

PENGARUH PERUBAHAN NILAI PARAMETER TERHADAP NILAI ERROR PADA METODE RUNGE-KUTTA ORDE 3

Tornados P. Silaban¹, Faiz Ahyaningsih²

¹FMIPA, UNIMED, Medan, Indonesia

email: tornados.p_silaban@yahoo.com

²Dosen Matematika FMIPA, UNIMED, Medan, Indonesia

ABSTRAK

Metode Runge-Kutta merupakan suatu metode numerik yang digunakan untuk mencari solusi dari suatu persamaan. Metode ini berusaha mendapatkan derajat ketelitian yang lebih tinggi, dan sekaligus menghindarkan keperluan mencari turunan yang lebih tinggi dengan jalan mengevaluasi fungsi $f(x,y)$ pada titik terpilih dalam setiap selang langkah. Dalam tulisan ini dibahas tentang pengaruh perubahan nilai parameter (h) terhadap nilai error pada metode Runge-Kutta Ordo-3. Persamaan yang akan dibahas yaitu persamaan diferensial biasa linier tingkat dua yang telah di ubah kedalam sistem persamaan linier. Dalam proses penelitian tidak ditemukan nilai parameter yang tetap untuk mendapatkan nilai error yang paling minimum, karena setiap parameter memiliki nilai error yang bervariasi pada masing-masing persamaan.

Kata Kunci: Runge-Kutta, parameter, error.

ABSTRACT

Runge-Kutta method is a numerical method used to find the solution of an equation. This method seeks to obtain a higher degree of precision, and at the same time seeking to avoid the need of higher derivatives by evaluating the function $f(x, y)$ at the selected point in each interval step. In this paper discussed the effect of changes in the value of the parameter (h) to the value of the error in the Runge-Kutta method Order-3. The equation to be discussed is a linear ordinary differential equation of the two levels that have been changed into a system of linear equations. In the research process was not found fixed parameter values to get the minimum error value, because each parameter has a value of error varied for each equation.

Keywords: Runge-Kutta, parameters, error.

1. Pendahuluan

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan diantara derivatif-derivatif yang dispesifikasikan pada suatu fungsi yang tidak diketahui nilainya dan diketahui jumlah serta fungsinya [1]. .Persamaan diferensial biasa (PDB) adalah suatu persamaan diferensial yang terdiri dari satu variable bebas saja [2].

Persamaan diferensial berperan penting dalam kehidupan, sebab banyak permasalahan pada dunia nyata dapat dimodelkan dengan bentuk persamaan diferensial. Ada dua jenis persamaan diferensial yang kita kenal, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah persamaan diferensial biasa. Solusi dari persamaan diferensial adalah fungsi spesifik yang memenuhi persamaan. Persamaan dibawah ini merupakan contoh dari persamaan diferensial biasa yang memiliki solusi. Pada persamaan dibawah ini, x merupakan variabel bebas dan y merupakan variabel terikat. y merupakan nama *unknown function* dari variabel x .

Penyelesaian suatu model matematika secara numerik memberikan hasil aproksimasi atau pendekatan yang berbeda dengan penyelesaian secara analitis. Adanya perbedaan inilah yang sering disebut sebagai error (kesalahan) [3]. Hubungan antara nilai eksak, nilai perkiraan dan error dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$\text{Nilai eksak} = \text{aproksimasi} + \text{error}$$

Dengan menyusun kembali persamaan di atas, diperoleh definisi dari kesalahan absolut (absolute error), yaitu:

$$\text{Kesalahan absolut} = \text{nilaieksak} - \text{aproksimasi}$$

Metode Runge-Kutta memperoleh akurasi dari pendekatan deret Taylor tanpa memerlukan perhitungan derivatif yang lebih tinggi. Metode Runge-Kutta dikembangkan oleh dua ahli matematika Jerman. Mereka adalah Runge dan Kutta. Metode ini juga dibedakan dengan ordo-ordonya [4][5][7].

