KOMPUTASI PERSAMAAN POISSON

Oleh

Alkhafi Maas Siregar
(Jurusan Fisika, FMIPA – Universitas Negeri Medan)

ABSTRAK

Metode komputasi dapat digunakan sebagai alternatif penyelesaian masalah fisik selain menggunakan cara fisika teori dan eksperimen. Pemahaman akan watak fung: dan operasi matematis membantu dalam membuat trik komputasi seperti yang tela dilakukan. Hasil komputasi yang sangat bersesuaian dengan hasil analitik (eksak diperoleh untuk jumlah persamaan n=100 dan ukuran langkah h=0.2.

Kata kunci : *Fisika teori, komputasi, operasi matematis, persamaan Poisson*

I. PENDAHULUAN

Perkembangan teknologi (khususnya komputer) telah membuat ilmu fisik mengalami kemajuan yang pesat. Kalau sebelumnya dikenal fisika teori yang mengkaj fisika berdasarkan analisis matematis analitik dan fisika eksperimen yang berlandaskaı pada interpretasi hasil-hasil pengukuran besaran fisis, maka fisika komputasi mengkaj masalah fisika berdasarkan hasil tinjauan komputasi numerik.

Komputasi mampu memberikan ramalan akurat terhadap beberapa masalal fisika, sehingga fisika komputasi tidak lagi hanya sekedar alat visualisasi atau simulas proses fisis agar nampak sederhana. Nobel fisika untuk K.G. Wilson dalam teor fenomena kritis *(critical phenomena)* memantapkan fisika komputasi sebaga pendekatan ketiga (selain fisika teori dan fisika eksperimen) dalam mempelajari fisika Terutama dengan meningkatnya kemampuan komputer, maka komputasi mampı memberikan hasil yang tidak berbeda dari cara analitik.

Press dalam perayaan 10 tahun CIP (*Computer in Physics*) mengingatkan bahwa dengan akan munculnya prosesor yang bekerja paralel (*multiple processor* atau *paralle machine*) , maka produktivitas saintis umumnya dan fisikawan khususnya akar meningkat bila dapat menguasai pemrograman parallel, seperti yang dapat dilakukan melalui Fortran. Karena itu penggunaan '*Total Environment*', meminjam istilah Press, semisal MATLAB, Mathematica, IDL dan lain-lain harus segera dipahami keterbatasannya.

Tulisan ini akan memberikan gambaran bagaimana penerapan fisika komputasi dalam membantu memecahkan masalah fisika. Disini akan ditunjukkan bahwa pemahaman yang mendalam terhadap watak-watak fungsi dan operasi matematis sangat diperlukan agar mampu melakukan trik atau teknik tertentu untuk menyelesaikan persoalan matematis yang rumit.

II. TINJAUAN PUSTAKA

A. Penyelesaian eksak

Persamaan differensial yang penting di dalam Fisika kebanyakan merupakan persamaan differensial orde-dua berikut :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2(x)y = S(x) \qquad (1)$$

dengan S suatu suku takhomogen dan k merupakan fungsi riil. Bila S=0 akan diperoleh persamaan Helmholtz, bila k dan S nol diperoleh persamaan Laplace, dan bila k nol, didapatkan persamaan Poisson.

Ditinjau potensial listrik Φ oleh distribusi muatan $\rho(\mathbf{r})$ yang memenuhi persamaan Poisson

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi\rho \qquad (2)$$

Karena simetri bola ρ dan Φ, persamaan (2) menjadi

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\Phi}{dr}\right) = -4\pi\rho \qquad (3)$$

Melalui subsitusi $\Phi(r) = r^{-1}\phi(r)$ diperoleh :

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} = -4\pi\, r\rho \qquad (4)$$

yang tak lain merupakan bentuk persamaan (1) dengan $k^2 = 0$ dan $S = -4\pi r\rho$.

