

**ANALISIS METODE RUNGE-KUTTA MENGGUNAKAN PROGRAM
KOMPUTER**
An Analysis Of Runge-Kutta Method By Computer Programs

Oleh
Drs.Syahyar M.S

Abstrak

Telah dirancang program komputer untuk penyelesaian berbagai model persamaan differensial menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 dan orde 5.

Setelah dilakukan uji coba terhadap 6 model persamaan differensial orde satu diperoleh bahwa: metode Runge-Kutta orde 5 lebih teliti dibandingkan orde 4, untuk ketelitian sampai 6 digit dan lebar segmen 0,1 kedua metode mempunyai ketelitian yang relatif sama, algoritma untuk metode Runge-Kutta orde tinggi relatif sama, algoritma untuk metode Runge-Kutta orde tinggi relatif lebih panjang langkahnya dibandingkan orde rendah.

Proses eksekusi program menggunakan PC-AT dan bahasa Pascal mempunyai unjuk kerja yang baik dan berjalan relatif cepat.

Numerical Calculation of differential equations have been carried out using computer programs.

The model of differential equations were calculated using fourth order Runge-Kutta Method and fifth order Runge-Kutta Method. To examine the accuracy and reliability of the numerical method employed, the program were tested to some models of differential equations.

Computation using PC-AT with Turbo Pascal gave Calculations with good precision and relatively fast execution time.

In general fourth order Runge-Kutta method has more precision then fifth order Runge-Kutta Method. Fourth order Runge-Kutta method has the same precision as fifth order Runge-Kutta Method for digits decimal point.

Kata Kunci: Runge-Kutta, Program Komputer.

Pendahuluan

Untuk melakukan analisis suatu gejala fisis maupun suatu sistem secara teoritis diperlukan studi tentang model matematis gejala fisis atau sistem tersebut. Melalui studi model matematis suatu sistem dapat diperoleh karakteristik sistem tersebut.

Model matematis suatu sistem melibatkan berbagai bentuk persamaan matematis, seperti bentuk matriks, fungsi nonlinear, bentuk integral, persamaan differensial dan lain sebagainya.

Secara umum bentuk model matematis dapat dibagi dua jenis yaitu bentuk analitis dan bentuk non analitis. Bentuk analitis artinya model matematis dapat diselesaikan secara eksak dengan rumus analitis. Bentuk non analitis artinya model matematis tidak dapat diselesaikan secara eksak, tetapi harus diselesaikan secara bertahap dengan pendekatan sehingga hasil yang diperoleh tidak eksak karena masih mengandung kesalahan. Untuk menyelesaikan model matematis non analitis non analitis biasanya digunakan metode numerik.

Metode numerik secara umum diselesaikan menggunakan program komputer, sebab metode numerik melibatkan langkah penyelesaian yang saling terkait dan berulang-ulang sampai diperoleh kondisi yang diinginkan (Chapra,1992). Program komputer untuk penyelesaian metode numerik banyak dijumpai dipasaran, namun untuk penyelesaian keperluan khusus maka program yang ada tersebut harus di desain ulang agar sesuai dengan kebutuhan.

Model matematis bentuk persamaan differensial cukup banyak dijumpai dalam sistem fisika seperti pada gerak paretikel, getaran, listrik magnet dan lain sebagainya.

Metode numerik untuk penyelesaian persamaan differensial yang banyak dipakai adalah metode Runge-Kutta. Metode Runge-Kutta terdiri dari beberapa bentuk yaitu orde dua, tiga, dan empat yang disebut orde rendah, selain itu disebut orde tinggi. Penelitian sahyar(1992) menyebutkan bahwa metode Runge-Kutta orde 4 mempunyai ketelitian cukup baik untuk penyelesaian berbagai model persamaan differensial.

Pertanyaan yang belum terjawab dengan metode Rung-Kutta adalah mengenai berapa besar ketelitian metode tersebut, bagaimana ketelitian metode tersebut bila dibandingkan antara orde rendah dengan orde tinggi.

