T - 1

Strategy Kombinasi Untuk Menyelesaikan Quadratic Assignment Problem

Faiz Ahyaningsih

Fakultas MIPA, Universitas Negeri Medan
faizahyaningsih@yahoo.com

***Abstrak*—**The quadratic assignment problem is a combinatorial problem of deciding the placement of facilities in specified locations in such a way as to minimize a nonconvex objective function expressed in terms of flow between facilities, and distance between location. Due to the non-convexity nature of the problem, therefore to get a 'good' starting point is necessary in order to obtain a better optimal solution. In this paper we propose a random point strategy to get initial starting point and then use forward exchange strategy and backward exchange strategy to get 'optimal' solution. We also create a comparative program to test the solution. As a computational experience we solve the problem of Had12 from QAPLIB, with the optimal solution = 1652, permutation = 3 10 11 2 12 5 6 7 8 1 4 9 , running time = 122.512347 second = 2.04 minute. The optimal solution reached in 1050 iterations.

Keywords : Backward Exchange Strategy, Forward Exchange Strategy, Quadratic Assigment Problem, Random Point Strategy, ,

I. PENDAHULUAN

Quadratik assignment problem (QAP) adalah sebuah permasalahan kombinatorial dalam menempatkan fasilitas pada lokasi tertentu, sedemikian hingga meminimumkan fungsi objektif kuadrat, lihat [1].

QAP adalah problem sulit non polinomial [2], yang mengandung arti bahwa ordo kecepatan algoritma penyelesaian bertambah secara eksponensial apabila dimensi problema bertambah.

Dalam [3], Jika F=[$\boldsymbol{f_{ik}}$] adalah matriks flow, dimana f_{ik} adalah flow antara fasilitas i dan k, sedangkan D=[d_{jl}] matriks jarak, dimana d_{jl} adalah unit transportation cost (jarak) antara j dan l yang keduanya sudah diketahui, maka QAP dapat didefinisikan sebagai berikut :

Min $$\Phi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} f_{ik} d_{jl} x_{ij} x_{kl}$$

dengan kendala

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = 1,\ldots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad j = 1,\ldots,n$$

$$0 \le x_{ij} \le 1$$

$$x_{ij} \quad \text{integer}$$

Penyelesaian QAP sangat sulit, karena memerlukan komputasi yang sangat besar, mengingat definisi QAP yang merupakan kwartet sigma dari hasil kali elemen-elemen matriks flow F, matriks jarak D, dan matriks penugasan X.

Melihat hasil-hasil penelitian tentang QAP di QAPLIB (Quadratic Assignment Problem Library) dari tahun ke tahun, untuk QAP berukuran besar masih menyisakan tanda tanya besar mengenai nilai optimumnya, karena terlihat hasilnya masih ada gap dengan nilai optimumnya, yang besarnya bervariasi tergantung ukuran matriks dan metode yang digunakan untuk menyelesaikannya.

ISBN. **978-602-73403-1-2**

Jadi, meskipun riset pengembangan telah dilakukan lebih dari lima dekade, QAP masih menyisakan satu permasalahan optimisasi yang tersulit dan tidak ada algoritma analitik (eksak) yang dapat menyelesaikan permasalahan yang berukuran besar dalam waktu yang reasonable.

Program MATLAB adalah suatu program yang dapat membantu dalam komputasi, seperti halnya kalkulator tapi kalkulator yang jauh lebih tinggi dari scientific calculator, karena bisa disuruh untuk menghitung sesuai dengan perintah yang dibuat dengan bahasa pemrograman yang tentunya harus dimengerti oleh MATLAB tadi. Sementara bahasa yang digunakan di MATLAB lebih umum jika dibandingkan dengan bahasa pemrograman yang lain, seperti FORTRAN, PASCAL.

Untuk itu dalam penelitian ini akan dibuat suatu program untuk menyelesaikan QAP berukuran besar dengan strategy kombinasi menggunakan program MATLAB.

Sedang untuk menguji kebenaran hasil, dibuat suatu program pembanding.

II. METODE PENELITIAN

Untuk menyelesaikan QAP digunakan strategi kombinasi yang menggabungkan strategi titik random, strategi pertukaran maju, dan strategi pertukaran mundur.

