BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan diantara derivatif-derivatif yang dispesifikasikan pada suatu fungsi yang tidak diketahui nilainya dan diketahui jumlah serta fungsinya (Birkhoff, 1978). Persamaan diferensial biasa (PDB) adalah suatu persamaan diferensial yang terdiri dari satu variable bebas saja (Setiawan,2006).

Persamaan diferensial berperan penting dalam kehidupan, sebab banyak permasalahan pada dunia nyata dapat dimodelkan dengan bentuk persamaan diferensial. Ada dua jenis persamaan diferensial yang kita kenal, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah persamaan diferensial biasa. Solusi dari persamaan diferensial adalah fungsi spesifik yang memenuhi persamaan. Persamaan dibawah ini merupakan contoh dari persamaan diferensial biasa yang memiliki solusi. Pada persamaan dibawah ini, *x* merupkan variabel bebas dan *y* merupakan variabel terikat. *y* merupakan nama *unknown function* dari variabel *x*

.

Contoh:

1. $y' = xe^{3x} - 2y$

   Solusi:

$$y = \frac{1}{5}xe^{3x} - \frac{1}{25}e^{3x} + ce^{-2x}$$

2. $\left(y^2e^{xy^2} + 4x^3\right)dx + \left(2xye^{xy^2} - 3y^2\right)dy = 0$

   Solusi:

$$y = e^{xy^2} + x^4 - y^3 + c$$

Tidak semua permasalahan yang dimodelkan ke bentuk persamaan diferensial biasa dapat diselesaikan dengan mudah, bahkan terdapat suatu persamaan diferensial yang tidak dapat diselesaikan secara analitik. Oleh kerena itu, metode numerik digunakan untuk menyelesaikan persoalan dimana perhitungan secara analitik tidak dapat digunakan. Metode numerik ini berangkat dari pemikiran bahwa permasalahan dapat diselesaikan dengan menggunakan pendekatan-pendekatan yang dapat dipertanggungjawabkan secara analitik.

Dengan menggunakan metode pendekatan, tentu setiap nilai hasil perhitungan akan mempunyai nilai *error* (nilai kesalahan). Dalam analisa metode numerik, kesalahan ini menjadi penting. Karena kesalahan dalam pemakaian algoritma pendekatan akan menyebabkan nilai kesalahan yang besar, tentunya ini tidak diharapkan. Sehingga pendekatan metode analitik selalu membahas tingkat kesalahan dan tingkat kecepatan proses yang akan terjadi.

Penyelesaian suatu model matematika secara numerik memberikan hasil aproksimasi atau pendekatan yang berbeda dengan penyelesaian secara analitis. Adanya perbedaan inilah yang sering disebut sebagai error (kesalahan). Hubungan antara nilai eksak, nilai perkiraan dan error dapat dirumuskan sebagai berikut:

Nilai eksak = aproksimasi + error

Dengan menyusun kembali persamaan di atas, diperoleh definisi dari kesalahan absolut (absolute error), yaitu:

Kesalahan absolut = nilai eksak – aproksimasi

Metode Runge-Kutta memperoleh akurasi dari pendekatan deret Taylor tanpa memerlukan perhitungan derivatif yang lebih tinggi. Metode Runge-Kutta dikembangkan oleh dua ahli matematika Jerman. Mereka adalah Runge dan Kutta. Metode ini juga dibedakan dengan ordo-ordonya.