Metode Runge-Kutta orde rendah dalam penelitian ini adalah orde empat dan untuk orde tinggi adalah orde lima yang disebut dengan Butcher.

Penelitian ini bertujuan untuk merancang program komputer yang mempunyai kemampuan untuk menyelesaikan berbagai model persamaan differensial dengan metode Runge-Kutta orde 4 dan orde 5.

Melalui uji coba program akan diperoleh ketelitian kedua metode desimal tertentu dan dapat diketahui metode mana lebih teliti.

Metode Penelitian

Penelitian dilakukan di Laboratorium Pendidikan Fisika FPMIPA IKIP Medan, pada bulan Maret 1997.

Penelitian ini menggunakan data teoritis yaitu data yang diperoleh dari model matematis persamaan diferensial, sehingga data tidak bersifat random atau acak. Sehubungan hal tersebut penelitian ini tidak menggunakan uji statistik tertentu.

Penelitian ini dilakukan dengan terlebih dahulu merancang program komputer yang mempunyai kemampuan untuk menyelesaikan persamaan diferensial menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 dan orde 5. Program komputer yang dirancang diuji cobakan terhadap berbagai model persamaan diferensial, meliputi model perkalian, pembagian, pemangkatan, eksponen, trigonometri, dan lain sebagainya.

Untuk dapat mengetahui ketelitian kedua metode maka model matematis yang digunakan adalah model analitis yaitu model yang dapat dikerjakan secara eksak. Galat relatif hasil perhitungan kedua metode dapat diperoleh dengan rumus:

Galat = $\frac{HN - HE}{HE}$, (Koonin, 1992).

HN = hasil secara numerik,

HE = hasil secara analitis atau hasil eksak.

Dengan menggunakan galat relatif dapat diperoleh, ketelitian metode Runge-Kutta orde 4 dan 5, metode mana yang lebih teliti dari kedua metode tersebut, dan sampai berapa digit kedua metode dapat dianggap mempunyai ketelitian yang sama.

Hasil Penelitian dan Pembahasan

Hasil Penelitian

Uji coba program komputer terhadap berbagai model matematis, menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 dan 5, hasilnya disajikan pada tabel berikut:

1. Model $dy/dx = (a \cdot x)/(b \cdot y)$

Koefisien a = 0,10,

Koefisien b = 0,30,

Besar interval = 0,10

Tabel 1.

X	EKSAK	RK ORDE 4	GALAT	RK ORDE 5	GALAT
0.10	1.0016653	1.0016653	0.0000000%	1.0016653	0.0000000%
0.20	1.0066446	1.0066446	0.0000001%	1.0066446	0.0000000%
0.30	1.0148892	1.0148892	0.0000003%	1.0148892	0.0000000%
0.40	1.0263203	1.0263203	0.0000005%	1.0263203	0.0000000%
0.50	1.0408330	1.0408330	0.0000007%	1.0408330	0.0000000%
0.60	1.0583005	1.0583005	0.0000010%	1.0583005	0.0000000%
0.70	1.0785793	1.0785793	0.0000012%	1.0785793	0.0000000%
0.80	1.1015141	1.1015141	0.0000014%	1.1015141	0.0000000%
0.90	1.1269428	1.1269428	0.0000016%	1.1269428	0.0000000%
1.00	1.1547005	1.1547005	0.0000017%	1.1547005	0.0000000%
1.10	1.1846237	1.1846237	0.0000018%	1.1846237	0.0000000%
1.20	1.2165525	1.2165525	0.0000018%	1.2165525	0.0000000%
1.30	1.2503333	1.2503333	0.0000019%	1.2503333	0.0000000%
1.40	1.2858201	1.2858201	0.0000018%	1.2858201	0.0000000%

Tabel 1 adalah hasil program komputer untuk model persamaan diffrensial $dy/dx = (a*x)/(b*y)$ koefisien $a = 0.10$, $b = 0.30$, besar interval = 0.10. Hasil komputasi menunjukkan untuk metode Runge-Kutta orde 4 mempunyai galat rata-rata = 0.000001%. Hal ini berarti untuk model matematis $dy/dx = (a*x)/(b*y)$ metode Runge-Kutta orde 5 lebih teliti dibandingkan orde 4. Kedua metode mempunyai ketelitian yang sama untuk ketelitian sampai 5 digit.

