PENERAPAN PERSAMAAN TRANSPOTR BOLITZMANN UNTUK MENENTUKAN POTENSIAL DEBYE

Oleh
Drs.Juniar Hutahaean,M.Si*)

I. Pendahuluan

Persamaan transport Boltzmann banyak digunakan untuk membahas gejala hantaran seperti konduksi listrik, konduksi panas, dan aliran fluida. Pada tulisan ini dibahas salah satu penerapan transport Boltzmann pada potensial Debye atau potensial di sekitar suatu muatan dalam plasma. Misalkan suatu muatan titik Q ditempatkan di titik asal dalam medium plasma dengan banyaknya elektron-elektron sama dengan banyaknya ion-ion. Muatan uji akan menyebabkan partikel-partikel dalam plasma tersusun kembali, dimana partikel-partikel yang sejenis akan tolak menolak dan partikel-partikel yang tidak sejenis akan tarik menarik. Selanjutnya permasalahan yang dibahas dalam tulisan ini adalah

1. Apa yang terjadi apabila distribusi kecepatan elektron-elektron dan ion-ion dalam keadaan tunak (*steady state*) ?
2. Beberapa potensial listrik yang terbentuk di sekitar muatan Q ?

Permasalahan diawali dengan meninjau persamaan transport Boltzmann dengan asumsi bahwa tumbukan antara partikel-partikel sangat sedikit sehingga dapat diabaikan, juga dianggap bahwa hanya medan listrik E yang berperan dalam menimbulkan gaya Lorentz. Dengan pemahaman terhadap persamaan Maxwell, juga pengetahuan kalkulus serta deret tak hinga, diperlukan dalam melakukan melakukan pendekatan-pendekatan dan menyelesaikan permasalahan diferensial parsial sehingga diperoleh solusi potensial yang disebut potensial Debye, yang harganya dengan potensial Coulomb jika muatan Q di dalam ruang vakum.

II. Penurunan persamaan transport Boltzmann

Untuk membentuk suatu persamaan fungsi distribusi f_x kita ambil dN (x,v,t) yaitu jumlah partikel sebagai fungsi posisi (x) dan kecepatan (v) pada saat(t). Apabila tidak ada tumbukan, maka pada waktu singkat Δt berikutnya setiap partikel akan bergerak dari x ke x + v Δt dan kecepatan masing-masning partikel akan berubah dari menjadiv + a Δt; dengan a adalah percepatan oleh gaya eksternal yang bekerja pada partikel di x dengan kecepatan v.

Untuk itu setiap perbedaan antara $dN=(x,v,t)$ dengan $dN=(x+v\,\Delta t,\ v+a\,\Delta t, t+\Delta t)$ adalah disebabkan oleh adanya tumbukan, sehingga kita dapat membentuk:

$$[f_\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{v}\,\Delta t,\mathbf{v}+\mathbf{a}\,\Delta t,t+\Delta t) - f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{v},t)]\, d^3x\, d^3v = \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_c d^3x\, d^3v\, \Delta t \quad (1)$$

dengan $\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_c$ adah laju perubahan f_α karena tumbuhan. Selanjutynya kita ekspansikan suku pertama pada ruas kiri pers. (1) dalam $f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$, sbb:

$$f_\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{v}\,\Delta t,\mathbf{v}+\mathbf{a}\,\Delta t,t+\Delta t) = f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{v},t) + \left(\mathbf{v}_j \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_j} + \mathbf{a}_j \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_j} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)\Delta t + \text{suku-suku orde } (\Delta t)^2 \text{ dst} \quad \ldots (2)$$

sehingga pada limit $\Delta t \to 0$ pers.(1)direduksi menjadi :

$$\mathbf{v}_j \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_j} + \mathbf{a}_j \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_j} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_c \quad ..(3)$$

Pers.(3) ini dikenal dengan persamaantransport Boltzman untuk f_α. Akan tetapi persamaan ini belum lengkap karena suku padaruaskanan yaitu faktor tumbuhan belum dihitung. hal itu merupakan pekerjaanyang sukar, karenamembutuhkan pengetahuan yang cukup tentang dinamika tumbukan partikel-partikel.

Pembahasan berikutnya dibatasi pada konsekuensi persamaan Boltzmann dengan mengabaikan faktor tumbukan, kemudianditerapkan pada muatan yang ditempatkan dalam plasma yang jumlah elektron-elektronnya sama dengan jumlah ion-ion. Jika kita ambil f_α sebagai fungsi distribusi kecepatan elektron dan ion-ion maka pers(3) menjadi

$$\mathbf{v}_j \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_j} + \mathbf{a}_j \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_j} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0 \quad ....(4)$$

dengan a adalah percepatan yang disebabkan gaya eksternal (gaya Lorentz). Jika diasumsikan bahwa hanya medan listrik E yang berperan dalam menimbulkan gaya Lorentz maka percepatan Lorentz menjadi :

$$\mathbf{a} = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\mathbf{E} \quad ...(5)$$

Dengan subtitusi pers. (5) ke pers.(4) diperoleh

$$\mathbf{v}_j \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_j} - \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\mathbf{E}_j \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_j} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0 \quad ...(6)$$

adalah persamaan Boltzmann tanpa Tumbuhan atau sering disebut persamaan Boltzmann-Vlasov (BV), dengan j=1,2,3 dan α=e (untuk elektron) dan i (untuk ion).