Banyak variasi dari metode Runge-Kutta, namun secara umum bentuknya adalah:

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{j-1}^{n} a_j k_j$$

Dengan$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ adalah konstanta dan $k$adalah :

$$k_j = f\left(x_i + hp_j, y_i + h \sum_{l=1}^{j-1} q_{jl} k_l\right)$$

$$p_1 = 0$$

Dimana diperoleh

$k_1 = f(x_{i,} y_i)$

$k_2 = f(x_1 + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 . h)$

$k_3 = f(x_1 + p_3 h, y_i + q_{31} k_1 + q_{32} k_2 . h)$

$\vdots$

$k_n = f\big(x_1 + p_n h, y_i + q_{n1} k_1 + q_{n2} k_2 + \cdots + q_{n(n-1)} k_{(n-1)} . h\big)$

a, q dan p merupakan parameter-parameter yang terdapat pada metode Runge-Kutta. Nilai parameter a dipilih sedemikian rupa sehingga meminimumkan error per langkah, dan persamaan metode Runge-Kutta akan sama dengan metode deret Taylor dari ordo setinggi mungkin. Perhatikan bahwa k adalah hubungan yangselalu berulang, k_1 hadir dalam persamaan untuk k_2, k_2 hadir dalam persamaan k_3,danseterusnya..

Pada metode numerik ordo-2 terdapat empat parameter yang memiliki keterkaitan dimana dalam hal ini membuat metode Runge-Kutta tidak memiliki solusi yang unik. Solusi metode Runge-Kutta bergantung pada pemilihan nilai parameter yang diberikan. Pemilihan nilai parameter juga mempengaruhi besar-kecilnya nilai *error*. Oleh karena itu penulis mengambil judul "**PENGARUH PERUBAHAN NILAI PARAMETER TERHADAP NILAI *ERROR* PADA METODE RUNGE-KUTTA ORDO-3".** Karena untuk mendapatkan hasil perhitungan suatu data yang akurat, nilai *error* yang harus diperoleh harus seminimum mungkin. Sedangkan untuk mendapatkan *error* minimum nilai parameter yang kita pergunakan harus sesuai dengan data yang kita peroleh.Untuk itulah penelitian ini sangat perlu untuk dilakukan.

1.2 Perumusan Masalah

Dari latar belakang ada beberapa masalah yaitu :

1. Bagaimana solusi persamaan diferensial biasa secara analitik dan numerik yaitu menggunakan metode Runge-Kutta Ordo-3.
2. Bagaimana nilai kesalahan metode Runge-Kutta Ordo-3 terhadap perubahan nilai parameter yang diberikan.
3. Bagaimana pengaruh perubahan nilai salah satu parameter secara increament terhadap nilai kesalahan yang diperoleh.

1.3 Pembatasan Masalah

Adapun batasan-batasan masalah dalam melakukan penelitian ini antara lain:

1. Metode Runge Kutta yang digunakan adalah Metode Runge-Kutta Ordo-3
2. Persamaan diferensial yang diselesaikan pada tulisan ini adalah persamaan diferensial biasa yaitu persamaan diferensial linier tingkat dua yang memiliki solusi eksak.
3. Persamaan diferensial yang digunakan adalah Persamaan diferensial linier tingkat dua dengan melakukan pendekatan terhadap metode Runge-Kutta Ordo-3
4. Menggunakan alat bantu matlab
5. Perubahan salah satu parameter yang digunakan adalah perubahan secara meningkat (*increament*) dengan selang iterasi sebesar 0.0001.
6. Karena nilai parameter a_1 adalah bilangan rill maka yang memenuhi persamaan $a_1 + a_2$ ada banyak bilangan rill yang memenuhi persamaan

tersebut. Oleh karena itu , penulis membatasi nilai parameter $a_1$pada interval $0 \leq a_1 < 1$

1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk menetukan nilai parameter yang menghasilkan nilai *error* terkecil pada penyelesaian persamaan diferensial linier tingkat dua menggunakan metode Runge-Kutta Ordo-3

1.5 Manfaat Penelitian

Selain menambah literatur dalam bidang komputasi, tulisan ini juga dapat menambah wawasan bagi masyarakat terutama mahasiswa tentang penyelesaian persamaan diferensial biasa menggunakan metode Runge-Kutta khususnya metode Runge-Kutta Ordo-3 dan penggunaan parameter yang paling efisien pada Runge-Kutta sehingga mendapatkan nilai *error* yang lebih kecil.