2. Model $dy/dx = a*x*b*y$

Koefisien $a = 0.10$,

Koefisien $b = 0.30$,

Besar interval = 0.10

Tabel 2

X	EKSAK	RK ORDE 4	GALAT	RK ORDE 5	GALAT
0.10	2.7186986	2.7186896	0.0000000%	2.7186896	0.0000000%
0.20	2.7199133	2.7199133	0.0000000%	2.7199133	0.0000000%
0.30	2.7219540	2.7219540	0.0000000%	2.7219540	0.0000000%
0.40	2.7248135	2.7248135	0.0000000%	2.7248135	0.0000000%
0.50	2.7284945	2.7284945	0.0000000%	2.7284945	0.0000000%
0.60	2.7330003	2.7330003	0.0000000%	2.7330003	0.0000000%
0.70	2.7383348	2.7383348	0.0000000%	2.7383348	0.0000000%
0.80	2.7445030	2.7445030	0.0000000%	2.7445030	0.0000000%
0.90	2.7515104	2.7515104	0.0000000%	2.7515104	0.0000000%
1.00	2.7593634	2.7593634	0.0000000%	2.7593634	0.0000000%
1.10	2.7680691	2.7680691	0.0000000%	2.7680691	0.0000000%
1.20	2.7776354	2.7776354	0.0000000%	2.7776354	0.0000000%
1.30	2.7880711	2.7880711	0.0000000%	2.7880711	0.0000000%
1.40	2.7993857	2.7993857	0.0000000%	2.7993857	0.0000000%

Tabel 2 adalah hasil program komputer untuk model persamaan diffrensial $dy/bx = a*x*b*y$ koefisien $a = 0.10$, $b = 0.30$, besar interval $= 0.10$. Hasil komputasi menunjukkan untuk metode Runge-Kutta orde 4 mempunyai galat rata-rata $= 0.0000000\%$ dan untuk metode Runge-Kutta orde 5 mempunyai galat rata-rata 0.0000000% . Hal ini berarti untuk model matematis $dy/dx = a*x*b*y$ kedua metode mempunyai ketelitian yang sama untuk ketelitian sampai 7 digit.

3. Model $dy/dx = a*x + b*(y/x)$

Koefisien $a = 0.10$

Koefisien $b = 0.30$

Besar interval $= 0.01$

Tabel 3

X	Y	RK ORDE 4	GLAT	RK ORDE 5	GLAT
0.00	0.001720	0.281778	0.000000 X	0.281778	0.000000 X
0.01	0.014263	0.316436	0.000000 X	0.316436	0.000000 X
0.02	0.030211	0.338218	0.000000 X	0.338218	0.000000 X
0.03	0.048223	0.348233	0.000000 X	0.348233	0.000000 X
0.04	0.067872	0.346524	0.000000 X	0.346524	0.000000 X
0.05	0.087337	0.333378	0.000000 X	0.333378	0.000000 X
0.06	0.106008	0.308089	0.000000 X	0.308089	0.000000 X
0.07	0.123371	0.270371	0.000000 X	0.270371	0.000000 X
0.08	0.138715	0.220715	0.000000 X	0.220715	0.000000 X
0.09	0.151732	0.160732	0.000000 X	0.160732	0.000000 X
0.10	0.161786	0.110786	0.000000 X	0.110786	0.000000 X
0.11	0.168268	0.080268	0.000000 X	0.080268	0.000000 X
0.12	0.170778	0.070778	0.000000 X	0.070778	0.000000 X
0.13	0.168878	0.078878	0.000000 X	0.078878	0.000000 X
0.14	0.163178	0.093178	0.000000 X	0.093178	0.000000 X
0.15	0.154268	0.114268	0.000000 X	0.114268	0.000000 X
0.16	0.142778	0.140778	0.000000 X	0.140778	0.000000 X
0.17	0.129268	0.170268	0.000000 X	0.170268	0.000000 X
0.18	0.114268	0.200268	0.000000 X	0.200268	0.000000 X
0.19	0.098268	0.230268	0.000000 X	0.230268	0.000000 X
0.20	0.081268	0.260268	0.000000 X	0.260268	0.000000 X

