,433 artinya terbukti bahwa nilai k optimal adalah 3 karena saat di titik k = 3, penurunan inersia masih terjadi secara signifikan dan setelahnya penurunan nilai inersia ini mulai melambat atau mulai melandai, juga merupakan titik yang paling membentuk *elbow* atau sikut. Maka data 2023 ini akan diklasterkan dengan *K-Means Clustering* ke dalam 3 *cluster* yang akan diinisiasi dengan 3 centroid awal juga.

Berdasarkan kaidah *Elbow Method* diatas, jumlah *cluster* optimal adalah 3 maka algoritma *K-Means Clustering* diawali dengan menginisiasi 3 *centroid* awal secara acak. Kemudian dengan rumus jarak *euclid* akan dihitung jarak *Euclid* setiap data ke *centroid* dan mengelompokkannya ke *centroid* terdekatnya, maka akan terbentuk *cluster-cluster* kemiskinan pada satu iterasi. Setelahnya akan dihitung rata-rata fitur setiap data pada *cluster* yang sama, kemudian menjadikannya sebagai *centroid* pada iterasi berikutnya. Proses ini berlanjut sampai tidak terjadi perpindahan posisi *centroid* yang signifikan atau anggota *cluster* tidak lagi berpindah. Visualisasi kelompok *cluster* kemiskinan saat iterasi berhenti ditampilkan sebagai berikut:



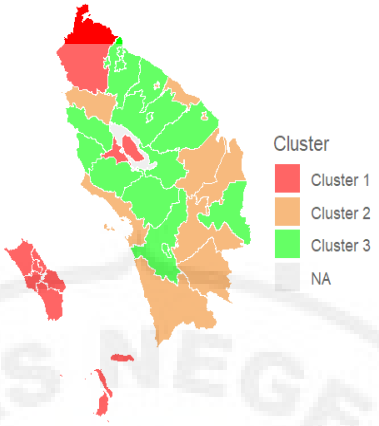
Gambar 4. Visualisasi *Clustering* Kemiskinan Sumatera Utara padaTahun 2023

Berdasarkan hasil klasterisasi kemiskinan Sumatera Utara 2023 menggunakan *K-Means Clustering*, ditemukan bahwa data akan terkelompok kedalam 3 *cluster* optimal yang masing-masing diisi oleh 7 kabupaten/kota pada *cluster* 1, 11 kabupaten/kota pada *cluster* 2 dan 15 kabupaten/kota pada *cluster* 3. *Cluster* 1 adalah *cluster* dengan nilai *centroid* tertinggi artinya *cluster* ini adalah kabupaten/kota dengan rata-rata kekurangan pendapatan terhadap garis kemiskinan terbesar di Sumatera Utara dan juga merupakan kabupaten/kota dengan sebaran pendapatan paling tidak merata. *Cluster* 2 adalah cluster dengan tingkat kemiskinan menengah dengan rata-rata *poverty gap* sebesar 0,0138 dan rata-rata *poverty severity* sebesar 0,0032. Sedangkan *cluster* 3 adalah *cluster* tingkat kemiskinan dengan nilai *centroid* terendah, artinya kabupaten/kota yang berada dalam kelompok ini memiliki rata-rata kekurangan pendapatan terhadap garis kemiskinan yang terendah serta memiliki sebaran pengeluaran perkapita yang paling merata di Sumatera Utara. Setelah menjalankan algoritma sebanyak 100 kali melalui program R diperoleh *initial centroid* dan nilai *Within Cluster Sum of Squares (WCSS)* tiap-tiap *cluster* seperti berikut yang disajikan pada Tabel 3.

Tabel 3. *Initial Centroids Cluster* Tahun 2023

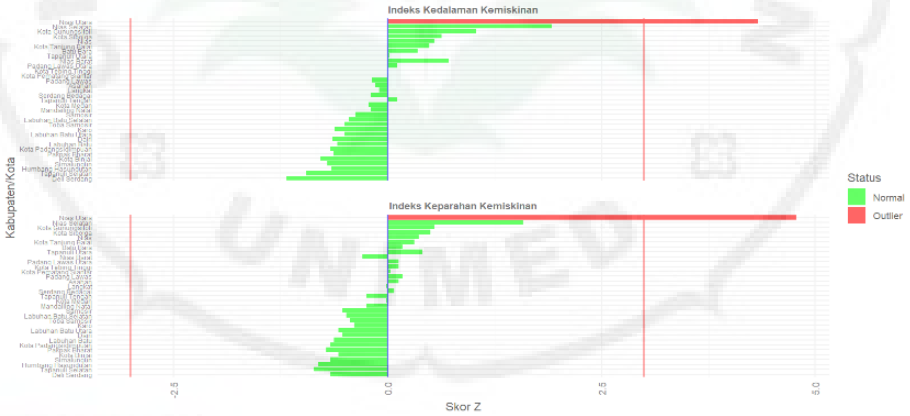
Cluster	*Centroid*		*WCSS*
	Poverty Gap	*Poverty Severity*	
1	0,022514286	0,005614286	0.000121557
2	0,013845455	0,003263636	0.000027892
3	0,008333333	0,001593333	0.000069402