A. *Strategi Titik Random (Random Point Strategy)*

Langkah-langkah untuk menentukan titik awal random adalah sebagai berikut :

1. Input nilai objektif θ sembarang sebagai titik perbandingan, n sebagai besar dimensi problema, *ITER* sebagai banyak iterasi, a = 1.
2. Membentuk hasil acak, x_i = Random permutasi (l,n); untuk setiap fasilitas i, i =1,2,...,n
3. x_{ij} = 1 untuk Generate $x_i = j$; $x_{ij} = 0$ untuk Generate $x_i \neq j$; i,j = 1,2,..,n
4. Hitung nilai fungsi Objektif

$$\bar{\theta} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} f_{ik}d_{jl}x_{ij}x_{kl}$$

5. Jika $\bar{\theta} < \theta$, make $\theta = \bar{\theta}$ perbaharui x_{ij}; a = a + 1
6. Jika $a < ITER$, kembali ke (2)
7. Selesai

B. *Strategi Pertukaran Maju (Forward Exchange Strategy)*

Langkah-langkah untuk strategi pertukaran maju ini adalah sebagai berikut :

1. Input n sebagai besar dimensi problema
2. Baca matriks flow fik , matriks jarak djl, titik awal penugasan xij
3. Hitung $\theta = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} f_{ik}d_{jl}x_{ij}x_{kl}$
4. Generate xi = j untuk xij = 1; i, j = 1,2,..,n
5. a=1
6. b=1
7. c = Generate $x_{i=a}$; Generate $x_{i=a}$ = Generate $x_{i=a+b}$; Generate $x_{i=a+b} = c$
8. x_{ij} = 1 untuk Generate $x_i = j$, x_{ij} = 0 untuk Generate $x_i \neq j$, i, j = 1,2,….,n
9. Hitung fungsi objectif

$$\bar{\theta} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} f_{ik}d_{jl}x_{ij}x_{kl}$$

10. Jika $\bar{\theta} < \theta$ maka $\theta = \bar{\theta}$, perbaharui x_{ij} ke langkah (14)
11. c = Generate $x_{i=a+b}$ = Generate $x_{i=a}$; Generate $x_{i=a} = c$
12. $b = b + 1$
13. Jika $b \leq$ n - a maka ke langkah (7)

14. $a = a + 1$
15. Jika $a \leq$ n maka ke langkah (6)
16. Selesai

C. Strategi Pertukaran Mundur(Backward Exchange Strategy)

Langkah-langkah untuk strategi pertukaran mundur ini adalah sebagai berikut :

1. Input n sebagai besar dimensi problema.
2. Baca matriks flow f_{ik} , matriks jarak d_{jl}, titik awal penugasan x_{ij} .
3. Hitung $\theta = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} f_{ik}d_{jl}x_{ij}x_{kl}$
4. Generate $x_i = j$, untuk $x_{ij} = 1$; i, j =1, 2, …,n
5. a=n
6. $b = n$
7. c = Generate $x_{i=a}$; Generate $x_{i=a}$ = Generate $x_{i=b}$; Generate $x_{i=b} = c$
8. $x_{ij} = 1$ for Generate x_i=j , $x_{ij} = 0$ for Generate $x_i \neq j$, j = 1, 2...., n
9. Hitung fungsi objektif $\bar{\theta} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} f_{ik}d_{jl}x_{ij}x_{kl}$
10. Jika $\bar{\theta} < \theta$ maka $\theta = \bar{\theta}$, perbaharui x_{ij} ke langkah (14)
11. c = Generate $x_{i=b}$; Generate $x_{i=b}$ = Generate $x_{i=a}$; Generate $x_{i=a} = c$
12. $b = b - 1$
13. Jika $b \geq a + 1$ maka ke langkah (7)
14. $a = a - 1$
15. Jika $a > 1$ maka ke langkah (6)
16. SELESAI

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Program dikerjakan dengan menggunakan Matlab versi R2009b untuk windows 32-bit dengan lisensi trial.

Untuk melihat kebenaran hasil yang diperoleh, dibuat program pembanding. Program pembanding ini menerima input berupa permutasi, matriks F, dan matriks D, sedangkan outputnya adalah θ**.**

Untuk run program ini digunakan laptop dengan processor Intel (R) core (TM) i3-3217U, CPU 1.80 GHz RAM 4.00 GB.

