

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Matematika memiliki peranan penting dalam kehidupan terutama perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi. Matematika juga merupakan salah satu ilmu yang digunakan dalam menyelesaikan berbagai persoalan masalah. Salah satu persoalan membutuhkan peranan penting dalam matematika adalah teori graf.

Menurut catatan sejarah, masalah jembatan *Konigsberg* adalah masalah yang pertama kali menggunakan graf. Seorang matematikawan Swiss bernama L. Euler adalah orang pertama yang berhasil menemukan jawaban masalah tersebut dengan pembuktian yang sederhana. Ia memodelkan masalah tersebut ke dalam graf pada tahun 1736. Teori graf merupakan pokok bahasan yang sudah tua usianya, tetapi memiliki banyak terapan sampai saat ini (Munir 2005).

Teori graf juga merupakan cabang sains yang berkembang pesat, karena model-modelnya yang berguna untuk aplikasi yang luas, seperti masalah dalam transportasi, riset operasi, ilmu komputer, dan jaringan komunikasi. Teori graf juga banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari, antara lain bagan alir pengambilan mata kuliah, peta, rangkaian listrik, dan struktur organisasi. Selain itu, perkembangan teori graf juga didukung dengan berkembangnya salah satu cabang ilmu lain dalam matematika yaitu aljabar linier. Teori graf dan aljabar linear dapat dihubungkan dengan mengkaji representasi graf dalam suatu matriks.

Terdapat beberapa jenis graf, diantaranya graf teratur (*regular graphs*). Graf yang setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama. Graf lengkap K_n adalah graf teratur berderajat $(n - 1)$, graf lingkaran C_n juga merupakan graf teratur berderajat 2, dan graf kubik Q_n merupakan graf sederhana di mana setiap simpul memiliki derajat 3 (Gunnar Brinkmann dan D.McKay 2011).

Salah satu permasalahan dalam graf teratur (*regular graphs*) adalah menentukan nilai spektrumnya. Spektrum graf adalah kumpulan nilai eigen dan multiplisitasnya. Nilai eigen sangat penting untuk dicari karena manfaatnya sangat

luas dalam kehidupan sehari-hari. Aplikasi nilai eigen digunakan dalam persamaan gelombang, analisis getaran, teori optimasi, analisis sinyal suara dan mengamati perbedaan genotip. Namun, pada penelitian ini nilai eigen digunakan untuk menemukan pola spektrum dan mengkaji sifat graf terkait nilai eigen dari sifat graf teratur (Faiz dan Kurnia 2020).

Thulasiraman (2016), Spektrum dari graf G , dinotasikan dengan $Sp(G)$ dapat dituliskan dalam bentuk berikut ini

$$Sp(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_s \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_3 \end{bmatrix}$$

Dalam hal ini, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai eigen berbeda dari A , dengan $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$ dan m_1, m_2, \dots, m_n adalah banyaknya basis untuk ruang vektor eigen masing-masing λ , maka matriks berordo $(2 \times n)$ yang memuat $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ pada baris pertama dan m_1, m_2, \dots, m_n pada baris kedua disebut spectrum graf G .

Dalam menentukan spektrum graf dapat digunakan dengan berbagai metode misalnya menggunakan metode persamaan nilai karakteristik dan matriks sirkulan. Metode persamaan nilai karakteristik untuk mencari nilai eigen dengan menggunakan operasi baris elementer yang setiap baris elementer harus mengubah setiap matriks menjadi segitiga atas dengan membuat elemen segitiga menjadi 0 (Anton 1995). Sedangkan metode matriks sirkulan merupakan matriks yang berukuran $n \times n$ yang dibentuk oleh n vektor dengan mengubah urutan. Matriks sirkulan hanya memiliki satu input pada baris pertama yang setiap entrinya bergeser satu posisi ke kanan pada baris berikutnya. Mencari nilai eigen dengan

$$\lambda_r = \sum_{j=2}^n a_j \omega^{(j-1)r}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{Gray 2006}).$$

Penelitian yang berkaitan dengan spektrum antara lain dengan judul "Spektrum Graf Hyperoctahedral Melalui Matriks Sirkulan dengan Visual Basic 6.0" bahwa nilai eigen graf tersebut diperoleh dengan mengubah graf *hyperoctahedral* ke dalam bentuk matriks berketetanggaan yang harus membentuk pola matriks sirkulan. Hasil penelitian tersebut diperoleh nilai eigen

$\lambda_n = 0$ untuk n ganjil, $\lambda_n = -2$ untuk n genap, kecuali $2n$ dan $\lambda_{2n} = 2(n - 1)$, untuk $n = 1, 2, 3, \dots, 2n$ (Syafuruddin Side 2013).