Hasil klasterisasi menemukan bahwa *Total Sum of Squares* optimal adalah sebesar 0,0002188525. Dengan *Between Sum of Squares* atau seberapa baik *cluster-cluster* terpisah satu sama lain sebesar 82,7%. Berdasarkan hasil klasterisasi Sumatera Utara tahun 2023 diatas, dilakukan pemetaan yang ditunjukkan pada gambar berikut, dengan NA merepresentasikan luasan Danau Toba.



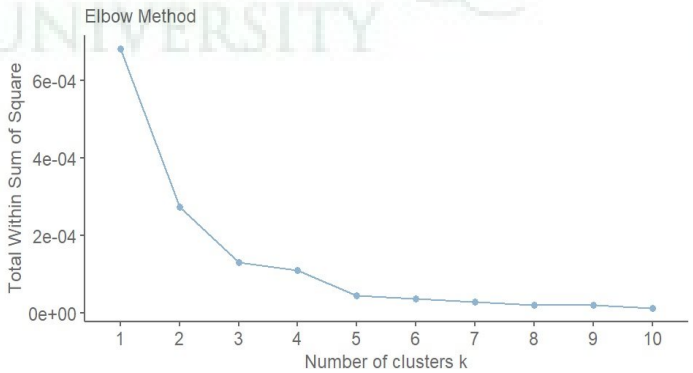
Gambar 5. Pemetaan Hasil *Clustering* Kemiskinan Sumatera Utara 2023

Pada data 2024 juga dilakukan pendeteksian *outlier* dengan metode yang sama yakni dengan *Z-Score*. Dengan menggunakan persamaan dihitung pula nilai *Z-Score* setiap unit data dari kedua fitur, yang disajikan melalui gambar 6. Gambar 6 menunjukkan adanya data abnormal atau *outlier* dalam data tahun 2024 pada kedua fitur. Daerah yang terdeteksi sebagai *outlier* dan melewati batas kenormalan adalah Kabupaten Nias Utara dengan nilai *Z-Score* mencapai 4,33 untuk P_1 dan 4,77 untuk P_2. Adanya *outlier* ini mengakibatkan *dataset* tidak cukup baik untuk diklasterkan secara langsung menggunkan *K-Means* klasik karena nantinya *outlier* ini akan menarik *centroid* klaster menjauhi kelompok data yang sebenarnya, menghasilkan pengelompokan yang kurang akurat. Maka selanjutnya untuk data 2024 akan diklasterkan menggunakan variasi dari *K-Means Clustering* yang mengisolasi *outlier* saat memilih dan memperbaharui *centroid* yakni *K-Means Sharp (K-Means#)* (Olukanmi & Twala, 2021).



Gambar 6. Grafik Sebaran Skor Z Fitur pada Data Tahun 2024

Dalam *Elbow Method*, nilai k dipilih untuk meminimalkan *Within Cluster Sum Of Squares (WCSS).* Semakin kecil nilai WCSS maka variasi data dalam cluster akan semakin kecil atau data-data dalam suatu *cluster* akan memiliki kesamaan yang tingggi. Pemetaan nilai inersia atau WCSS terhadap berbagai nilai k pada data 2024 dapat dilihat melalui grafik berikut:



Gambar 7. Grafik *Elbow Method* untuk penentuan Jumlah *Cluster* Optimal Data 2024

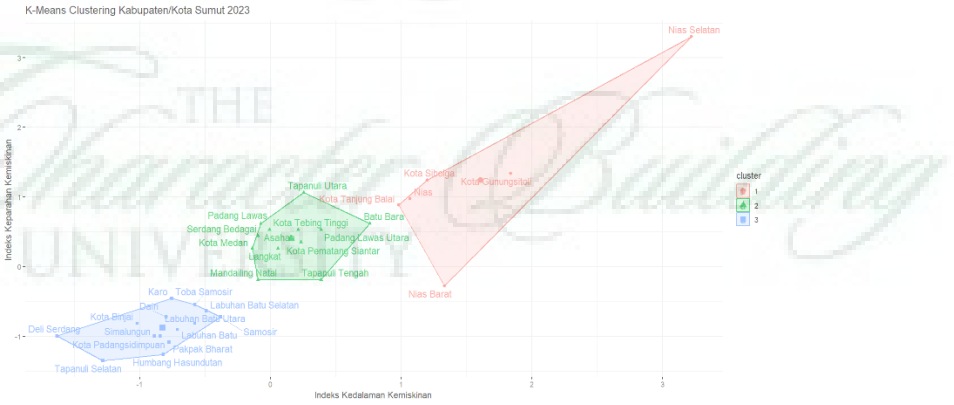
Gambar 7 menunjukkan bahwa jumlah *cluster* optimal pada data 2024 sama dengan jumlah *cluster* optimal pada data 2023 yakni 3 *cluster*. Pada titik k = 3, penurunan inersia masih terjadi secara signifikan dan setelahnya penurunan nilai inersia ini mulai melambat atau mulai melandai, serta merupakan titik yang membentuk *elbow* atau sikut. Namun apabila ditinjau kembali pada gambar tersebut, secara visual terdapat tekukan lainnya, yakni pada titik k = 5, maka untuk memverifikasi titik paling sikut yang sebenarnya perlu dilakukan perhitungan lanjutan dengan menggunakan Metode *Kneedle (Distance-to-Line)* seperti pada data tahun 2023. Dengan cara yang sama dihitung jarak tegak lurus dari garis $y + x - 1 = 0$ ke setiap tittik k menggunakan Persamaan 1 dan diperoleh jarak tegak lurus seperti pada tabel berikut:

Tabel 4. Jarak tegak lurus dengan metode *Kneedle (distance to line)* data 2024

K	WCSS	*K Normalized*	*WCSS Normalized*	*Distance to line*
1	0,0006822	0,000	1,00	0,00
2	0.0002567	0,1111111	0.3690703	0.3675672
3	0.0001299	0,2222222	0.1810329	0.4219624
4	0.0000552	0,3333333	0.0702211	0.4117507
5	….	….	….	….
10	0.0000079	1,000	0,00	0,000

Berdasarkan Tabel 4. diketahui bahwa,jarak tegak lurus yang paling besar dari garis garis y+x−1=0 adalah di k=3 dengan jarak tegak lurus sebesar 0,421 artinya terbukti bahwa nilai k optimal adalah 3 karena saat di titik k = 3, penurunan iner sia masih terjadi secara signifikan dan setelahnya penurunan nilai inersia ini mulai melambat atau mulai melandai, juga merupakan titik yang paling membentuk *elbow* atau sikut. Telah ditunjukkan bahwa jumlah *cluster* optimal pada data 2024 sama dengan jumlah *cluster* optimal pada data 2023 yakni 3 *cluster*, maka kesamaan jumlah *cluster* ini nantinya akan menyusun matriks peluang transisi pada waktu transisi 2023 2024 yang lengkap dan persegi, artinya seluruh *state* yang ada akan saling berkomunikasi. Secara garis besar algoritma *K-Means Sharp (K-Means#)* hampir sama dengan algoritma *K-Means* klasik, perbedaan utamanya hanya hanya terletak pada perlakuan terhadap data *outlier*. *K-Means* klasik mengasumsikan semua titik data sebagai data bukan pencilan, sehingga apabila terdapat data *outlier* maka data tersebut akan berkontribusi pada *Total Sum of Squares* yang menyebabkan hasil klasterisasi tidak akurat.

Outlier akan otomatis menarik centroid cluster menjauhi kelompok data yang sebenarnya, maka untuk mengatasi hal tersebut dalam algoritma *K-Means Sharp (K-Means#),* dilakukan pengisolasian terhadap *outlier* saat pembaharuan *centroid* (Olukanmi & Twala, 2021). Namun bukan berarti data *outlier* tersebut akan serta merta dihapus atau bahkan tidak akan mendapat label *cluster* yang artinya data tidak memiliki kemiripan dengan *cluster* manapun, tetapi data tersebut akan dialokasikan kedalam *cluster* dengan jarak *Euclid* terkecil dengan *centroid cluster* yang ditemukan tanpa adanya pengaruh *outlier*. Dikarenakan pada proses pendeteksian *outlier* dengan *Z-Score*, data *outlier* telah teridentifikasi dengan jelas maka pengaplikasian algoritma *K-Means Sharp* dapat dilakukan. Pada proses komputasi data Kabupaten Nias Utara yang merupakan *outlier* pada dataset 2024 tidak akan diikutsertakan yang mengakibatkan visualisasi klasterisasi seperti berikut:



Gambar 8. Grafik Visualisasi Hasil *Clustering* Kemiskinan Sumatera Utara 2024

Hasil klasterisasi menemukan bahwa *Total Sum of Squares* optimal pada data 2024 tanpa adanya pengaruh *outlier* adalah sebesar 0,0006821759 . Dengan *Between Sum of Squares* atau seberapa baik *cluster-cluster* terpisah satu sama lain sebesar 81%. Melalui perulangan algoritma sebanyak 100 kali pada program R diperoleh *initial centroid* dan nilai *Within Cluster Sum of Squares (WCSS)* tiap-tiap *cluster* tanpa adanya pengaruh *outlier* seperti berikut yang disajikan pada Tabel 5.