Banyak variasi dari metode Runge-Kutta, namun secara umum bentuknya adalah:

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{j=1}^n a_j k_j$$

Dengan $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ adalah konstanta dan k adalah :

$$k_j = f \left(x_i + hp_j, y_i + h \sum_{l=1}^{j-1} q_{jl} k_l \right)$$

$$p_1 = 0$$

Dimana diperoleh

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_1 + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 \cdot h)$$

$$k_3 = f(x_1 + p_3 h, y_i + q_{31} k_1 + q_{32} k_2 \cdot h)$$

⋮

$$k_n = f(x_1 + p_n h, y_i + q_{n1} k_1 + q_{n2} k_2 + \dots + q_{n(n-1)} k_{(n-1)} \cdot h)$$

a, q dan p merupakan parameter-parameter yang terdapat pada metode Runge-Kutta. Nilai parameter a dipilih sedemikian rupa sehingga meminimumkan error per langkah, dan persamaan metode Runge-Kutta akan sama dengan metode deret Taylor dari ordo setinggi mungkin. Perhatikan bahwa k adalah hubungan yang selalu berulang, k_1 hadir dalam persamaan untuk k_2 , k_2 hadir dalam persamaan k_3 , dan seterusnya..

Pada metode numerik ordo-2 terdapat empat parameter yang memiliki keterkaitan dimana dalam hal ini membuat metode Runge-Kutta tidak memiliki solusi yang unik. Solusi metode Runge-Kutta bergantung pada pemilihan nilai parameter yang diberikan. Pemilihan nilai parameter juga mempengaruhi besar-kecilnya nilai *error* [6].

Permasalahan yang dibahas adalah:

1. Bagaimana solusi persamaan diferensial biasa secara analitik dan numerik yaitu menggunakan metode Runge-Kutta Ordo-3.
2. Bagaimana nilai kesalahan metode Runge-Kutta Ordo-3 terhadap perubahan nilai parameter yang diberikan.
3. Bagaimana pengaruh perubahan nilai salah satu parameter secara increment terhadap nilai kesalahan yang diperoleh.

2. Metode Penelitian

Adapun langkah-langkah yang dilakukan untuk mencapai tujuan penelitian ini adalah:

1. Menjelaskan tentang persamaan diferensial.
2. Menjelaskan tentang jenis-jenis persamaan diferensial.
3. Memilih salah satu persamaan diferensial yang digunakan, dimana dalam penelitian ini penulis memilih persamaan diferensial linear tingkat dua.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = H(x)$$

4. Menjelaskan tentang masalah nilai awal (*Initial Value Problem*).
5. Menjelaskan tentang pengertian nilai error dan pembagiannya. Hubungan antara nilai eksak, nilai perkiraan dan error dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\text{Nilai eksak} = \text{aproksimasi} + \text{error}$$

Dengan menyusun kembali persamaan di atas, diperoleh defines idari kesalahan absolut (*absolute error*), yaitu :

$$\text{Kesalahan absolut} = \text{nilai eksak} - \text{aproksimasi}$$

Hubungan antara nilai eksak, nilai pendekatan dan *error* dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\text{Nilai eksak} = \text{Pendekatan} + \text{error}$$

Error absolut suatu bilangan adalah selisih antara nilai sebenarnya dengan nilai pendekatan. Secara matematis, jika y adalah solusi hampiran dan y_a adalah solusi eksak, *error* dinyatakan oleh

$$\varepsilon = y_a - y$$

error dapat bernilai positif atau negatif.

dengan : y_a = nilai sebenarnya

y = nilai perkiraan

ε = kesalahan absolut (kesalahan terhadap nilai sebenarnya)

6. Menjelaskan tentang Metode Range Kutta.
7. Menyelesaikan masalah menggunakan Metode Range Kutta-3, dengan menggunakan persamaan umumnya:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{6}k_1 + 4k_2 + k_3 \right) h$$