Penelitian selanjutnya yang berkaitan dengan spectrum yaitu “*Spectrum Detour Graf n-Partisi Komplit*” dijabarkan dengan cara menggambar pola grafnya dan mencari matriks detournya, nilai eigen, dan vector eigen dari matriks tersebut, sehingga diperoleh pola spectrum detour (Dewi 2011)

Penelitian berikutnya juga berkaitan dengan spektrum yaitu dengan judul “*Properti Eigen Untuk Graf k-Regular Tak Terhubung*” bahwa pada graf regular tak terhubung dengan c komponen, nilai eigen k akan memiliki multiplisitas geometri c dan vektor u akan menjadi hasil kombinasi linear dari c buah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen k (Respitawulan 2017).

Dalam persoalan yang ada pada teori graf telah banyak para ahli matematika menelitinya, tetapi topik mengenai spektrum dalam suatu graf merupakan bahasan yang jarang diteliti, terutama menentukan spektrum graf teratur dengan menggunakan matriks sirkulan. Graf teratur yang akan dicari spektrumnya yaitu graf lengkap, graf lingkaran, dan graf kubik karena graf tersebut merupakan graf terhubung yang membentuk pola matriks sirkulan dan juga memiliki derajat yang sama pada setiap simpul sehingga pola spektrum relatif lebih mudah dicari dengan menggunakan metode matriks sirkulan. Dari matriks sirkulan tersebut, dilakukan analisis terhadap sifat-sifat yang ada pada graf.

Berdasarkan uraian di atas, peneliti tertarik untuk mengetahui kajian lebih jauh mengenai bentuk umum dari spektrum graf teratur (*regular graphs*) yakni graf lengkap K_n , graf lingkaran C_n dan graf kubik Q_n dengan menggunakan matriks sirkulan dan program MATLAB, sehingga judul skripsi penelitian ini adalah “**SPEKTRUM GRAF TERATUR (*REGULAR GRAPHS*) DENGAN MENGGUNAKAN MATRIKS SIRKULAN**”

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, maka rumusan masalah dalam penulisan penelitian ini adalah bagaimana menentukan spektrum dan pola spektrum graf teratur (K_n , C_n , dan Q_n) untuk mengkaji sifat graf terkait nilai eigen dari graf teratur?

1.3. Batasan Masalah

Agar pembahasan dalam penelitian ini tidak meluas, maka penulis membatasi penelitian ini yaitu graf teratur (*regular graphs*) hanya memuat tiga graf yaitu graf lengkap K_n , dimana $2 \leq n \leq 10$ untuk $n \in N$, graf lingkaran C_n , dimana $3 \leq n \leq 10$ untuk $n \in N$, dan graf kubik Q_n , dimana $4 \leq n \leq 10$ untuk $n \in N$. Adapun matriks yang digunakan untuk menentukan nilai eigen dan multiplisitasnya adalah matriks sirkulan dan program yang digunakan yaitu aplikasi MATLAB.

1.4. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penulisan penelitian ini adalah menentukan spektrum dan pola spektrum graf teratur (K_n , C_n , dan Q_n) untuk mengkaji sifat graf terkait nilai eigen dari graf teratur.

1.5. Manfaat Penelitian

Dengan diadakannya penelitian ini diharapkan dapat memberi manfaat sebagai berikut :

1. Bagi penulis, penelitian ini memberikan manfaat menambah pengetahuan penulis tentang penentuan spektrum dan memenuhi syarat kelulusan program studi Matematika S1 Unimed
2. Bagi pembaca menambah pengetahuan tentang langkah-langkah menentukan spektrum
3. Bagi Universitas Negeri Medan, hasil dari penelitian ini dapat digunakan sebagai bahan kepustakaan dalam matematika diskrit dan teori graf.