BAB I
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Teori graf adalah salah satu cabang ilmu matematika yang dapat menyelesaikan permasalahan yang terjadi dalam dunia nyata. Jika suatu permasalahan dalam kehidupan nyata direpresentasikan ke dalam bentuk graf maka akan lebih mudah dipahami sehingga lebih mudah dicari penyelesaiannya.

Pada awalnya, teori graf diperkenalkan oleh seorang ahli matematika Swiss, Leonhard Euler pada tahun 1736 untuk mencari solusi permasalahan mungkin tidaknya melewati ketujuh jembatan di kota Königsberg (sekarang dikenal sebagai Kaliningrad, Jerman) dan kembali ke tempat asal semula tepat satu kali. Kemudian Leonhard Euler memodelkan permasalahan tersebut ke dalam model matematika berupa bagan yang terdiri dari simpul dan sisi. Simpul merepresentasikan kota yang dihubungkan oleh jembatan dan sisi sebagai jembatan yang menghubungkan kota. Model ini kemudian dikenal sebagai ”Teori Graf”.

Salah satu kajian dalam teori graf adalah dimensi metrik. Konsep dimensi metrik pertama kali diperkenalkan oleh Slater pada tahun 1975. Kemudian dilanjutkan oleh Harary dan Melter (1976) dalam jurnalnya yang berjudul *On the Metric Dimension of a Graph*. Pada jurnal itu diperkenalkan sebuah ide baru, yaitu representasi metrik yang merupakan suatu cara untuk merepresentasikan lokasi simpul pada suatu graf.

Representasi suatu simpul dianggap sebagai vektor atau koordinat yang menunjukkan lokasi simpul tersebut relatif terhadap subhimpunan yang dipilih. Karena pemilihan subhimpunan adalah sembarang, maka representasi yang dihasilkan tidak tunggal. Akan tetapi representasi yang baik harus memiliki sifat dimana tiap simpul memiliki vektor yang berbeda. Karena itu tidak semua pilihan subhimpunan yang tepat dapat menghasilkan suatu representasi dimana semua simpulnya memiliki vektor atau koordinat yang berbeda. Jika terjadi, maka subhimpunan tersebut merupakan himpunan pembeda (*resolving set*) (Melati 2011) .

Misalkan u dan v adalah simpul dalam graf terhubung G, jarak $d(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek antara u dan v pada G. Untuk himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, w_3, \ldots, w_k\}$ dari simpul-simpul dalam graf terhubung G dan simpul $v \in V(G)$, representasi dari v terhadap W adalah vektor-k $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \ldots, d(v, w_k))$. Jika $r(v|W)$ untuk setiap simpul $v \in V(G)$ berbeda, maka W disebut himpunan pembeda dari $V(G)$. Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pembeda minimum (basis metrik), dan kardinalitas dari basis metrik tersebut dinamakan dimensi metrik dari G dinotasikan $dim(G)$.

Kajian mengenai dimensi metrik bermanfaat dalam berbagai pengembangan ilmu pengetahuan. Chartrand (2003) telah mengaplikasikan himpunan pembeda dalam dimensi metrik pada bidang kimia untuk mengklasifikasi senyawa kimia. Senyawa kimia direpresentasikan dalam bentuk graf dengan asumsi atom sebagai simpul dan ikatan valensi antara dua atom sebagai sisi. Misalkan $V(G)$ adalah himpunan semua simpul terurut dengan $W \subseteq V(G)$. Dengan menghitung jarak setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap semua simpul $w \in W$, konsep himpunan pembeda memastikan setiap simpul $v \in V(G)$ mempunyai representasi berbeda. Jika dua senyawa berbeda mempunyai himpunan $V(G)$ dan jarak u ke w sama, untuk semua $v \in V(G)$ dan $w \in W$, maka kedua senyawa tersebut berada dalam satu klasifikasi. Khuller juga telah mengaplikasikan permasalahan dimensi metrik graf pada bidang navigasi robot dan pencarian (Khuller 1996). Selanjutnya Sebo mengaplikasikan dimensi metrik pada permasalahan optimasi kombinasi (Sebo 2004).