Dimana:

a = parameter

k adalah:

$$k_j = f \left(x_i + hp_j, y_i + h \sum_{l=1}^{j-1} q_{jl}k_l \right)$$

Dimana diperoleh

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_1 + p_2h, y_i + q_{21}k_1 \cdot h)$$

$$k_3 = f(x_1 + p_3h, y_i + q_{31}k_1 + q_{32}k_2 \cdot h)$$

3. Hasil Dan Pembahasan

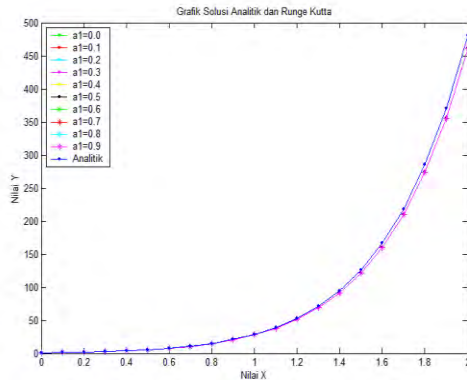
Kasus-kasus yang dibahas adalah kasus-kasus yang sudah mempunyai solusi persamaan diferensial. Oleh karena itu berikut merupakan hasil dari proses perhitungan persamaan diferensial linier tingkat dua dengan menggunakan metode Runge-Kutta ordo-3. Untuk mempermudah penulis, untuk semua kasus pada pembahasan ini akan diselesaikan menggunakan alat bantu program matlab. Hasil perhitungan akan diperlihatkan dengan tabel dan grafik sesuai kasus yang akan diselesaikan.

Kasus 1

$$y'' - 4y' + 4y = x + 10$$

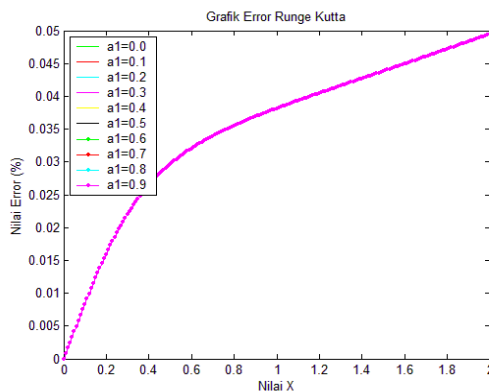
Dengan nilai $x_0 = 0, y(0) = 1$ dan $y'(0) = 2$

Hasil perhitungan dengan menggunakan program matlab untuk mencari solusi numerik dan solusi analitik dengan ukuran langkah $h = 0.1$ diperlihatkan dengan grafik sebagai berikut.



Gambar1 Grafik Solusi Analitik dan Solusi Numerik Kasus 1 dengan nilai parameter a_1 yang berbeda

Pada **tabel sebelumnya**, perhitungan menggunakan ukuran langkah $h = 0.1$ dan menghasilkan nilai *error* yang cukup besar untuk metode Runge-Kutta. Oleh karena itu pada grafik dibawah dilakukan perhitungan dengan menggunakan ukuran langkah yang lebih kecil lagi yaitu $h = 0.01$. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat grafik berikut.



Gambar 2 Grafik nilai *error* kasus 1 untuk setiap nilai parameter a_1

Dari Gambar 2 nilai *error* yang dihasilkan lebih kecil dibandingkan dengan nilai *error* yang diperlihatkan data sebelumnya. Hal ini disebabkan karena pada Gambar 2 diberikan ukuran langkah yang lebih kecil dalam penyelesaiannya dibandingkan dengan penyelesaian. Semakin kecil ukuran langkah yang diberikan maka akan semakin kecil *error* yang diperoleh dalam arti solusi yang diperoleh akan semakin mendekati nilai sebenarnya. Pada Gambar 2 dapat dilihat bahwa nilai *error* untuk setiap nilai parameter a_1 tidak terlihat perbedaan.

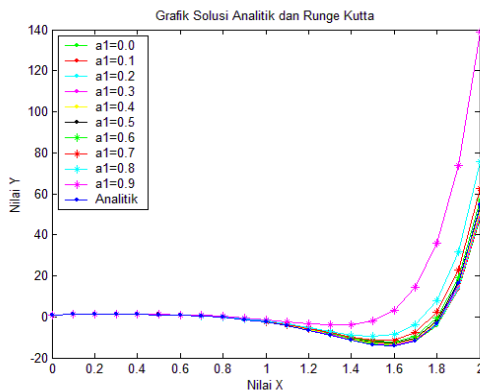
Kurva nilai *error* pada parameter $a_1 = 0$ sampai $a_1 = 0.8$ ditutupi oleh kurva nilai *error* parameter $a_1 = 0.9$