Tabel 5. *Initial Centroids Cluster* Tahun 2024

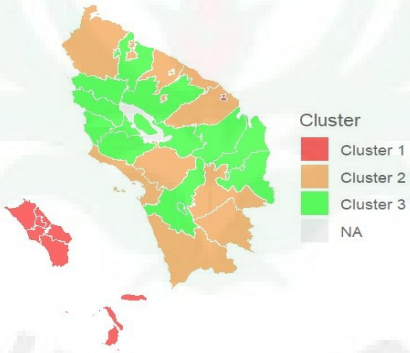
Cluster	*Centroid*		*WCSS*
	Poverty Gap	*Poverty Severity*	
1	0,01885	0,0037	0,000082675
2	0,01225	0,002758333	0,000018139
3	0,007778571	0,001328571	0,000029132

Centroid yang ditampilkan diatas juga merupakan *centroid* pada saat algoritma *k-means* berhenti, karena kekonvergenan *centroid* terjadi pada iterasi kedua. Maka langkah selanjutnya dalam algoritma *K-Means Sharp* adalah untuk menugaskan *outlier* mencari *centroid* terdekatnya, dengan menggunakan persamaan euclid diperoleh jarak Euclid data Kabupaten Nias Utara terhadap ketiga *centroid* sebagai berikut:

Tabel 6. Jarak Euclid Nias Utara terhadap Ketiga *Centroid*

Centroid Cluster	*Euclidian Distances*
1	0.0261823
2	0.0327285
3	0.037423

Tabel 6 menunjukkan bahwa jarak Euclid terkecil data Nias Utara adalah dengan *cluster* 1 yakni sebesar 0,0261823 , maka Nias Utara akan berada dalam *cluster* 1. Berdasarkan hasil klasterisasi kemiskinan Sumatera Utara 2024 menggunakan *K-Means Sharp (K-Means#)*, ditemukan bahwa data juga terkelompok kedalam 3 *cluster* optimal yang masing-masing diisi oleh 7 kabupaten/kota pada *cluster* 1, 12 kabupaten/kota pada *cluster* 2 dan 14 kabupaten/kota pada *cluster* 3. Berdasarkan hasil klasterisasi Sumatera Utara tahun 2024 diatas, diperoleh pemetaan sebagai berikut:



Gambar 9. Pemetaan Hasil *K-Means Clustering* Kemiskinan Sumatera Utara 2024

Setelah melakukan proses *clustering* pada data 2023 data 2024, kemudian akan dapat dihitung peluang transisi setiap keadaan untuk membentuk matriks peluang transisi dalam pemodelan Rantai Markov

Dalam Rantai Markov, kondisi atau nilai kejadian yang dimiliki suatu sistem pada suatu waktu diwakili oleh *state* (keadaan). *State* ini merupakan himpunan bagian dari ruang kejadian yang dilambangkan dengan S. $S = \{S_n, n \geq 0\}$ dimana n merupakan banyaknya *state* dalam sistem. Dalam penelitian ini, *state* diwakili oleh *cluster-cluster* yang tercipta melalui proses *K-Means Clustering* dengan didefinisikan; *State* 1 : *Cluster* 1 atau *cluster* kemiskinan tinggi (ekstrem); *State* 2 : *Cluster* 2 atau *cluster* kemiskinan menengah; *State* 3 : *Cluster* 3 atau *cluster* kemiskinan rendah.

Peluang transisi adalah peluang proses berpindah dari satu *state* ke *state* lain dalam satu langkah waktu. Jika sebuah Rantai Markov mempunyai k kemungkinan *state* yang ditandai dengan 1, 2, ..., k, maka jika peluang *state* berada dalam keadaan j setelah mengalami kejadian i pada pengamatan sebelumnya dilambangkan dengan P_{ij} yang disebut probabilitas transisi, dengan nilai P_{ij} dalam konteks probabilitas transisi *cluster* tingkat kemiskinan pada model ini didefinisikan sebagai berikut: :

$$P_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i} \tag{2}$$

Dimana: P_{ij}: Peluang transisi dari *state* i ke *state* j; n_{ij}: Jumlah kabupaten/kota yang bertransisi dari *state* i (pada waktu t) ke *state* j (pada waktu $t+1$); n_i:Banyaknya kabupaten/kota yang berangkat dari *state* i (pada waktu t). Berdasarkan hasil *K-Means Clustering* dari data 2023 dan 2024 dapat dihitung keseluruhan probabilitas transisinya yang ditunjukkan seperti berikut:

$$P_{11} = \frac{n_{11}}{n_1} = \frac{5}{7} = 0{,}714 \qquad P_{21} = \frac{n_{21}}{n_2} = \frac{2}{11} = 0{,}182 \qquad P_{31} = \frac{n_{31}}{n_3} = \frac{0}{15} = 0$$

$$P_{12} = \frac{n_{12}}{n_1} = \frac{1}{7} = 0{,}143 \qquad P_{22} = \frac{n_{22}}{n_2} = \frac{6}{11} = 0{,}545 \qquad P_{32} = \frac{n_{32}}{n_3} = \frac{5}{15} = 0{,}333$$