Tabel 3 adalah hasil program komputer untuk model persamaan diffrensial $dy/dx = (a*x) + b*(y/x)$ kofisien $a = 0.10$, $b = 0.30$, besar interval = 0.01. Hasil komputasi menunjukkan untuk metode Runge-Kutta orde 5 mempunyai galat rata-rata 0.000000%. Hal ini berarti untuk model matematis $dy/dx = (a*x)+b*(y/x)$ metode Runge-Kutta orde 5 lebih teliti dibandingkan orde 4. kedua metode mempunyai ketelitian yang sama untuk ketelitian sampai 5 digit.

4. Model $dy/dx = a + b*x^2$
 Koefisien $a = 0.10$
 Koefisien $b = 0.30$
 Besar interval = 0.10

Tabel - 4

X	Y	RK ORDE 4	GLAT	RK ORDE 5	GLAT
0.00	1.000000	1.000000	0.000000 X	1.000000	0.000000 X
0.10	1.030000	1.030000	0.000000 X	1.030000	0.000000 X
0.20	1.060000	1.060000	0.000000 X	1.060000	0.000000 X
0.30	1.090000	1.090000	0.000000 X	1.090000	0.000000 X
0.40	1.120000	1.120000	0.000000 X	1.120000	0.000000 X
0.50	1.150000	1.150000	0.000000 X	1.150000	0.000000 X
0.60	1.180000	1.180000	0.000000 X	1.180000	0.000000 X
0.70	1.210000	1.210000	0.000000 X	1.210000	0.000000 X
0.80	1.240000	1.240000	0.000000 X	1.240000	0.000000 X
0.90	1.270000	1.270000	0.000000 X	1.270000	0.000000 X
1.00	1.300000	1.300000	0.000000 X	1.300000	0.000000 X
1.10	1.330000	1.330000	0.000000 X	1.330000	0.000000 X
1.20	1.360000	1.360000	0.000000 X	1.360000	0.000000 X
1.30	1.390000	1.390000	0.000000 X	1.390000	0.000000 X
1.40	1.420000	1.420000	0.000000 X	1.420000	0.000000 X



Tabel 4 adalah program komputer untuk persamaan difrensial $dy/dx = a+b*x^2$ koefisien $a=0.10$, $b=0.30$, besar interval $=0.10$. Hasil komputasi menunjukkan untuk metode Rung-Kutta orde 4 mempunyai galat rata-rata $= 0.0000000\%$ dan untuk metode Runge-Kutta orde 5 mempunyai galat rata-rata 0.0000000% . Hal ini berarti untuk model matematis $dy/dx = a+b*x^2$ kedua metode mempunyai ketelitian yang sama untuk ketelitian sampai 7 digit.