Kasus 2

$$y'' - 5y' + 6y = xe^{3x}$$

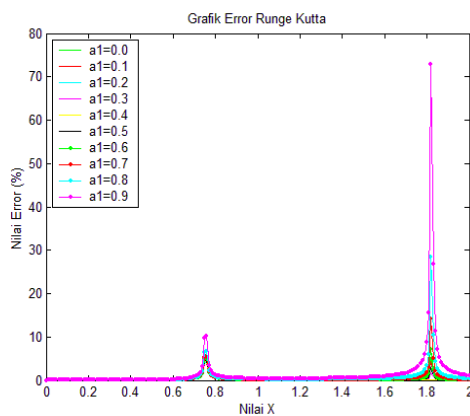
Dengan nilai $x_0 = 0, y(0) = 1$ dan $y'(0) = 1$

Hasil perhitungan dengan menggunakan program matlab untuk mencari solusi numerik dan solusi analitik dengan ukuran langkah $h = 0.1$ diperlihatkan dengan grafik sebagai berikut.



Gambar 3 Grafik Solusi Analitik dan Solusi Numerik Kasus 2 dengan nilai parameter a_1 yang Berbeda

Pada grafik dibawah ini dilakukan perhitungan dengan menggunakan ukuran langkah yang lebih kecil lagi, yaitu $h = 0.01$. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat grafik berikut.



Gambar 4 Grafik nilai *error* kasus 2 untuk setiap nilai parameter a_1

Nilai *error* terbesar berada pada parameter $a_1 = 0.9$ tepatnya di titik $x = 1.82$ yaitu $\varepsilon = 72.78536$. Nilai *error* pada interval tersebut terus meningkat dengan nilai yang tinggi sampai titik $x = 1.82$ dan kembali menurun secara normal. Terjadinya nilai *error* yang cukup tinggi pada $x = 1.82$ dipengaruhi oleh nilai koefisien dari fungsi polinomial

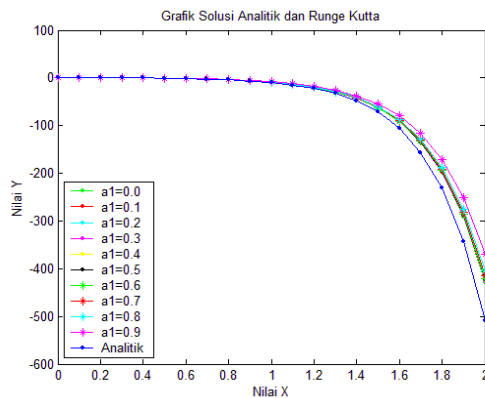
berderajat satu pada $H(x)$. Semakin kecil nilai koefisien maka lonjakan nilai *error* pada kurva akan semakin runcing dan posisi lonjakan akan berpindah ke kiri sumbu x . Sedangkan apabila koefisien nilainya diperbesar maka bentuk kurva *error* akan semakin tumpul dan nilai *error* juga akan semakin kecil untuk semua parameter. Pemberian nilai awal x , y dan y' yang tepat juga mempengaruhi bentuk kurva *error* pada kasus 2.

Kasus 3

$$y'' - 3y' - 4y = -8e^x \cos 2x$$

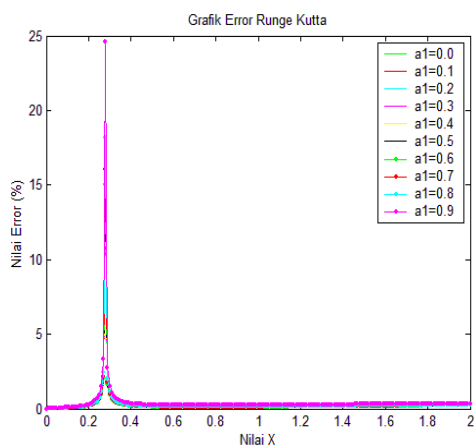
Dengan nilai $x_0 = 0, y(0) = 0$ dan $y'(0) = 1$

Hasil perhitungan solusi numerik dan solusi analitik dengan ukuran langkah $h = 0.1$ diperlihatkan dengan grafik sebagai berikut.:



Gambar 5 Grafik Solusi Analitik dan Solusi Numerik Kasus 3 dengan nilai parameter a_1 yang berbeda

Pada grafik dibawah dilakukan perhitungan dengan menggunakan ukuran langkah yang lebih kecil, yaitu $h = 0.01$. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat grafik berikut.



