PENERAPAN CARA KOFAKTOR DAN PERMUTASI-INVERSI UNTUK MENGHITUNG DETERMINAN MATRIKS BUJUR SANGKAR ORDE TINGKAT TINGGI.

Oleh
Drs. Asmin, M.Pd.

A. Pendahuluan

Determinan matriks merupakan salah satu materi kajian mata dari Aljabar Linier dan yang juga merupakan bagian dari matematika yang banyak diterapkan dalam kehidupan sehari-hari khususnya dalam perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi yang berkembang di era globalisasi saat ini, dan masa yang akan datang. Manfaat perkuliahan Aljabar Linier harus mampu digunakan menjangkau ke masa depan dengan pengalaman belajar yang penuh bervariasi di kelas yang dalam hal ini variasi cara untuk membantu mahasiswa menghitung determinan sebuah matriks bujur sangkar, khususnya di atas orde tiga, yang secara umum merupakan masalah yang dihadapi mahasiswa, sebab untuk orde dua dan tiga hal ini sudah biasa mereka hitung dengan mudah. Menurut Howrd Anton (1985), sebelum kita menggunakan determinan secara khusus terlebih dahulu kita mengenalkan pemanfaatan determinan dengan menggunakan bentuk permutasi yang berlaku secara umum. Sementara menurut Hoffman dan Kunze (1984), ada dua alasan penting yang perlu diperhatikan dalam determinan ini, pertama, kita perlunya menyikapi mengembangkan determinan pada matriks polinomial, dan kedua, dalam hal perhatian terhadap determinan yang kita tampilkan, mestinya sebuah aksioma harus diterapkan, misalnya bagaimana sebuah aksioma menjamin perkalian sebuah invers yang mengandung unsur-unsur yang tidak nol. Kemampuan menghitung determinan matriks bujur sangkar orde tingkat tinggi bagi mahasiswa sangat doperlukan sebab hal ini perlu untuk memberi peluang bagi setiap individu untuk manjadi salah satu pamicu peningkatan prestasi dalam pemanfaatannya baik dalam menentukan invers matriks, maupun untuk menentukan koefisien persamaan regresi yang banyak dipakai sebagai alat prediksi maupun pada penelitian. Di samping itu, penyampaian/metode perkuliahan yang menyangkut penentuan hasil determinan bujur sangkar orde tingkat tinggi diharapkan mampu melahirkan kepedulian mahasiswa terhadap penggunaan matode dan teknik yang bervariasi, khususnya penggunaan *kofaktor,* maupun *permutasi dan inersi,* serta cara reduksi mungkin dapat digunakan sebagai salah satu alternatif penyelesaian yang dianggap lebih mudah dalam menentukan sebuah determinan matriks bujur sangkar orde tingkat tinggi.

B. Pengertian Determinan.

Deteminan sangat banyak dibicarakan dalam kajian operasi matriks bujur sangkar sebab dalam mencari penyelesaian matriks masalah khususnya matriks bujur sangkar berorde tingkat tinggi diatas orde 3 x 3) akan sangat sulit dilakukan.

Untuk setiap matriks bujur sangkar bertipe nxn yang dikaitkan secara tunggal dengan suatu bilangan nyata dinamakan *determinan.* Determinan untuk matriks A dilambangkan dengan *det A* atau $|A|$. Secara umum jika diketahui matriks A berode n x n

$$\text{atau ditulis } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ sehingga det A} = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Menurut Setiaji (1990) bahwa determinan adalah suatu fungsi dengan domain himpunan matriks-matriks bertipe n x n dengan range himpunan bilangan riil dengan aturan untuk menentukan determinan tersebut. Sementara menurut Rusefendi (1989) bahwa sekumpulan bilangan sebanyak n^2 dapat disusun dalam bentuk matriks bujur sangkar

n x n, A_n sebagai berikut: $A_1 = (a_{11})$, $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

dan seterusnya. Determinan $|A_i|$ (dimana i merupakan bilangan asli) dari matriks bujur sangkar *A*, dan derajat determinan: $|A_1|$, $|A_2|$, dan $|A_3|$ ... $|A_n|$ masing-masing 1,2,3,...n