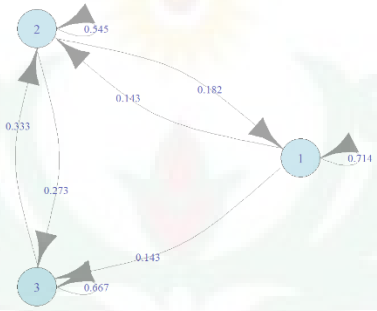
$$P_{13} = \frac{n_{13}}{n_1} = \frac{1}{7} = 0{,}143 \qquad P_{23} = \frac{n_{23}}{n_2} = \frac{3}{11} = 0{,}273 \qquad P_{33} = \frac{n_{33}}{n_3} = \frac{10}{15} = 0{,}667$$

Berdasarkan perhitungan peluang transisi diatas, dapat dibentuk matriks peluang transisi sebagai berikut:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}714 & 0{,}143 & 0{,}143 \\ 0{,}182 & 0{,}545 & 0{,}273 \\ 0 & 0{,}333 & 0{,}667 \end{bmatrix}$$

Sebelum menganalisis distribusi *Steady state* perlu ditunjukan bahwa Rantai Markov merupakan *Ergodic* untuk menjamin kekonvergenan dan keunikan nilai peluang jangka panjang bila berangkat dari sembarang *state* awal. *Ergodic Markov Chain* memenuhi sifat *irreducible*, *aperiodic* dan *positive reccurent*.

Suatu rantai Markov disebut *irreducible* (tak tereduksi) jika setiap keadaan saling berkomunikasi dengan setiap keadaan lain atau dengan kata lain hanya memiliki satu kelas komunikasi. Keadaan i dan j dinamakan saling berkomunikasi (dinotasikan dengan $i \leftrightarrow j$), apabila keadaan j dapat diperoleh dari keadaan i dan keadaan i dapat diperoleh dari keadaan j. Hal ini dapat ditunjukkan melalui diagram transisi *state* berikut:



Gambar 10. Diagram Transisi *State*

Dari gambar diatas diperlihatkan bahwa setiap *state* saling berkomunikasi, tidak ada satu atau kelompok *state* yang terisolasi di mana suatu *state* tidak dapat mencapai keadaan lain. dapat dituliskan $1 \leftrightarrow 2$, $1 \leftrightarrow 3$, dan $2 \leftrightarrow 3$, dengan satu kelas komunikasi yakni $\{1,2,3\}$. Maka Rantai Markov memiliki sifat *irreducible*. State i dapat dikatakan aperiodic jika dan hanya jika $d(i) = 1$, dimana $d(i) = gcd[n \geq 1, P_{ii}^n > 0\}$. Dimana $d(i)$ merupakan *greatest common divisor* atau yang biasa disebut faktor persekutuan terbesar dari semua kemungkinan n yang membuat proses dari state i kembali ke state i lagi dalam langkah positif.

$$d(1) = \gcd(1,2,3,\dots) = 1$$
$$d(2) = \gcd(1,2,3,\dots) = 1$$
$$d(3) = \gcd(1,2,3,\dots) = 1$$

Berdasarkan *greatest common divisor* (FPB) diatas, dapat ditunjukkan bahwa state 1,2,3 bersifat *aperiodic* karena $d(1) = d(2) = d(3) = 1$.

Ruang *states* dikatakan *reccurent* jika$f_{ii} = 1$, untuk semua state i, didefinisikan $f_{ii} = P(X_n = i,$ untuk beberapa $n \geq 1 | X_0 = i)$, dengan f_{ii} artinya keadaan i dicapai dari keadaan i.

$$f_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = f_{ii}^1 + f_{ii}^2 + f_{ii}^3 + \cdots$$

Maka dari Gambar 10 dapat diperlihatkan penjumlahan f_{ii} dalam satu langkah, 2 langkah dan 3 langkah berjumlah 1 maka Rantai Markov memiliki keadaan *reccurent*. Suatu *state* disebut berulang positif *(Positive Reccurent)* jika *state* tersebut *reccurent* serta berlaku: jika proses dimulai dari state i maka nilai harapan dari waktu sampai proses tersebut kembali ke state i $(\mu_i = \frac{1}{\pi_i})$ adalah bilangan hingga (*finite*). Melalui program R ditemukan: μ_i =[4,289146 2,729457 2,497003], maka Rantai Markov memnuhi sifat *positive reccurent*. Sehingga semua rantai Markov dengan matriks peluang transisi tersebut merupakan rantai Markov yang ergodik (*irreducible*, *aperiodic* dan *positive recurrent).*