Gambar 6 Grafik nilai *error* kasus 3 untuk setiap nilai parameter a_1

Pada kasus 3 nilai *error* terbesar pada interval $0 \leq x \leq 2$ berada pada parameter $a_1 = 0.9$ yaitu pada titik $x = 0.27$. Pada titik tersebut nilai *error* mencapai 24.63. Untuk parameter lain, nilai *error* pada titik $x = 0.27$ juga mengalami kenaikan yang cukup tinggi dibandingkan dengan nilai *error* pada nilai x yang lain. Terjadinya nilai *error* yang sangat tinggi pada $x = 0.27$ dipengaruhi oleh bentuk fungsi $H(x)$ dari suatu persamaan diferensial. Pada kasus 3 fungsi $H(x)$ merupakan kombinasi dari fungsi trigonometri dan fungsi eksponensial natural. Apabila koefisien dari fungsi eksponensial natural pada kasus 3 diperbesar maka kurva *error* akan semakin cembung dan apabila koefisiennya diperkecil maka kurva *error* akan semakin lancip atau runcing dan mengalami pergeseran arah kiri sumbu x .

Analisis Error

Menganalisis *Error* sangat penting di dalam perhitungan menggunakan metode numerik. *Error* berasosiasi dengan seberapa dekat solusi hampiran terhadap solusi sejatinya. Semakin kecil *error*-nya, semakin teliti solusi numerik yang didapatkan. Dalam menganalisa *error*, ada dua hal yang harus dipahami yaitu, bagaimana *error* timbul dan bagaimana menghitung *error*.

Misalkan y adalah hampiran (solusi numerik) terhadap nilai sejati y_a (solusi analitik), maka selisih

$$\varepsilon = y_a - y$$

disebut *error*. Jika tanda *Error* (positif atau negatif) tidak dipertimbangkan, maka muncul istilah **error mutlak** yang didefinisikan sebagai

$$|\varepsilon| = |y_a - y|$$

Sayangnya, ukuran ε kurang bermakna sebab tidak menceritakan seberapa besar *error* itu dibandingkan dengan solusi analitiknya. Oleh karena itu, *error* harus dinormalkan terhadap solusi analiti

atau dalam persentase diperoleh

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{y_a} \times 100\%$$

Karena *error* dinormalkan terhadap nilai sejati (solusi analitik), maka *error* relatif tersebut dinamakan juga *error* relatif sejati. Pada pembahasan ini, penulis menjadikan *error* relatif berbentuk persentase.

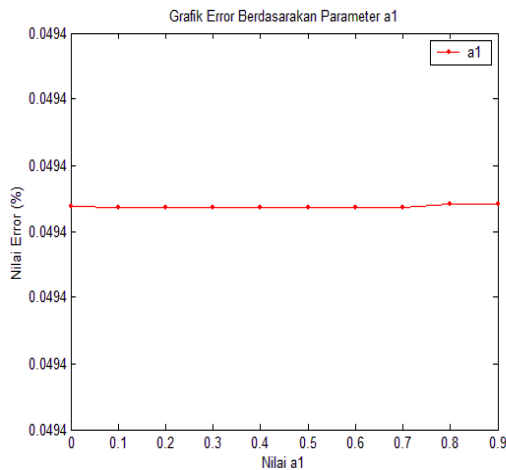
Pada bab ini akan dicari nilai nilai parameter yang memiliki *error* terkecil pada interval $0 \leq a_1 \leq 0,9$. Karena a_1 adalah bilangan riil, maka ada banyak bilangan yang berada pada interval tersebut. Maka dari itu dibatasi nilai a_1 terkecil adalah 10^{-4} . Untuk mencari nilai *error* terkecil pada interval tersebut maka dilakukan metode pencarian dengan algoritma berikut:

1. Definisikan ukuran langkah parameter, batas bawah dan atas. Kita misalkan ukuran langkah parameter adalah l , batas atas adalah c dan batas bawah adalah b .
2. Uji nilai *error* apakah nilai *error* selalu mengalami kenaikan atau penambahan dalam arti kurva nilai *error* menaik pada interval $b \leq a_1 < c$.
 - a. Jika iya, maka nilai *error* terkecil berada pada parameter $a_1 = b$ dan nilai *error* terbesar berada pada nilai parameter $a_1 = c - 10^4$. Proses iterasi dihentikan.
 - b. Jika tidak, lakukan langkah 2.
3. Uji nilai *error* apakah nilai *error* selalu mengalami penurunan nilai atau dalam arti kurva nilai *error* turun pada interval $b \leq a_1 < c$.
 - a. Jika iya, maka nilai *error* terkecil berada pada parameter $a_1 = c - 10^4$ dan nilai *error* terbesar berada pada nilai parameter $a_1 = b$. Proses iterasi dihentikan.
 - b. Jika tidak lakukan langkah 3.
4. Misalkan nilai terkecil adalah m . Jika nilai *error* pada parameter $a_1 = 0$ adalah e_1 . Maka kita misalkan $m = e_1$. Bandingkan muntuk setiap parameter a_1 . Apabila terdapat bilangan yang lebih kecil dari m maka bilangan itu menjadi m . Jika sudah dapat bilangan terkecil pada setiap parameter maka langkah 4.
5. Tentukan ukuran langkah yang baru dengan batas bawah $b = m - p$ dan batas atas $c = m + p$.
6. Tentukan ukuran langkah parameter yang baru dengan $p = p^{10^1}$.
7. Ulangi langkah 1.

Berdasarkan pengamatan dari perhitungan, dan dengan menggunakan algoritma diatas maka diperoleh hasil sebagai berikut.

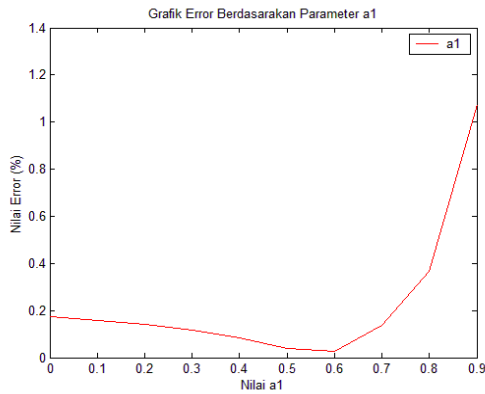
1. Pada kasus 1, nilai *error* relatif terkecil pada $x = 2$ berada pada $a_1 = 0.5$ yaitu $\varepsilon_r = 0.049449\%$. Nilai *error* pada parameter yang lain tidak jauh berbeda dengan nilai *error* pada $a_1 = 0.5$. Pada gambar dapat dilihat bahwa perubahn nilai *error* untuk parameter yang berbeda hampir membentuk kurva datar, dalam arti memiliki

perubahan nilai *error* yang sangat kecil. Apabila digunakan ukuran langkah $h = 0.1$, nilai *error* untuk setiap parameter tidak ada perbedaan. Semua parameter memiliki nilai *error* yang sama. Adapun grafik kurva *error* relatif pada $x = 2$ untuk setiap parameter a_1 adalah sebagai berikut