C. Cara Menghitung Determinan.

Seperti telah dikemukakan pada pendahuluan, bahwa ada beberapa alternatif cara yang digunakan untuk menentukan deternimam matriks bujur sangkar orde tingkat tinggi yaitu dengan *cara kofaktor,* dan *cara permutasi dan inversi.* Cara yang pertama merupakan cara yang paling banyak dikenal dan dipakai, sebab untuk menentukan determinan matriks bujur sangkar orde 2 x 2, dan orde 3 x 3 cara ini dianggap lebih praktis, sementara cara kedua belum begitu dikenal, karena belum begitu populer digunakan, walaupun sebenarnya cara kedua ini tidak kalah praktisnya untuk dipakai. Hal ini belum pernah diteliti dan dibandingkan tentang kepraktisan dari kedua metode tersebut. Seperti dikemukakan Anton (1985) bahwa kerja kita mengenai fungsi determinan akan mempunyai pemakaian-pemakaian penting kepada teori sistem-sistem persamaan linier dan akan membawa kita juga kepada sebuah rumus ekspisit untuk invers dari sebuah matriks yang dapat dibalik.

D. Cara Cofaktor Menghitung Determinan.

Pandanglah suatu unsur aij dari matriks $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Jika pada matriks A baris ke-i dan kolom ke-j dihilangkan maka kita mendapatkan *submatriks* berukuran (n-1) x (n-1). Determinan submatriks ini disebut dengan *minor unsur aij* dan dilambangkan dengan *Mij*. Selanjutnya $(-1)^{i+j}$*Mij* dinamakan *cofaktor* dan dilambangkan dengan Cij. Jadi Cij = $(-1)^{i+j}$ *Mij*. Menurut Anton (1985), bahwa determinan sebuah matriks A berukuran nxn dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri di dalam suatu baris (atau kolom) dengan cofaktor-cofaktor nya dan menambahkan hasil-hasil perkalian yang dihasilkan; yakni untuk setiap $1 \le i \le n$, dan $1 \le j \le n$, sehingga:

$$1 \le j \le n, \text{ sehingga: } \det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij} \text{ atau}$$

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$$

Misalnya:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 8 & 7 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = ?$$

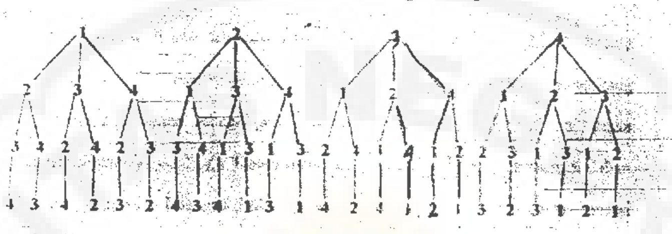
$$\begin{vmatrix} 2 & -7 & 0 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & -5 & 0 \\ 5 & 4 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 8 & -5 & 0 \\ 4 & 9 & 6 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & -5 & 0 \\ 5 & 9 & 6 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 8 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 8 & -5 \\ 5 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 2[-2(-30)-3(48)+2(72+20)]-7[-30-3(24)+2(36+25)]-7[(72+20)+2(36+25)+3(16-40)]$$

$$= 200-140-994 = -934$$

E. Cara Permutasi dan Inversi Menghitung Determinan

Menurut Anton (1985), salah satu metoda yang mudah menentukan determinan dengan cara sistematis adalah dengan mendaftarkan permutasi-permutasi, adalah dengan menggunakan sebuah *diagram pohon* Metoda ini akan dilukiskan sebagai berikut. Susunlah semua permutasi yang mungkin dari himpunan bilangan bulat {1,2,3,4}, Caranya adalah sebagai berikut. Lihat diagram pohon ini.



Dari diagram pohon di atas terlihat bahwa keempat titik yang bertanda 1,2,3,4 di atas gambar tersebut menyatakan pilihan yang mungkin untuk angka pertama di dalam permutasi. Ketiga cabang yang berasal dari titik ini menyatakan pilihan yang mungkin untuk kedudukan kedua di dalam permutasi. Jadi jika permutasi (2,-,-,-) maka ketiga kemungkinan untuk kedudukan kedua adalah 1,3 dan 4. Kedua cabang yang berasal dari setiap titik didalam kedudukan kedua menyatakan pilihan yang mungkin untuk kedudukan ketiga. Jadi jika permutasi mulai (2,3,-,-), maka kedua pilihan yang mungkin untuk kedudukan ketiga adalah 1, dan 4. Akhirnya cabang tunggal yang berasal dari setiap titik dalam kedudukan ketiga menyatakan satu-satunya pilihan yang mungkin untuk kedudukan ke empat. Jadi jika permutasi mulai (2,3,4,-), maka satu-satunya pilihan untuk kedudukan keempat adalah 1. Permutasi-permutasi yang berbeda-beda sekarang dapat di daftarkan dengan menelusuri semua jalan mungkin melalui "pohon" tersebut dari kedudukan pertama sampai ke kedudukan terakhir. Kita mendapatkan daftar yang berikut menurut proses ini.