5. Model $dy/dx = a*\sin(b*x)$

Koefisien $a = 0.10$
 Koefisien $b = 0.30$
 Besar interval $= 0.10$

Tabel 5

X	EXAK	RK ORDE 4	GLAT	RK ORDE 5	GLAT
0.10	0.668167	0.668167	0.000000 X	0.668167	0.000000 X
0.20	0.667269	0.667269	0.000000 X	0.667269	0.000000 X
0.30	0.666138	0.666138	0.000000 X	0.666138	0.000000 X
0.40	0.664780	0.664780	0.000000 X	0.664780	0.000000 X
0.50	0.663204	0.663204	0.000000 X	0.663204	0.000000 X
0.60	0.661422	0.661422	0.000000 X	0.661422	0.000000 X
0.70	0.659437	0.659437	0.000000 X	0.659437	0.000000 X
0.80	0.657253	0.657253	0.000000 X	0.657253	0.000000 X
0.90	0.654874	0.654874	0.000000 X	0.654874	0.000000 X
1.00	0.652305	0.652305	0.000000 X	0.652305	0.000000 X
1.10	0.649551	0.649551	0.000000 X	0.649551	0.000000 X
1.20	0.646617	0.646617	0.000000 X	0.646617	0.000000 X
1.30	0.643508	0.643508	0.000000 X	0.643508	0.000000 X
1.40	0.640229	0.640229	0.000000 X	0.640229	0.000000 X

Tabel 5 adalah hasil program komputer untuk persamaan difrensial $dy/dx = a*\sin(b*x)$ koefisien $a=0.10$, $b=0.30$, besar interval $=0.10$. Hasil komputasi menunjukkan untuk metode Runge-Kutta orde 4 mempunyai galat rata-rata $= 0.0000000\%$ dan untuk metode Runge-Kutta orde 5 mempunyai galat rata-rata 0.0000000% . Hal ini berarti untuk model matematis $dy/dx = a*\sin(b*x)$ kedua metode mempunyai ketelitian yang sama untuk ketelitian sampai 7 digit.

6. Model $dy/dx = a*\exp(b*x)$

Koefisien $a = 0.10$
 Koefisien $b = 0.30$
 Besar interval $= 0.10$



Tabel 6

	IK	4	URLAT	IK	ORDE 5	URLAT
0.10	1.3434948	1.3434948	0.0000000 X	1.3434948	0.0000000 X	
0.20	1.3639438	1.3639438	0.0000000 X	1.3639438	0.0000000 X	
0.30	1.3847248	1.3847248	0.0000000 X	1.3847248	0.0000000 X	
0.40	1.4058323	1.4058323	0.0000000 X	1.4058323	0.0000000 X	
0.50	1.4272781	1.4272781	0.0000000 X	1.4272781	0.0000000 X	
0.60	1.4490725	1.4490725	0.0000000 X	1.4490725	0.0000000 X	
0.70	1.4712268	1.4712268	0.0000000 X	1.4712268	0.0000000 X	
0.80	1.4937497	1.4937497	0.0000000 X	1.4937497	0.0000000 X	
0.90	1.5166408	1.5166408	0.0000000 X	1.5166408	0.0000000 X	
1.00	1.5409229	1.5409229	0.0000000 X	1.5409229	0.0000000 X	
1.10	1.5666068	1.5666068	0.0000000 X	1.5666068	0.0000000 X	
1.20	1.5937045	1.5937045	0.0000000 X	1.5937045	0.0000000 X	
1.30	1.6222289	1.6222289	0.0000000 X	1.6222289	0.0000000 X	
1.40	1.6522835	1.6522835	0.0000000 X	1.6522835	0.0000000 X	

Tabel 6 adalah hasil program komputer untuk model persamaan differensial $dy/dx = a + \exp(b \cdot x)$ koefisien $a=0.10$, $b=0.30$, besar interval = 0.10. Hasil komputasi menunjukkan untuk metode Rung-Kutta orde 4 mempunyai galat rata-rata 0.000000% dan untuk metode Runge-Kutta orde 5 mempunyai galat rata-rata 0.00000000%. Hal ini berarti untuk model matematis $dy/dx = a + \exp(b \cdot x)$ kedua metode mempunyai ketelitian yang sama ketelitian sampai 7 digit.