Bila distribusi muatannya adalah

$$\rho(r) = \frac{1}{8\pi} e^{-r} \qquad (5)$$

diperoleh

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} = -\frac{1}{2}\, r\, e^{-r} \qquad (6)$$

dengan muatan totalnya

$$Q = \int \rho(r) d^3 r = \int_0^\infty \rho(r) 4\pi r^2 dr = 1 \tag{7}$$

maka solusi eksaknya adalah

$$\phi(r) = 1 - \frac{1}{2}(r+2)e^{-r} \tag{8}$$

dan tentu saja

$$\Phi(r) = \frac{1}{r} - \frac{1}{2r}(r+2)e^{-r} \tag{9}$$

Untuk nilai r yang besar $(r \to \infty)$, maka $\phi \to 1$, yang terkait dengan $\Phi \to r^{-1}$ dan untuk r = 0, maka $\phi = 0$ yang sekaligus merupakan syarat batasnya.

B. Metode Komputasi

Menurut Taylor, differensial orde-dua didekati dengan

$$y'' = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} \tag{10}$$

yang berarti membutuhkan tiga buah titik dengan ukuran langkah h. Ini akan membuat persamaan (6) menjadi

$$\frac{\phi_{n+1} - 2\phi_n + \phi_{n-1}}{h^2} = -\frac{1}{2} r_n e^{-r_n} \tag{11}$$

yang secara iteratif dapat memperoleh ϕ melalui

$$\phi_{n+1} = 2\phi_n - \phi_{n-1} + h^2\left(-\frac{1}{2} r_n e^{-r_n}\right) \tag{12}$$

Persamaan (12) ini merupakan suatu bentuk eksplisit yang memperoleh nilai baru dari nilai yang sebelumnya. Namun, karena adanya syarat batas yang diberikan menjadi sulit untuk memperoleh solusinya. Hal ini dapat dibandingkan dengan menggunakan metode 'shooting', sebagaimana persamaan (12), yang cocok digunakan untuk masalah syarat awal. Jadi, solusinya akan ditemukan dengan cara mengembangkannya sebagai berikut :

n = 1 $\qquad \phi_2 - 2\phi_1 + \phi_0 = -h^2 \frac{1}{2} r_1 e^{-r_1} = S_1$

n=2 $$\phi_3 - 2\phi_2 + \phi_1 = -h^2 \frac{1}{2} r_2 e^{-r_2} = S_2$$

dan selanjutnya hingga

n=N-1 $$\phi_N - 2\phi_{N-1} + \phi_{N-2} = -h^2 \frac{1}{2} r_{n-1} e^{-r_{N-1}} = S_{N-1}$$

n=N $$\phi_{N+1} - 2\phi_N + \phi_{N-1} = -h^2 \frac{1}{2} e^{-r_N} = S_N \qquad (13)$$

yang dapat dibentuk menjadi matriks

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & .0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \dots \\ \phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ S_N \end{bmatrix} \qquad (14)$$

Melalui bentuk matriks ini akan diperoleh solusi yang sesuai dengan intuisi fisis kita. Karena komputasi hanya akan mencari nilai diantara syarat batas yang kita berikan Untuk memperoleh solusi yang mendekati nilai eksak diperlukan jumlah persamaan yang sangat besar. Akan tetapi, bila matriks yang akan diselesaikan berukuran sangat besar, maka komputasinya menjadi tidak efisien. Karena itu diperlukan cara lain dalam penanganannya.

Bila diperhatikan, matriks yang diperoleh ini dominan secara diagonal, yang disebut matriks tridiagonal. Berdasarkan kenyataan bahwa matriks ini memiliki elemen nol yang sangat banyak, maka komputasi alih-alih diarahkan kepada penyelesaian sistem linier. Karena itu masalahnya akan diselesaikan secara iteratif kembali. Efisiensi yang besar diperoleh, karena terhindar dari bilangan nol yang sangat banyak. Iterasi Gauss-Seidel merupakan suatu pilihan. Bentuk umumnya adalah

$$x_i = \frac{\left[c_i - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij} x_j \right]}{a_{ii}} \qquad i = 1,2,\dots,n \quad ; \quad k = 1,\dots \qquad (15)$$