(1,2,3,4)	(2,1,3,4)	(3,1,2,4)	(4,1,2,3)
(1,2,4,3)	(2,1,4,3)	(3,2,4,2)	(4,1,3,2)
(1,3,2,4)	(2,1,4,3)	(3,2,1,4)	(4,2,1,3)
(1,3,4,2)	(2,3,4,1)	(3,2,4,1)	(4,2,3,1)
(1,4,2,3)	(2,4,1,3)	(3,4,1,2)	(4,3,1,2)
(1,4,3,2)	(2,4,3,1)	(3,4,2,1)	(4,3,2,1)

Dari permutasi di atas tampak bahwa pada 24 permutasi dari {1,2,3,4}. Secara umum: himpunan (1,2.....,n) akan mempunyai $n(n-2.1)=n!$ buah permutasi yang berbeda. Untuk menyatakan sebuah permutasi umum dari himpunan {1,2....,n}, maka kita akan menuliskan $(j_1,j_2,\ldots,j_n)$ Disini j_1 adalah bilangan bulat yang pertama di dalam permutasian, j_2 adalah bilangan bulat yang kedua, dan seterusnya. Sebuah inversi (inversion) dikatakan terjadi dalam sebuah permutasi $(j_1,j_2,\ldots,j_n)$ bilamana sebuah bilangan bulat yang lebih besar mendahului bilangan bulat yang lebih kecil. Jumlah inversi seluruhnya yang terjadi didalam sebuah permutasi dapat diperoleh sebagai berikut

1) Carilah banyaknya bilangan yang lebih kecil dari j_1 dan yang mengikuti j_1 dalam permutasi tersebut.
2) Carilah banyaknya bilangan yang lebih kecil dari j_2 dan yang mengikuti j_2 dalam permtasi tersebut
3) Teruskan proses perhitungan ini untuk $j_3,\ldots,j_{n-1}$

Jumlah bilangan-bilangan ini akan sama dengan jumlah inversi seluruhnya di dalam permutasi tersebut. Andaikan banyaknya inversi di dalam permutasi-permutasi yang berikut. (i) (6,1,3,4,5,2) (ii) (2,4,1,3) (iii) (1,2,3,4), maka :

(i) Banyaknya inversi adalah 5 + 0 + 1 + 1 + 1 = 8
(ii) Banyaknya inversi adalah 1 + 2 + 0 = 3
(iii) Tidak ada inversi di dalam permutasi ini.

Sebuah permutasi dinamakan genap (even) jika inversi seluruhnya adalah sebuah bulangan bulat yang genap dan dinamakan ganjil (odd) jika jumlah inversi seluruhnya adalah sebuah bilangan bulat yang ganjil.

Permutasi	Banyaknya inversi	Klasifikasi
(1,2,3)	0	genap
(1,3,2)	1	genjil
(2,1,3)	1	genjil
(2,3,1)	2	genap
(3,1,2)	2	genap
(3,2,1)	3	ganjil

Untuk matriks bujur sangkar orde 4 x 4 hasil yang diperoleh adalah:

Permutasi	banyak inversi	Klasifikasi
(1,2,3,4)	0	genap
(1,2,3,4)	1	ganjil
(1,3,2,4)	1	ganjil
(1,3,4,2)	2	genap
(1,4,2,3)	2	genap
(1,4,3,2)	3	ganjil
(2,1,3,4)	1	ganjil
(2,1,4,3)	2	genap
(2,3,1,4)	2	genap
(2,3,4,1)	3	ganjil
(2,4,1,3)	3	ganjil
(2,4,3,1)	4	genap
(3,1,2,4)	2	genap
(3,1,4,2)	3	ganjil
(3,2,1,4)	3	ganjil
(3,2,4,1)	4	genap
(3,4,1,2)	4	Genap
(3,4,2,1)	5	ganjil
(4,1,2,3)	3	ganjil
(4,1,2,3)	4	genap
(4,3,2,1)	4	genap
(4,2,3,1)	5	genjil
(4,3,1,2)	5	ganjilk
(4,3,2,1)	6	genap