Pembahasan

Melalui hasil analisis data secara deskriptif, hal ketelitian kedua metode diperoleh :

- 1) Untuk model $dy/dx = (a \cdot x)/(b \cdot y)$, melalui Tabel 1 diperoleh, untuk besar segmen 0.1 metode Runge-Kutta orde 4 mempunyai galat relatif rata-rata 0.000001%, metode Runge-Kutta orde 5 mempunyai galat relatif 0.00000000%.
- 2) Untuk model $dy/dx = a \cdot x \cdot b \cdot y$, melalui Tabel 2 diperoleh, untuk segmen 0,1 metode Runge-Kutta orde 4 mempunyai galat relatif 0.00000000%, metode Runge-Kutta orde 5 mempunyai galat relatif 0.00000000%.
- 3) Untuk model $dy/dx = a \cdot x + b \cdot (y/x)$, melalui Tabel 3 diperoleh, untuk besar segmen 0.01 metode Runge-Kutta orde 4 mempunyai galat relatif 0.000005%, metode Runge-Kutta orde 5 mempunyai galat relatif 0.00000000%.
- 4) Untuk model $dy/dx = a + b \cdot x^2$, melalui Tabel 4 diperoleh, untuk besar segmen 0,1 metode Runge-Kutta orde 4 mempunyai galat relatif 0.00000000%, metode Runge-Kutta orde 5 mempunyai galat relatif 0.00000000%.

- 5) Untuk model $dy/dx = a \cdot \sin(b \cdot x)$, melalui Tabel 5 diperoleh, untuk besar segmen 0,1 metode Runge-Kutta orde 4 mempunyai galat relatif 0.0000000%, metode Runge-Kutta orde 5 mempunyai galat relatif 0,0000000%.
- 6) Untuk model $dy/dx = a \cdot \exp(b \cdot x)$, melalui Tabel 6 diperoleh, untuk besar segmen 0,1 metode Runge-Kutta orde 4 mempunyai galat relatif 0.0000000%, metode Runge-Kutta orde 5 mempunyai galat relatif 0.0000000%.

Kesimpulan dan Saran

Kesimpulan

Melalui Hasil Penelitian dan Pembahasan dapat disimpulkan bahwa program komputer yang dirancang mempunyai unjuk kerja yang baik dan proses yang relatif cepat. Secara umum metode Runge-Kutta orde 4 dan orde 5 mempunyai ketelitian yang cukup baik dengan galat relatif sekitar 0,000000% untuk lebar segmen :0,1. Untuk model persamaan differensial homogen (Tabel 3) diperlukan lebar segmen : 0,01 untuk mencapai galat relatif 0,0000000% dengan metode Runge-Kutta orde 5. Melalui seluruh pengamatan Tabel sampai dengan Tabel 6 diketahui bahwa metode Runge-Kutta orde 5 lebih teliti dibandingkan orde 4. Untuk perhitungan dengan ketelitian sampai 6 digit dan lebar segmen (besar interval) 0,1 kedua metode mempunyai ketelitian yang sama.

SARAN

Untuk keperluan analisis model matematis persamaan differensial dengan ketelitian sampai 6 desimal, metode Runge-Kutta orde 4 mempunyai ketelitian yang sama dengan orde5, sehingga lebih praktis menggunakan metode orde4. Lebar segmen 0,1 dan 0,01 memberikan ketelitian yang secara umum sama, sehingga dalam keperluan praktis lebih menggunakan lebar segmen 0,1.

Penelitian dapat dikembangkan dengan membandingkannya untuk metode numerik lainnya dalam penyelesaian persamaan differensial.

oooo0000oooo

DAFTAR PUSTAKA

- Chapra, S.C, (1991), Numerical methodes for engineers. New York : McGraw-Hill.
- Koonin, E.K, (1992), Computational physics. New Yok: Addison-Wesly.
- Sahyar, (1992), Analisis model matematis Getaran dengan metode Runge-Kutta. Medan : FPMIPA.
- Kadir, A, (1995). Pemrogram turbo pascal. Jakarta: ElexMedia Komputindo.

oooo0000oooo