Algorithma Gauss-Seidel ini memerlukan tebakan awal untuk menjalankannya. Tebakan awal yang mendekati hasil yang sebenarnya akan mempercepat proses iterasi dan sebaliknya. Tergantung pada jumlah persamaan yang dipilih, banyaknya tebakan awal yang diperlukan otomatis akan diberikan. Implementasi dilakukan melalui bahasa pemrograman Fortran-77 dan '*dikompail*' pada sistem operasi Linux SUSE.

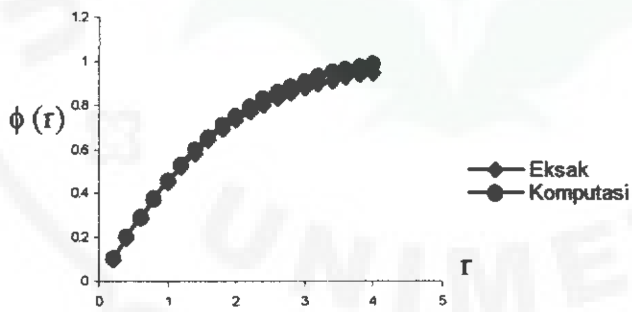
III. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Berikut ini diberikan contoh hasil running program untuk jumlah persamaan n = 20 dan ukuran langkah h = 0.2

Tabel 1. Hasil running untuk n=20 dan h=0.2

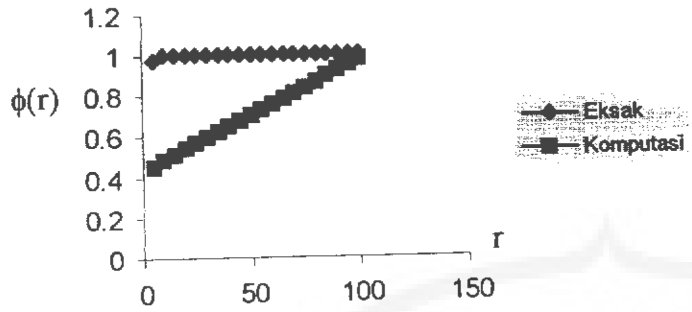
r	Hasil Eksak	Hasil Komputasi	r	Hasil Eksak	Hasil Komputasi
0.2	0.099396	0.101843	2.2	0.767313	0.791869
0.4	0.195616	0.200413	2.4	0.800421	0.827162
0.6	0.286545	0.293624	2.6	0.829171	0.858105
0.8	0.370939	0.380252	2.8	0.854056	0.885192
1	0.448181	0.459695	3	0.875532	0.908878
1.2	0.518089	0.531786	3.2	0.894018	0.92958
1.4	0.580785	0.596654	3.4	0.909892	0.947677
1.6	0.636586	0.654623	3.6	0.923494	0.963507
1.8	0.685932	0.706137	3.8	0.935125	0.977371
2	0.729329	0.751707	4	0.945053	0.989535

Hasil running ini kemudian diplot sebagai berikut :