Untuk matriks bujur sangkar orde bujur sangkar orde 4 x 4 maka ada $4! = 24$ cara sehingga diperoleh :

Tinjaulah matriks $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Yang kita artikan dengan hasil perkalian elementer dari A adalah setiap hasil perkalian n entri dari A. yang tidak boleh dua diantaranya yang berasal dari baris yang sama atau dari kolom yang sama. Selanjutnya daftarkanlah semua perkalian dari matriks-matriks.

$$\text{(i)} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{(ii)} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

(i) Karena setiap hasil perkalian elementer mempunyai dua faktor, dan karena setiap faktor berasal dari baris yang berbeda, maka sebuah hasil kali elementer dapat dituliskan dalam bentuk:

$$a_{1\_}a_{2\_}$$

dimana titik kosong menandakan nomor kolom. Karena tidak ada dua faktor di dalam hasil perkalian tersebut berasal dari kolom yang sama nomor kolom haruslah $\underline{1}$ $\underline{2}$ atau $\underline{2}$ $\underline{1}$. Maka perkalian elementer hanyalah $a_{11}a_{22}$ dan $a_{12}a_{21}$

(ii) Karena setiap perkalian elementer mempunyai tiga faktor, yang masing-masing berasal dari baris yang berbeda, maka sebuah hasil perkalian elementer dapat dituliskan didalam bentuk

$$a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}$$

Karena tidak ada dua faktor didalam hasil perkalian tersebut dari kolom yang sama maka nomor kolom tidak mempunyai pengulangan; sebagai konsekuensinya, maka nomor-nomor kolom tersebut harus membentuk sebuah permutasi dari himpunan {1,2,3}. Permutasi yang 3! = 6 ini menghasilkan daftar hasil perkalian elementer yang berikut.

$$\begin{array}{ccc} a_{11}a_{22}a_{33} & a_{11}a_{23}a_{33} & a_{13}a_{21}a_{32} \\ a_{11}a_{23}a_{32} & a_{12}a_{21}a_{31} & a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

Dari keadaan diatas, maka tampak sebuah matriks A yang berukuran $n \times n$ mempunyai $n!$ hasil perkalian elementer. Hasil-hasil perkalian elementer tersebut adalah hasil-hasil perkalian berbentuk $a_{1j1}a_{2j2}\ldots a_{njn}$, dimana $(j1, j2, \ldots, jn)$ adalah sebuah permutasi dari himpunan {1,2,...,n}. Yang kita artikan dengan sebuah hasil perkalian elementer bertanda dari A adalah sebuah hasil perkalian elementer $a_{1j1}a_{2j2}\ldots a_{njn}$, dikalikan dengan +1. Kita menggunakan tanda + (positif) jika $j_1, j_2, \ldots j_n$) adalah sebuah permutasi genap dan tanda - (negatif) jika $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ adalah sebuah permutasi ganjil. Demikian juga jika kita mendaftarkan semua hasil perkalian elementer yang bertanda dari matriks.

(i) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Maka akan diperoleh hasil sebagai berikut :

(i) Hasail perkalian elementer	Permutasi yang diassosiasikan	Genap/Ganjil	Perkalian yang bertanda
$a_{11}a_{22}$	(1,2)	Genap	$a_{11}a_{22}$
$a_{12}a_{21}$	(2,1)	Ganjil	$-a_{11}a_{22}$

(ii) Hasil perkalian elementer	Permutasi yang diassosiasikan	Genap/ganjil	Perkalian yang bertanda
$a_{11}a_{22}a_{33}$	(1,2,3)	Genap	$a_{11}a_{22}a_{33}$
$a_{11}a_{23}a_{32}$	(1,3,2)	Ganjil	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
$a_{12}a_{21}a_{33}$	(2,1,3)	Ganjil	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
$a_{12}a_{23}a_{31}$	(2,3,1)	Genap	$a_{12}a_{23}a_{31}$
$a_{13}a_{21}a_{32}$	(3,1,2)	Genap	$a_{13}a_{21}a_{32}$
$a_{13}a_{22}a_{31}$	(3,2,1)	Ganjil	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