A. Problema 12×12

Matriks ini diambil dari problem Had12, S. W. Hadley *et. a*l [4]. Ini adalah suatu permasalahan dengan 144 variabel biner. Untuk menyelesaikan kasus ini, penulis menginputkan dimensi n = 12, jumlah iterasi, matriks flow F, dan matriks jarak D, yang diambil dari QAPLIB home page [5]. Dalam setiap iterasi digunakan random point strategy untuk menentukan penugasan awal, yang diperoleh secara random dari computer, kemudian digunakan forward exchange strategy dan backward exchange strategy. Dari setiap penugasan atau permutasi yang diperoleh, dihitung nilai θ kemudian dicari nilai θ_{min} pada setiap iterasi, dan terakhir dicari nilai θ_{min} dari seluruh iterasi.

Hasil dari run program dapat dilihat pada tabel 1.

TABEL 1. HASIL RUN PROGRAM UNTUK BERBAGAI ITERASI

Number of Iteration	**Objective Value (θ)**	**Permutation**	**Running Time (Second)**
500	**1660**	**3 10 11 2 12 7 5 1 8 6 4 9**	**57.997902**
600	**1664**	**3 10 2 12 11 5 6 7 8 1 4 9**	**70.160402**

700	**1660**	**3 10 12 2 11 5 6 7 8 1 4 9**	**81.361419**
750	**1654**	**3 10 11 2 12 5 7 6 8 1 9 4**	**86.357992**
800	**1654**	**8 10 2 11 12 5 6 7 3 1 4 9**	**92.285597**
850	**1654**	**8 10 2 11 12 5 7 6 3 1 4 9**	**99.568710**
900	**1656**	**3 10 5 2 12 11 7 1 8 6 4 9**	**104.039284**
950	**1656**	**3 10 5 2 12 11 7 1 8 6 4 9**	**110.342666**
1000	**1660**	**3 10 11 2 12 6 5 1 8 7 4 9**	**117.018335**
1050	**1652(OPT)**	**3 10 11 2 12 5 6 7 8 1 4 9**	**122.512347**

Dari tabel 1 terlihat bahwa :

1. Pada iterasi ke 500, 700 dan 1000 diperoleh nilai objektif θ yang sama yaitu 1660, dengan permutasi yang berbeda-beda.
2. Pada iterasi ke 750, 800 dan 850 diperoleh nilai objektif θ yang sama yaitu 1654, dengan permutasi yang juga berbeda-beda.
3. Sementara pada iterasi ke 900 dan 950 diperoleh juga nilai objektif θ yang sama yaitu 1656, tetapi dengan permutasi yang sama.
4. Pada iterasi ke 1050 dicapai nilai optimum θ, yaitu 1652, dengan permutasi sesuai dengan hasil di QAPLIB.

IV. Simpulan dan Saran

Strategi kombinasi yang merupakan gabungan dari random point strategy, forward exchange strategy dan backward exchange strategy, dapat menyelesaikan QAP berukuran 12, dalam hal ini Had12 yang diambil dari QAPLIB, dalam waktu yang relative cepat dilihat dari running timenya.

Permutasi yang didapatkan sama dengan hasil permutasi yang sudah dilaporkan dalam QAPLIB.

Permutasi-permutasi itu sudah diuji dengan program pembanding, memang menghasilkan nilai θ yang sedemikian, dapat dikatakan dalam satu kasus ada kemungkinan solusi tidak tunggal, tergantung dari matriks F dan D.

Untuk penelitian selanjutnya bisa mengembangkan strategi kombinasi ini dengan tidak hanya menggabungkan random point strategy, forward exchange strategy dan backward exchange strategy, tetapi ditambah lagi dengan strategi yang lain misalnya forward exchange dan backward exchange yang dipartisi 2-2, 3-3, dan sebagainya sehingga dapat menyelesaikan QAP yang berukuran besar dalam waktu yang lebih cepat lagi.

Daftar Pustaka

[1] Ahyaningsih, F., (2006), Menyelesaikan Quadratic Assignment Problem Dengan Metode Heuristik Kelayakan, Thesis S2 Magister Matematika Universitas Sumatera Utara.

[2] Sahni, S. dan T. Gonzales, (1976), P Complete Aproximation Problems, Journal of the Association of Computing Machinery 23, 555-565.

[3] Cela, E., (1998), The Quadratic Assignment Problem : Theory and Algorithms,Kluwer.

[4] Hadley, S. W., F. Rend dan H. Wolkowicz, (1992), A New Lower Bound Via Projection for the Quadratic Assignment Problem, Mathematics of Operation Research 17, 727-739.

[5] Quadratic Assignment Problem Library (QAPLIB) homepages, (2011), http://www.opt.math.tu-graz.ac.at/qaplib/ and http://www.seas.upenn.edu/qaplib/, diakses tanggal 19 September 2015.