Steady State dari P dapat diperoleh dengan menyelesaikan sistem persamaan linear. Keadaan setimbang v memenuhi $v = vP$ dan $\Sigma_i \pi_i = 1$, sehingga dapat dituliskan sistem persamaan linear sebagai berikut:

$$[\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3] = [\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3] \begin{bmatrix} 0{,}714 & 0{,}143 & 0{,}143 \\ 0{,}182 & 0{,}545 & 0{,}273 \\ 0 & 0{,}333 & 0{,}667 \end{bmatrix}$$

Lebih lanjut dijabarkan sebagai berikut; $\pi_1 P_{11} + \pi_2 P_{21} + \pi_3 P_{31} = \pi_1$; $\pi_1 P_{12} + \pi_2 P_{22} + \pi_3 P_{32} = \pi_2$; $\pi_1 P_{13} + \pi_2 P_{23} + \pi_3 P_{33} = \pi_3$; dan $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$. Substitusi nilai peluang transisi ke dalam; $\pi_1(0{,}714) + \pi_2(0{,}182) + \pi_3(0) = \pi_1$; $\pi_1(0{,}143) + \pi_2(0{,}545) + \pi_3(0{,}333) = \pi_2$; $\pi_1(0{,}143) + \pi_2(0{,}273) + \pi_3(0{,}667) = \pi_3$; dan $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$. Dengan mengeliminasi persamaan diatas diperoleh $0{,}286\,\pi_1 - 0{,}182\,\pi_2 = 0$ dan $0{,}19\,\pi_1 - 0{,}788\,\pi_2 = 0{,}333$. Dengan menyelesaikan persamaan diatas diperoleh nilai dari $\pi_1 = 0{,}2331$, $\pi_2 = 0{,}3664$, $\pi_3 = 0{,}4005$, maka dapat disusun vektor *steady state*, $v = [0{,}2331 \quad 0{,}3664 \quad 0{,}4005]$. Hasil yang sama diperoleh juga dengan mencari peluang jangka panjang menggunakan Persamaan *Chapmaan Kolmogorov*. Matriks peluang transisi langkah ke-2

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0{,}714 & 0{,}143 & 0{,}143 \\ 0{,}182 & 0{,}545 & 0{,}273 \\ 0 & 0{,}333 & 0{,}667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}714 & 0{,}143 & 0{,}143 \\ 0{,}182 & 0{,}545 & 0{,}273 \\ 0 & 0{,}333 & 0{,}667 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}535 & 0{,}227 & 0{,}236 \\ 0{,}229 & 0{,}414 & 0{,}359 \\ 0{,}06 & 0{,}403 & 0{,}536 \end{bmatrix}$$

Dan seterusnya sampai pada matriks peluang transisi langkah ke-18

$$P^{18} = \begin{bmatrix} 0{,}2334 & 0{,}3662 & 0{,}4003 \\ 0{,}2331 & 0{,}3663 & 0{,}4004 \\ 0{,}2332 & 0{,}3664 & 0{,}4005 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}714 & 0{,}143 & 0{,}143 \\ 0{,}182 & 0{,}545 & 0{,}273 \\ 0 & 0{,}333 & 0{,}667 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}2331 & 0{,}3664 & 0{,}4005 \\ 0{,}2331 & 0{,}3664 & 0{,}4005 \\ 0{,}2331 & 0{,}3664 & 0{,}4005 \end{bmatrix}$$

Atau dapat dituliskan sebagai vektor *steady state* sebagai berikut $v = [0{,}2331 \quad 0{,}3664 \quad 0{,}4005]$