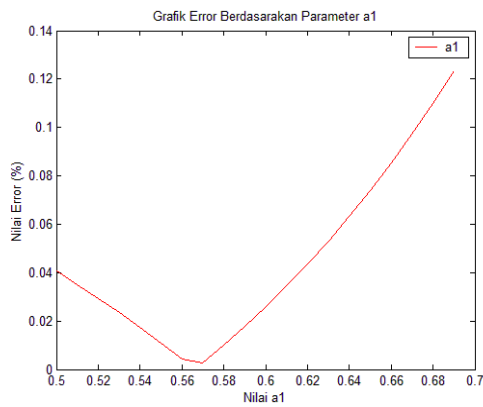


Gambar 7 Grafik Error Berdasarkan Nilai Parameter Pada Kasus 1

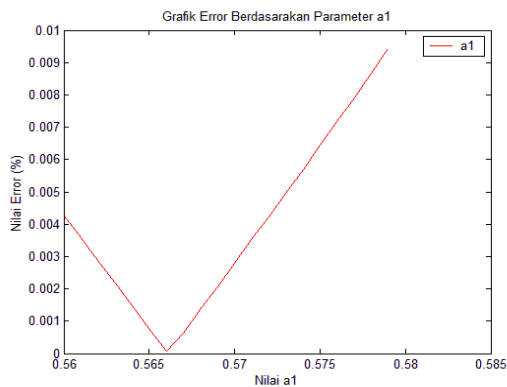
2. Berdasarkan algoritma pencarian nilai *error* terkecil maka pada kasus 2 diperoleh nilai *error* relatif terkecil pada $x = 2$ berada pada $a_1 = 0.5661$ yaitu $\varepsilon_r = 0\%$, Karena bentuk kurva tidak kurva yang selalu menaik atau kurva yang selalu turun maka proses pencarian nilai *error* terkecil sampai pada iterasi yang terakhir yaitu iterasi ke-4. Pada iterasi pertama yaitu pencarian nilai *error* terkecil pada interval $0 \leq a_1 < 1$ dimana ukuran langkah parameter adalah 0.1. Dari hasil perhitungan diperoleh nilai *error* terkecil pada $a_1 = 0.6$. (lihat gambar 3.11a). Pada iterasi kedua yaitu mencari nilai *error* terkecil pada interval $0.5 \leq a_1 < 0.7$ dimana ukuran langkah parameter menjadi 0.01. Dari hasil perhitungan diperoleh nilai *error* terkecil pada $a_1 = 0.57$. (lihat gambar 3.11b). Pada iterasi ketiga yaitu pencarian nilai *error* terkecil pada interval $0.56 \leq a_1 < 0.58$ dimana ukuran langkah parameter menjadi 0.001. Dari hasil perhitungan diperoleh nilai *error* terkecil pada $a_1 = 0.566$. (lihat gambar 3.11c) Pada iterasi keempat yaitu pencarian nilai *error* terkecil pada interval $0.565 \leq a_1 < 0.567$ dengan ukuran langkah menjadi 0.0001. Dari hasil perhitungan diperoleh nilai *error* terkecil pada $a_1 = 0.5661$ dengan nilai *error* yaitu $\varepsilon_r = 0\%$. (lihat gambar 4.11d). Untuk lebih jelasnya lihat gambar dibawah ini



Gambar 8 Grafik Error Berdasarkan Nilai Parameter Pada Kasus 2 (ukuran langkah = 0.1)

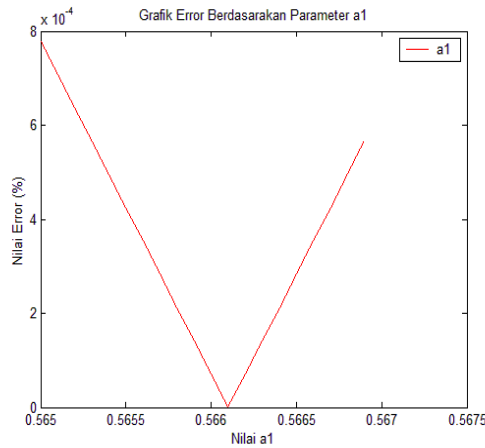


Gambar 9 Grafik Error Berdasarkan Nilai Parameter Pada Kasus 2 (ukuran langkah = 0.01)



Gambar 10 Grafik Error Berdasarkan Nilai Parameter Pada Kasus 2 (ukuran langkah = 0.001)

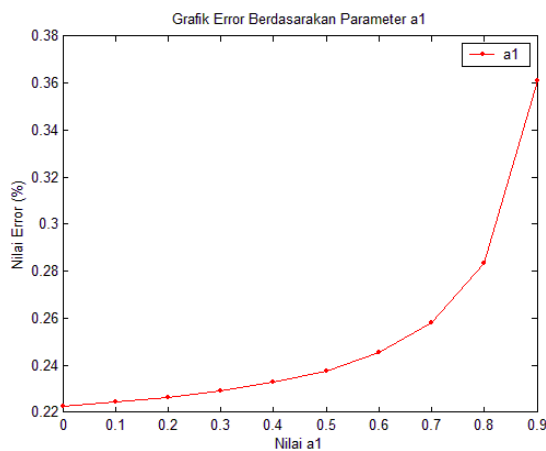
Pada Gambar 10 diperoleh *error* minimum berada pada $a_1 = 0.566$ dengan nilai *error* yaitu $\varepsilon_r = 0.000071\%$