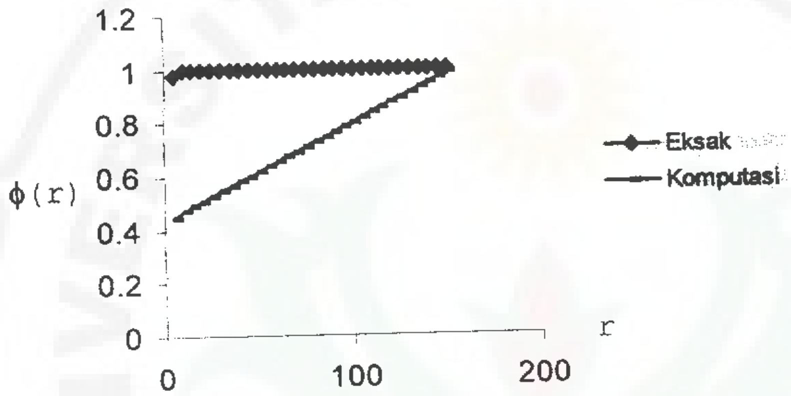


Gambar 1. Hasil running untuk n=20 dan h=0.2

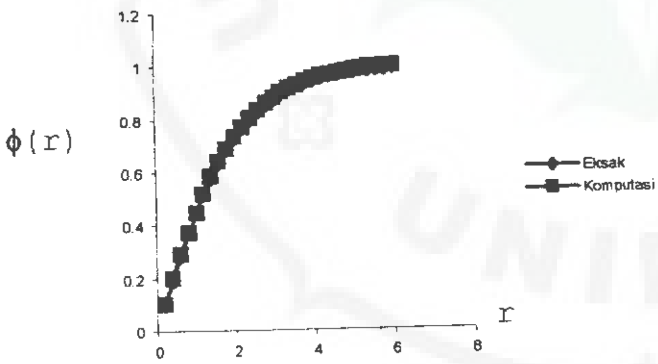
Hasil-hasil selanjutnya diperoleh sebagai berikut :



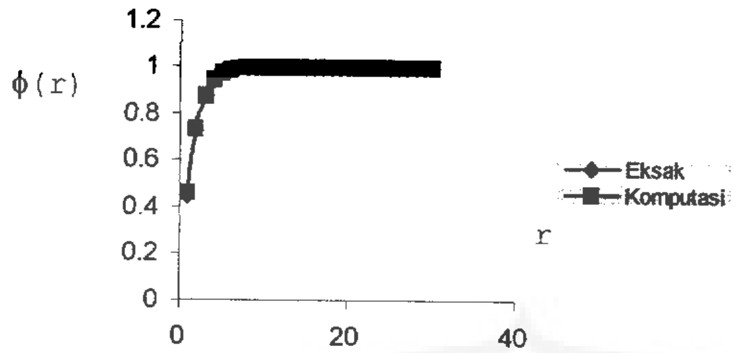
Gambar 2. Hasil untuk n=20 dan h=5



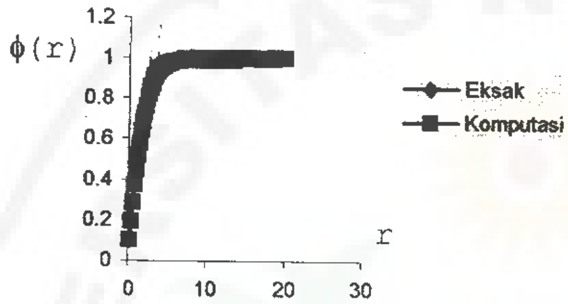
Gambar 3. Hasil untuk n=30 dan h=5



Gambar 4. Hasil untuk n=30 dan h=0.2



Gambar 5. Hasil untuk n=30 dan h=1



Gambar 6. Hasil untuk n=100 dan h=0.2

Di dalam masalah syarat batas ini, komputasi ditujukan untuk mencari nilai-nilai yang berada di antara kedua syarat batas yang diberikan, yakni phi_awal dan phi_akhir.

Program telah dicobakan untuk berbagai input yang berbeda. Gambar 1, untuk jumlah persamaan n=20 dan ukuran langkah h = 0.2 menunjukkan hasil yang belum bersesuaian hasil komputasi dan eksaknya. Ketidaksesuaian merupakan akibat dari sedikitnya jumlah persamaan yang diberikan. Variasi input yang diberikan menunjukkan perbaikan hasil komputasi.

Pada ukuran langkah yang besar, gambar 2 dan 3 terlihat ketidaksesuaian yang sangat mencolok antara hasil eksak dan komputasi. Pada ukuran langkah yang kecil, gambar 4 dan 5, hasil komputasi mendekati hasil eksaknya. Gambar 6 memperlihatkan untuk input persamaan yang besar hasil komputasi sangat bersesuaian dengan hasil eksaknya.