Matriks di atas telah mengalami keadaan stabil (ekuilibrium). Peluang transisi pada keadaan seimbang menggambarkan peluang transisi yang tidak akan berubah seiring berjalannya waktu. Terlihat bahwa ketiga kolom matriks memiliki elemen-elemen yang sama, menunjukkan bahwa probabilitas transisi sudah konvergen, yang artinya seluruh *state* pada waktu t dapat berpindah ke satu *state* pada waktu $t + 1$ dengan probabilitas sebesar π . Untuk periode selanjutnya seperti periode ke-19, ke-20, ke-21, dan seterusnya akan dihasilkan matriks yang sama karena proses telah mencapai keadaan keseimbangan. Dari vektor *steady state* tersebut dapat dijelaskan pula bahwa probabilitas seluruh kabupaten/kota pada *cluster-cluster* dengan tingkat kemiskinan ekstrem, menengah, dan rendah akan bertransisi seluruhnya menjadi kabupaten/kota dengan tingkat kemiskinan rendah dalam kondisi *Steady* atau setimbang tanpa memperhitungkan kondisi awal sebesar 40,05 %. Lebih lanjut, semua kabupaten/kota di Provinsi Sumatera Utara pada semua *cluster* akan bertransisi seluruhnya menjadi kabupaten/kota dengan tingkat kemiskinan sedang dengan probabilitas sebesar 36,64%, juga probabilitas semua kabupaten/kota di semua *cluster* akan bertransisi seluruhnya menjadi kabupaten/kota dengan tingkat kemiskinan rendah dengan probabilitas sebesar 23,5 %. Dari kondisi *steady* tersebut dapat juga diperlihatkan peluang Provinsi Sumatera Utara akan sepenuhnya terbebas dari kemiskinan ekstrem, yang dalam hal ini dapat dituliskan sebagai π_1^c. Dalam keadaan setimbang dipenuhi $\Sigma_i \pi_i = 1$, maka dapat dituliskan; $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$; dan $\pi_2 + \pi_3 - \pi_1^c = 0$; sehingga $\pi_1^c = \pi_2 + \pi_3 = 0{,}3664 + 0{,}4005 = 0{,}7669 = 76{,}69\%$. Dengan demikian model ini memproyeksikan bahwa pada transisi ke-18 atau pada tahun 2041, Provinsi Sumatera Utara akan terbebas dari kemiskinan ekstrem dengan peluang sebesar 76,69 %.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan yag telah dipaparkan pada bab sebelumnya, dapat ditarik kesimpulan, hasil *K-Means Clustering* menunjukkan bahwa dengan penentuan jumlah *cluster* optimal menggunakan *Elbow Method* baik pada data 2023 dan 2024, data terkelompok ke dalam 3 *cluster* dengan nilai *between cluster sum of squares* 82,7% dan 81% dimana *cluster* 1 menjelaskan kabupaten/kota dengan tingkat kemiskinan tinggi atau ekstrem, *cluster* 2 yang menjelaskan kabupaten/kota dengan tingkat kemiskinan menengah, dan cluster 3 yang menjelaskan kabupaten/kota dengan tingkat kemiskinan rendah. Keadaan setimbang atau *steady state* diperoleh pada periode ke-18 dengan matriks dengan vektor *steady state* $v = [0{,}2331 \quad 0{,}3664 \quad 0{,}4005]$, yang dapat diartikan bahwa; (a) seluruh kabupaten/kota di Provinsi Sumatera Utara akan bertransisi menjadi kabupaten/kota dengan tingkat kemiskinan ekstrem dengan peluang sebesar 23,31%; (b) seluruh kabupaten/kota di Provinsi Sumatera utara akan bertransisi menjadi kabupaten/kota dengan tingkat kemiskinan menengah dengan peluang sebesar 36,64%; (c) seluruh kabupaten/kota di Provinsi Sumatera utara akan bertransisi menjadi kabupaten/kota dengan tingkat kemiskinan rendah dengan peluang sebesar 40,05%. Kemudian pada tahun 2041 atau pada periode transisi ke-18 Provinsi Sumatera Utara diproyeksikan sepenuhnya bertransisi keluar dari *cluster* kemiskinan tinggi (ekstrem) dengan probabilitas sebesar 76,69%.

DAFTAR PUSTAKA

Adon, M. J., & Jeraman, G. T. (2023). Kontribusi Teori Kemiskinan Sebagai Deprivasi Kapabilitas Dari Amartya Sen Dalam Upaya Pemberdayaan Masyarakat Miskin. Jurnal Masyarakat Madani, 8(1), 1–0. https://doi.org/10.24014/jmm.v8i1.22295

Agustianto, R., Ika Purnamasari, & Suyitno. (2020). Analisis Data Ketinggian Permukaan Air Sungai Mahakam Daerah Kutai Kartanegara Tahun 2010-2016 Menggunakan Model Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA) Dengan Efek Outlier (Studi Kasus: Data Rata-rata Ketinggian Tiap Bulan Permukaan Air Sungai Mahakam, Tenggarong, Kalimantan Timur). Jurnal EKSPONENSIAL, 11(1), 39–46. https://doi.org/10.30872/eksponensial.v11i1.643

Amelia, N., Oktarahmadini, S., & Harahap, A. (2025). Peran Pemerintah dalam Mengatasi Kemiskinan di Kota Medan. Jurnal Ilmu Komunikasi, Administrasi Publik Dan Kebijakan Negara, 2(1), 1–23. https://doi.org/10.62383/komunikasi.v2i1.76

Aprilia, K., & Sembiring, F. (2021). Analisis Garis Kemiskinan Makanan Menggunakan Metode Algoritma K-Means Clustering. SISMATIK (Seminar Nasional Sistem Informasi Dan Manajemen Informatika), 1–10.

Badan Pusat Statistik. (2024a). Data dan Informasi Kemiskinan Kabupaten/Kota di IndonesiaTahun 2024 (Vol. 16).

Badan Pusat Statistik. (2024b). Profil Kemiskinan di Indonesia September 2024. Berita Resmi Statistik, 1(7), 1–6.

BPS Provinsi Sumatera Utara. (2024). BADAN PUSAT STATISTIK PROVINSI SUMATERA UTARA. Berita Resmi Statistik, 41, 1–12.