Penelitian mengenai dimensi metrik telah dilakukan oleh Hindayani pada tahun 2011. Hindayani (2011) meneliti dimensi metrik pada graf $K_r + mK_s$, $dim(K_r + mK_s) = m + (r - 2)$ untuk $m \geq 2, s = 1$ dan $dim(K_r + mK_s) = (s - 1)m + (r - 1)$ untuk $m, s \geq 2$. Selanjutnya Permana (2012) meneliti dimensi metrik pada graf pohon bentuk tertentu, diantaranya graf ulat teratur $dim(C_{m,n}) = m(n - 1)$ dengan $m \geq 1$ dan $n \geq 2$, graf kembang api teratur $dim(F_{m,n}) = m(n - 1)$ dengan $m, n \geq 2$, serta graf pohon pisang teratur $dim(B_{m,n}) = m(n - 2)$ dengan $m \geq 2$ dan $n \geq 3$.

Dimensi metrik pada kelas graf *friendship* F_n, graf *lollipop* $L_{m,n}$, dan graf Petersen $P_{n,m}$ belum ditentukan oleh para peneliti sebelumnya. Graf *friendship* F_n merupakan pengembangan dari graf lingkaran C_3 yang dikonstruksikan dengan menggabungkan graf lingkaran C_3 sebanyak n kali. Sedangkan graf *lollipop* $L_{m,n}$ merupakan pengembangan dari graf lengkap K_m, $m \geq 3$ dengan graf lintasan P_n yang mana kedua graf tersebut dihubungkan oleh jembatan. Selanjutnya graf Petersen diambil dari nama Peter Christian Julius Petersen pada tahun 1898. Graf Petersen adalah graf teratur berderajat 3 dan dinotasikan dengan $P_{n,m}$, dengan nilai n menyatakan banyaknya simpul luar yang sama dengan banyaknya simpul dalam dan nilai m menyatakan lompatan sisi dalam, dimana $n \geq 3$, $1 \leq m \leq \frac{n-1}{2}$.

Berdasarkan uraian diatas, penulis termotivasi untuk mengembangkan penelitian tentang dimensi metrik dengan judul **" Menentukan Dimensi Metrik dari Graf *Friendship* $\mathbf{F_n}$, Graf *Lollipop* $\mathbf{L_{m,n}}$ dan Graf Petersen $\mathbf{P_{n,m}}$".**

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang , dapat disusun perumusan masalah yaitu

1. Bagaimana dimensi metrik graf *friendship* F_n ?
2. Bagaimana dimensi metrik graf *lollipop* $L_{m,n}$?
3. Bagaimana dimensi metrik graf Petersen $P_{n,m}$?

1.3. Batasan Masalah

Pada penelitian ini, akan ditentukan dimensi metrik dari graf *friendship* F_n, graf *lollipop* $L_{m,n}$, dan graf Petersen $P_{n,m}$ dengan $m = 1$.

1.4. Tujuan Penelitian

Berdasarkan perumusan masalah, penelitian ini dilakukan dengan tujuan untuk

1. Menentukan dimensi metrik graf *friendship* F_n.
2. Menentukan dimensi metrik graf *lollipop* $L_{m,n}$.
3. Menentukan dimensi metrik graf Petersen $P_{n,m}$.

1.5. Manfaat Penelitian

Manfaat yang diperoleh dari penelitian ini yaitu dapat menentukan rumus umum dari dimensi metrik graf *friendship* F_n, graf *lollipop* $L_{m,n}$, dan graf Petersen $P_{n,m}$. Selanjutnya dapat digunakan sebagai sarana dalam mengaplikasikan dan mengembangkan ilmu pengetahuan yang telah diperoleh oleh penulis.