IV. KESIMPULAN

1. Metode komputasi dapat digunakan sebagai alternatif penyelesaian masalah fisika selain menggunakan cara fisika teori dan eksperimen.
2. Pemahaman akan watak fungsi dan operasi matematis membantu dalam membuat trik komputasi seperti yang telah dilakukan.
3. Hasil komputasi yang sangat bersesuaian dengan hasil analitik (eksak) diperoleh untuk jumlah persamaan n=100 dan ukuran langkah h=0.2.

DAFTAR PUSTAKA

Carnahan, Brice, 1990. *Applied Numerical Methods*, reprint edition, Robert E. Krieger Publishing Company, Inc., Florida

Koonin, steven E. dan Meredith, Dawn C.,1990. *Computational Physics*, fortran edition, Addison-Wesley Publishing Company, New York

Monro, Donald M., 1982. *Fortran 77*, Edward Arnold (Publishers) Ltd., London

Nurwantoro, Pekik, 2000. *Aspek-aspek Dasar Fisika Komputasi*, FMIPA-Fisika UGM, Yogyakarta

Press, W.H. and Teukolsky, S.A.,1997. *Numerical Recipes : Does This Paradigm Have a Future ?*, paper on CIPs Tenth Anniversary

Sitompul, Darwin, 1990. *Fortran 77 untuk Mikrokomputer*, cetakan pertama, Penerbit Erlangga, Jakarta

Lampiran : Listing program

```
        program Gauss_Seidl

        parameter (maks=200)
        double precision b(maks,maks),a(maks,maks),
                oldx(maks),x(maks),phi_eksak(maks)
        integer k,n,j,i

        Print *,'Berikan jumlah persamaan '
        read *,n
        Print *,'Ukuran langkah'
        read *,h

c       Memberikan input matriks
c       Syarat batas
        phi_awal=0.0d0
        phi_akhir=1.0d0

c       Memberikan input konstanta matriks
        r = h
        b(1,n+1)=-0.5*r*exp(-r)*h**2-phi_awal
        r = n*h
        b(n,n+1)=-0.5*r*exp(-r)*h**2-phi_akhir
c       print *,b(n,n+1)
        do 30 k=2,(n-1)
        r=k*h
        b(k,n+1)=-0.5*r*exp(-r)*h**2
 30     continue
                b(1,1)=-2
                b(1,2)=1
                b(2,1)=1
        do 40 k=2,n
                        b(k,k)= -2
                        b(k,(k-1))=1
                        b(k,(k+1))=1
        if(k.eq.n) b(n,n+1)=-0.5*r*exp(-r)*h**2-phi_akhir
40      continue

        nc=n+1
c       Print *,'Berikan kriteria konvergensi'
        read *,eps
        do 45 k=1,n
                do 42 j=1,nc
        a(k,j)=b(k,j)
42      continue
45      continue
```

```
c       Print *,'Berikan nilai coba'
        do 50 i=2,n
        coba=0.6
        x(i)=coba
50      continue


c       Prosedur Gauss_Seidel
75      count=0
        do 85 i=1,n
                oldx(i)=x(i)
                sum=0
        do 80 j=1,n
                if(j.eq.i) go to 80
                sum=sum+a(i,j)*x(j)
80      continue
        x(i)=(a(i,nc)-sum)/a(i,i)
        del=(oldx(i)-x(i))/x(i)
        if(abs(del).lt.eps) count=count+1
85      continue
c       go to 90
        if(count.eq.n) go to 90
        go to 75
90      do 100 j=1,n
                r=j*h
                phi_eksak(i)=1.0d0-0.5*(r+2.0d0)*exp(-r)

c       Mencetak hasil komputasi
        print 95,r,x(j)
95      format(1x,f15.8,1x,f15.8)

c       Mencetak hasil eksaknya
        print 97,r,phi_eksak(i)
97      format(1x,f15.8,1x,f15.8)
100     continue
        stop
        end
```