Jika distribusi kecepatan elektron dan ion dalam keadaan tunak (steady state) maka suku difrensial terhadap waktu pada pers. (6) dapat diabaikan, kemudian kita terapkan hubungan $E=-\nabla\Phi$ sehingga diperoleh:

$$v_j \frac{\partial f_e}{\partial x_j} + \frac{e}{m_e}\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\frac{\partial f_e}{\partial v_j} = 0 \quad \text{, untuk elektron} \qquad ...(7)$$

$$v_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \frac{e}{m_i}\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\frac{\partial f_i}{\partial v_j} = 0 \quad \text{, untuk ion} \qquad ..(8)$$

Terhadap kedua persamaan yang mengandung f_e, f_i dan Φ diterapkan persamaan. Maxwell yang menyatakan $\nabla . E$ (pers, Poisson) untuk memperoleh :

$$\nabla . E = \frac{\rho_c}{\varepsilon_0} \qquad ...(9)$$

Dalam persamaan ini $\nabla . E = -\nabla^2\Phi$, dan rapat muatan disebabkan oleh elektron-elektron, ion-ion dan rapat muatan uji $Q\delta(x)\delta(y)\delta(z)$, sehingga diperoleh :

$$\nabla^2 \Phi = \frac{e}{\varepsilon_0}\int (f_e - f_i)\, d^3 v - \frac{Q}{\varepsilon_0}\delta(x)\delta(y)\delta(z) \qquad ...(10)$$

III. Persamaan Untuk Φ

Persamaan-persamaan (7),(8), dan (10) memberikan tiga persamaan untuk f_e dan f_i dan Φ. Sebagai langkah awal dalam memecahkan umpulan persamaan difrensial parsial gandeng, sebagaimana kita ketahui bahwa soslui formal untuk f_e, f_i sebagai fungsi dari Φ adalah:

$$f_\alpha = A_\alpha \exp - \left(\frac{m_\alpha v^2/2 + q_\alpha \Phi}{kT}\right) \qquad ..(11)$$

dimana α diganti dengan e untuk elektron dan i untuk ion, dengan $A\alpha$ adalah suatu konstanta. Dapat dibuktikan bahwa solusi ini memenuhi pers. (7) dan (8) dengan perhitungan secara langsung:

$$v_j \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_j} - \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\frac{\partial f_\alpha}{\partial v_j} = \frac{q_\alpha}{kT} v_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(1-1) = 0 \qquad ..(12)$$

Selanjutnya kita evaluasi konstanta A_e dan A_i dengan menganggap jumlah total elektron dan ion masing-masing sama yaitu N, maka:

$$N = \int\int f_\alpha\, d^3 v\, d^3 x$$

$$= A_\alpha \int \exp - \left(v^2/a_\alpha^2\right) d^3 v \int \exp - \left(q_\alpha \Phi/kT\right) d^3 x \quad ; \qquad a_\alpha^2 = \frac{2kT}{m_\alpha}$$

$$= A_\alpha \pi^{3/2} a_\alpha^3 \int \exp - \left(q_\alpha \Phi/kT\right) d^3 x \qquad ...(13)$$

Sehingga konstanta-konstanta A_e dan A_i masing-masing menjadi:

$$A_e = \frac{N}{\pi^{3/2} a_e^3 \int d^3x \exp(\gamma)} \qquad A_i = \frac{N}{\pi^{3/2} a_i^3 \int d^3x \exp(-\gamma)} \qquad ....(14)$$

dengan

$$\gamma = \frac{e\Phi}{kT}$$

Dengan menggunakan fungsi distribusi pers. (11) terhadap pers. (10) sehingga menjadi persamaan yang hanya mengandung Φ.

$$\int f_\alpha \, d^3 v = A_\alpha \exp -(q_\alpha \Phi / kT) \int \exp -(v^2/a_\alpha^2) \, d^3 v$$

$$= \frac{N \exp -(q_\alpha \Phi / kT)}{\int \exp -(q_\alpha \Phi / kT)} \qquad ..(15)$$

Jika kita subtitusi hasil ini ke pers. (10) tanpa melalui perdekatan, menghasilkan:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{Ne}{\varepsilon_0} F(\Phi) - \frac{Q}{\varepsilon_0} \delta(x)\delta(y)\delta(z) \qquad ..(16)$$

dengan

$$F(\Phi) = \frac{\exp(\gamma)}{\int \exp(\gamma)} - \frac{\exp(-\gamma)}{\int \exp(-\gamma)} \qquad ..(17)$$

Jika kita ingin menyelesaikan lebih lanjut dengan teknik analitik, maka harus dilakukan dua pendekatan:

Pertama: Kita asumsikan bahwa $|\gamma| >> 1$, artinya membatasi analisis kita pada daerah-daerah dimana energi potensial $\pm e\Phi$ kecil dibandingkan dengan energi ternal rata-rata 3kT/2 untuk partikel.