Gambar 11 Grafik Error Berdasarkan Nilai Parameter Pada Kasus 2 (ukuran langkah = 0.0001)

Pada Gambar 11 diperoleh *error* minimum berada pada $a_1 = 0.5661$ dengan nilai error yaitu $\varepsilon_r = 0\%$

3. Pada kasus 3, nilai *error* relatif terkecil untuk $x = 2$ diperoleh pada nilai parameter $a_1 = 0.0$, adapun persentase *error* relatif terkecil yaitu $\varepsilon_r = 0.222685\%$. Sedangkan *error* relatif terbesar berada pada nilai $a_1 = 0.9$ yaitu dengan persentase $\varepsilon_r = 0.361192\%$. Setiap nilai parameter a_1 memiliki perbedaan nilai *error* yang berbeda. Nilai *error* relatif terus meningkat mulai dari parameter $a_1 = 0.0$ sampai parameter $a_1 = 0.9$. Pada kasus 3 nilai parameter juga mempengaruhi besar kecilnya nilai *error*. Adapun grafik kurva *error* relatif pada $x = 2$ untuk setiap parameter a_1 adalah sebagai berikut:



Gambar 12 Grafik Error Berdasarkan Nilai Parameter Pada Kasus

4. Kesimpulan

Dari penelitian yang telah dilakukan ini dapat diambil beberapa kesimpulan mengenai penyelesaian persamaan diferensial menggunakan metode Runge-Kutta Ordo-3.

1. Penyelesaian persamaan diferensial linier tingkat dua menggunakan metode Runge-Kutta yaitu dengan menjadikan persamaan diferensial linier tingkat dua menjadi suatu sistem persamaan diferensial. Dimana didalam sistem tersebut terdapat dua buah persamaan yang memiliki saling keterkaitan, yaitu persamaan diferensial linier tingkat dua yang dirubah menjadi dua persamaan diferensial tingkat satu.
2. Pada pembahasan skripsi ini, tidak diperoleh nilai parameter yang tetap untuk mendapatkan nilai *error* yang paling minimum pada setiap penyelesaian persamaan diferensial linier tingkat dua secara umum. Setiap parameter memiliki nilai *error* yang bervariasi pada masing-masing persamaan.
3. Pada penyelesaian persamaan diferensial linier tingkat dua menggunakan metode Runge-Kutta diperoleh solusi yang beragam dan nilai *error* yang berbeda-beda pada satu kasus yang sama. Hal ini dikarenakan metode Runge-Kutta tidak memiliki solusi yang tunggal, terkecuali Metode Runge-Kutta ordo satu. Besar kecilnya nilai *error* pada metode Runge-Kutta dipengaruhi oleh pemilihan nilai parameter dan ukuran langkah yang diberikan. Semakin kecil ukuran langkah yang diberikan maka semakin kecil nilai *error* yang dihasilkan. Selain itu, penentuan nilai awal x_0, y_0 dan y'_0 juga mempengaruhi besar kecilnya nilai *error*.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Birkhoff, G., and Rota, G.C. 1978. *Ordinary Differential Equations*, 3rd Edition. USA: John Wiley & Sons, Inc.
- [2] Marwan, dan Munzir, S. 2009. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- [3] Nugroho, D.B. 2011. *Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- [4] Ralston, A. 1978. *Runge-Kutta Methods with Minimum Error Bounds*. New Jersey: Stevens Institute of Technology.
- [5] Verner, J.H. 2010. *Numerically Optimal Runge-Kutta Pairs with Interpolants*.

- [6] Gerald, CF., and Wheatley, P., 2004. *Applied Numerikal Analysis*. 7th Edition. USA: Pearson Education, Inc.
- [7] Finizio, N., and Ladas, G. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Edisi Kedua. Terjemahan Santoso, Widiarti. Jakarta : Erlangga.