Gavira-Durón, N., Gutierrez-Vargas, O., & Cruz-Aké, S. (2021). Markov chain k-means cluster models and their use for companies' credit quality and default probability estimation. Mathematics, 9(8), 1–14. https://doi.org/10.3390/math9080879

Habib, U., & Wahyudi, H. (2022). Indeks Kedalaman Kemiskinan Sebelum dan Saat Pandemi Covid-19 di Indonesia. Studi Ekonomi Dan Kebijakan Publik, 1(1), 59–72. https://doi.org/10.35912/sekp.v1i1.1424

Haughton, J., & Khandker, S. R. (2009). Handbook on Poverty and Inequality. The World Bank.

Huang, Z., Zheng, H., Li, C., & Che, C. (2024). Application of Machine Learning-Based K-means Clustering for Financial Fraud Detection. Academic Journal of Science and Technology, 10(1), 2771–3032. https://doi.org/10.54097/74414c90

Kaufman, L., & Rousseeuw, P. J. (1989). Finding Groups in Data An Introduction to Cluster Analysis. A JOHN WILEY & SONS, INC., PUBLICATION.

Lestari, S. S. S., & Jasuni, A. Y. (2023). Analisis Rantai Markov Lima Status pada Return Harga Saham BBCA. Jurnal Bisnisman: Riset Bisnis Dan Manajemen, 5(1), 108–116. https://doi.org/10.52005/bisnisman.v5i1.138

Li, S., Ma, H., & Li, W. (2017). Typical solar radiation year construction using k-means clustering and discrete-time Markov chain. Applied Energy, 205, 720–731. https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2017.08.067

Nasib, S. K., Hasan, R., Djakaria, I., Payu, M. R. F., Nuha, A. R., & Nashar, L. O. (2024). Analisis Peluang Jangka Panjang Mesin Penggilingan Padi Menggunakan Rantai Markov. Euler : Jurnal Ilmiah Matematika, Sains Dan Teknologi, 12(1), 63–70. https://doi.org/10.37905/euler.v12i1.25280

Noor Achmad, K., Mokhamad, M. H., Hosen, M. H., & et al. (2024). Peta Kemiskinan Ekstrem Nasional : Data Pensasaran Percepatan Penghapusan Kemiskinan Ekstrem (P3KE). www.baznas.go.id;

Noviandy, T. R., Hardi, I., Zahriah, Z., & et al. (2024). Environmental and Economic Clustering of Indonesian Provinces: Insights from K-Means Analysis. Leuser Journal of Environmental Studies, 2(1), 41–51. https://doi.org/10.60084/ljes.v2i1.181

Olukanmi, P. O., & Twala, B. (2021). K-means-sharp: Modified centroid update for outlier-robust k-means clustering. 2021 Pattern Recognition Association of South Africa and Robotics and Mechatronics International Conference, PRASA-RobMech 2021, 2018-January, 14–19. https://doi.org/10.1109/RoboMech.2021.8261116

Permatasari, A. (2024). Mengkritisi Predikat Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta sebagai Provinsi Termiskin di Pulau Jawa. JAP : Jurnal Administrasi Publik, 15(2). https://doi.org/10.31506/jap.v15i2.28779

Riyono, J., Pujiastuti, C. E., & Riyana Putri, A. L. (2022). Forecasting Laju Inflasi Indonesia Menggunakan Rantai Markov. Jurnal Sains Matematika Dan Statistika, 8(1), 1. https://doi.org/10.24014/jsms.v8i1.14767

Ross, S. M. (1996). Stochastic processes Second Edition (2nd ed.). University of California.

Ross, S. M. (2010). Introduction to Probability Models, Tenth Edition (10th ed.). University of Southern California.

Satopää, V., Albrecht, J., Irwin, D., & Raghavan, B. (2011). Finding a "Kneedle" in a Haystack: Detecting Knee Points in System Behavior. 31st International Conference on Distributed Computing Systems Workshops, 166–171.

Shiffler, R. E. (1988). Maximum z scores and outliers. American Statistician, 42(1), 79–80. https://doi.org/10.1080/00031305.1988.10475530

Stevens, A. H. (2012). Poverty Transitions. In P. N. Jefferson (Ed.), The Oxford Handbook of the Economics of Poverty (pp. 494–518). Oxford University Press. https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780195393781.013.0016

Tan, S., & Syafri, M. (2024). Analisis komparatif kemiskinan di Sumatera Periode 2010-2020. Jurnal Paradigma Ekonomika, 19(1), 2085–1960.

United Nation. (1995). The Copenhagen declaration and programme of action: world summit for social development 6–12 March 1995.

World Bank. (2005). Introduction to poverty analysis. The World Bank.

Youn, H. M., Lee, H. J., Lee, D. W., & Park, E. C. (2020). The impact of poverty transitions on frailty among older adults in South Korea: Findings from the Korean longitudinal study of ageing. BMC Geriatrics, 20(1). https://doi.org/10.1186/s12877-020-01522-