

Bab I

Pendahuluan

1.1. Latar Belakang

Kata matematika berasal dari kata *mathema* dalam bahasa Yunani yang diartikan sebagai sains, ilmu pengetahuan, atau belajar dan juga *mathematikos* yang diartikan sebagai suka belajar. Matematika menuntut banyak analisa dan perhitungan sehingga banyak orang yang hanya menghafalkan ilmu tersebut daripada memahaminya (Hudojo, 1988).

Secara umum matematika adalah pemeriksaan aksioma yang menegaskan struktur abstrak menggunakan logika simbolik dan notasi matematika. Cabang-cabang utama dalam matematika adalah Aljabar, Geometri, Analisis dan Teori Bilangan (George, 1981).

Aljabar adalah cabang matematika yang mempelajari struktur, hubungan dan kuantitas. Aljabar dibagi lagi menjadi aljabar abstrak, aljabar elementer, aljabar linear. Aljabar abstrak adalah bidang subjek matematika yang mempelajari struktur aljabar, seperti grup, gelanggang (ring), lapangan (fields), modul, ruang vektor (Lang, 2002).

Kajiannya dimulai dengan suatu himpunan tak hampa yang dilengkapi dengan satu komposisi biner (struktur aljabar). Aljabar abstrak ini banyak digunakan dalam kajian lanjut bidang matematika (teori bilangan aljabar, topologi aljabar, geometri aljabar) (Kromodihardjo, 1990).

Topologi adalah kajian pemetaan dari suatu obyek dalam ruang baik dalam struktur global maupun dalam struktur lokal yang lebih halus. Dapat dikatakan bahwa kajian ini merupakan perluasan kajian geometri, dengan mempertimbangkan baik himpunan titik titiknya maupun keluarga himpunan-himpunan tersebut. Pertimbangan yang digunakan tersebut berupa sifat-sifat dalam konteks ruang (yang disebut kemudian dengan ruang topologi) (Eilenberg, 1962).

Dengan mempertimbangkan pendekatan dan arah observasi kajiannya, dapat diklasifikasikan beberapa subbidang kajian topologi, dan bagian yang paling mendasar adalah:

1. Topologi himpunan-titik (*point-set topology*). Di sini dilakukan kajian terhadap sifat-sifat ruang dan pemetaannya, termasuk di dalamnya konsep kekompakan (*compactness*), keterhubungan (*connectedness*), dan ketercacahan (*countability*).
2. Topologi aljabar (*algebraic topology*). Di sini dalam kajiannya menggunakan struktur dalam aljabar abstrak (khususnya grup) yang di dalamnya dikaji ruang topologi dan pemetaan antar ruang. Di dalamnya diobservasi konsep homotopi dan homologi.
3. Topologi geometri (*geometric topology*), yang melakukan kajian dari konsep manifold dan emmbeding-nya (Rotman, 2000).

Kombinasi topologi aljabar dan aljabar abstrak (teori modul) pada akhir abad ke-19 disebut homological aljabar, yang merupakan cabang matematika yang masih relatif baru. Alat yang digunakan dalam matematika, terutama homological aljabar adalah Snake Lemma. Snake Lemma adalah suatu Lemma yang digunakan untuk membangun barisan eksak panjang yang lebih dari dua modul.

Dimana modul adalah perluasan dari ruang vektor yang terbentuk dari suatu grup dan suatu lapangan yang dikaitkan dengan sebuah perkalian skalar. Pada perkembangannya lapangan yang menyusun ruang vektor tersebut mengalami perluasan menjadi suatu ring. Dalam hal ini struktur yang terbentuk dari suatu grup dan suatu ring dengan suatu perkalian skalar dinamakan modul atas ring tersebut.

Apabila diberikan modul M atas ring R serta submodul - submodul di M , maka dapat dibentuk barisan eksak. Beberapa R -modul dan R -homomorfisma modul dapat membentuk suatu barisan dan diagram komutatif. Diagram komutatif adalah kumpulan peta dimana semua komposisi peta mulai dari set yang sama dan berakhir dengan set yang sama memberikan hasil yang sama. Di dalam diagram komutatif bisa terdapat dua atau lebih barisan eksak,

sehingga dibutuhkan snake lemma untuk membangun barisan eksak panjang tersebut. Snake lemma berlaku dalam setiap kategori abelian dan merupakan alat penting dalam homological aljabar dan aplikasi, misalnya dalam algebraic topology (Atiyah, 1969).

Berdasarkan latar belakang di atas maka penulis mengambil judul **”Eksistensi Snake Lemma pada Diagram Modul”**.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang dikemukakan sebelumnya, permasalahan yang diangkat dalam penelitian ini antara lain:

- a. Bagaimana sifat barisan eksak homological aljabar?
- b. Bagaimana eksistensi Snake Lemma pada Modul?

1.3. Batasan Masalah

Penelitian ini difokuskan kepada Eksistensi Snake Lemma pada Diagram Komutatif dalam kajian materi homological aljabar.

- a. Mengkaji lebih dalam mengenai homological aljabar.
- b. Menunjukkan Eksistensi Snake Lemma pada Modul.

1.4. Tujuan Penelitian

Penelitian ini difokuskan kepada Eksistensi Snake Lemma pada Diagram Komutatif dalam kajian materi homological aljabar.

- a. Mengkaji lebih dalam mengenai homological aljabar.
- b. Menunjukkan Eksistensi Snake Lemma pada Modul.

1.5. Manfaat Penelitian

Dengan diadakannya penelitian ini diharapkan dapat memberi manfaat sebagai berikut :

- a. Bagi peneliti menambah wawasan dan pengetahuan dalam mengkaji dan menganalisis materi mengenai homological aljabar.
- b. Bagi mahasiswa diharapkan hasil penelitian ini dapat memberikan kontribusi dalam pengetahuan dan pendidikan mengenai Snake Lemma yang merupakan kajian dari Aljabar Abstrak.