Dengan demikian besaran determinan menjadi :

(i). $\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

(ii). $\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} +$

$a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$

(iii). $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = +a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$

$+a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} + a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$

$+a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} - a_{12}a_{21}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}$

$+a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}$

$+a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}$

$+a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$

Anton (1985) mendefinisikan determinan sebagai berikut: Andaikan *A* suatu matriks kuadrat, maka *fungsi determinan* dinyatakan dengan det *A* didefinisikan sebagai jumlah semua hasil perkalian unsur-unsur yang bertanda (negatif atau positif) dari matriks *A*

Contoh: Untuk matriks A orde 3 x 3 akan diperoleh determinannya sebagai berikut:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 4 & 4 & 9 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, maka $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 4 & 4 & 9 \\ 6 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 1.4.3 - 1.9.5 - 0.4.3 + 0.9.6 + 8.4.5 - 8.4.6 = -65$

Jika $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & -5 & 0 \\ 5 & 4 & 9 & 6 \end{pmatrix}$, maka $a_{11} = 2$, $a_{12} = 7$, $a_{13} = 0$, $a_{14} = 7$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = -2$, $a_{23} = 3$

$a_{24} = 2$, $a_{31} = 4$, $a_{32} = 8$, $a_{33} = -5$, $a_{34} = 0$. $a_{41} = 5$, $a_{42} = 4$, $a_{43} = 9$, dan $a_{44} = 6$, sehingga:

$$
\begin{aligned}
= \; & + a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} \\
& - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} \\
& + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} \\
& - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} \\
= \; & (2.-2.-5.6) - (2.-2.0.9) - (2.3.8.6) + (2.3.0.4) + (2.2.8.9) - (2.2.-5.4) \\
& - (7.1.-5.6) + (7.1.0.9) + (7.3.4.6) - (7.3.0.5) - (7.2.4.9) + (7.2.-5.5) \\
& + (0.1.8.6) - (0.1.0.4) - (0.-2.4.6) + (0.-2.0.5) + (0.2.4.4) - (0.2.8.5) \\
& - (7.1.8.9) + (7.1.-5.4) + (7.-2.4.9) - (7.-2.-5.5) - (7.3.4.4) + (7.3.8.5)
\end{aligned}
$$

= -934 (hasilnya sama dengan contoh di hal. 37)

Untuk menghitung determinan matriks bujur sangkar orde 5 x 5 dapat dikembangkan sendiri dengan menggunakan permutasi yakni 5! = 120. Jadi akan ada 120 buah perkalian bertanda yang harus dibuat, dan demikian seterusnya.

F. Kesimpulan.

Dari kajian di atas tampak bahwa salah satu dari dua cara yang ditawarkan dapat saja digunakan untuk menghitung determinan matriks bujur sangkar tingkat tinggi, walau diakui bahwa cara untuk soal yang sama seperti yang telah ditasmpilkan di atas para pembaca dapat membandingkan cara mana yang lebih mudah dipakai untuk menghitung determinan tersebut. Kedua cara itu memerlukan kehati-hatian yang tinggi untuk menggunakannya. Dalam hal ini tidak ada alasan untuk mengatakan bahwa determinan tingkat tinggi tidak dapat dihitung sepanjang kemauan ada. Yang jelas kedua cara ini akan berguna untuk menghitung determinan itu secara manual. Dengan demikian diharapkan mahasiswa dapat memilih alternatif tersebut untuk menghitung determinan matriks bujur sangkar orde tingkat tinggi tersebut. *Selamat mencoba menggunakan !*

ooo000ooo

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. (1985). Aljabar Linier Elementer. Jakarta : Erlangga

Hoffman, Kenneth & Kunze, Ray. (1984). Linier Algebra. New Delhi Prentice-Hall of India Private Limited.

Russeffendi, E.T. (1989) Dasar-Dasar Matematika Modern dan Komputer. Bandung Tarsito.

Setiadji. (1990). Pengantar Aljabar linier. Yokyakarta: FPMIPA UGM.

ooo000ooo