Untuk $|\gamma| << 1$, kita dapat ambil $\exp(\pm\gamma) \equiv 1 \pm \gamma$, maka:

$$F(\Phi) \cong \frac{1+\gamma}{\int (1+\gamma) d^3x} - \frac{1-\gamma}{\int (1-\gamma) d^3x} \cong \frac{1+\gamma}{V(1+\xi)} - \frac{1-\gamma}{V(1-\xi)} \cong \frac{2}{V}(\gamma - \xi) \qquad ..(18)$$

dimana: $\int d^3 x = V$ adalah volume total sistem, dan

$$\xi = \frac{1}{V} \int \gamma d^3 x, \; |\xi| << 1 \qquad ..(19)$$

Kedua: Dengan penyederhanaan di atas, ternyata persamaan untuk Φ masih sulit juga untuk diselesaikan secara analitik. Untuk mempermudah perhitungannya , maka diasumsikan:

$$|\zeta| << |\gamma|, \qquad ..(20)$$

sehingga diperoleh:

$$F(\Phi) \cong \frac{2\gamma}{V} = \frac{2e\Phi}{VkT} \qquad ..(21)$$

dengan demikian persamaan difrensial parsial untuk Φ yaitu pers. (11) dapat direduksi menjadi:

$$\nabla^2\Phi - k_D^2\Phi = -\frac{Q}{\varepsilon_0}\delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

dengan: $k_D = \sqrt{2}\lambda_D^{-1}$; $\lambda_D = \left(\frac{kT}{m_e}\right)^{1/2}\omega_e^{-1}$ ..(22)

$$k_D^2 = \frac{2(N/V)e^2}{kT\varepsilon_0} = \frac{2\omega_e^2}{kT/m_e}; \omega_e = \left(\frac{n_e e^2}{m_e\varepsilon_0}\right)^{1/2} \quad ..(23)$$

IV. Potensial Debye

Untuk menyelesaikan masalah ini, kita harus memecahkan perrs. (22) untuk ptensial Φ. Jika sumber potensial (muatan titik Q) adalah simetri bola dan ditempatkan pada titik asal, maka Φ tidak tergantung pada θ dan φ. Dalam koordinat bola, jika Φ tergantung hanya pada jarak radial R, maka:

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{R}\frac{d^2(R\Phi)}{dR^2} \quad ...(24)$$

Untuk $R \neq 0$, pers.(22) direduksi menjadi:

$$\frac{1}{R}\frac{d^2(R\Phi)}{dR^2} - k_D^2\Phi = 0 \quad ..(25)$$

$$\frac{d^2(R\Phi)}{dR^2} - k_D^2(R\Phi) = 0 \quad ..(26)$$

adalah persamaan difrensial biasa untuk Φ dengan solusi:

$$R\Phi = A\exp(k_D R) + B\exp(-k_D R) \quad ..(27)$$

Jika kita bekerja dalam sistim tak terbatas (atau sangat besar), maka potensial yang disebabkan oleh muatan Q pada titik asal haruslah menuju nol untuk R besar. Sehingga konstanta A haruslah nol, sehingga diperoleh:

$$\Phi = \frac{B\exp(-k_D R)}{R}. \quad ..(28)$$

onstanta B siperoleh dengan mengintegrasi keseluruhan pers. (22) pada sebuah bola yang berjari-jari berpusat di titik asal dan diambil limit $r \to 0$:

$$\int_{R\leq r}\nabla^2\Phi dV - \int_{R\leq r}k_D^2\Phi dV = -\frac{Q}{\varepsilon_0}\int_{R\leq r}\delta(x)\delta(y)\delta(z)dV \quad ..(29)$$

Untuk suku pertama pada ruas kiri diterapkan teorema Gauss sbb:

$$\int_{R\leq r}\nabla^2\Phi dV = \int_{R\leq r}\nabla\Phi \cdot d\vec{s} \quad ...(30)$$

Pada permukaan bola dengan jari-jari r,

$$d\vec{s} = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \vec{a}_r \qquad \ldots(31)$$

sementara

$$\nabla\Phi = \vec{a}_r \left(\frac{\partial\Phi}{\partial R}\right) = -\vec{a}_r \frac{B\exp(-k_D r)}{r^2}(k_D r + 1) \qquad \ldots(32)$$

Pernyataan diterapkan ini pada pers. (30) dan diambil limit r→0, untuk suku pertama diperoleh:

$$\int_{RSr} \nabla^2\Phi dV = \lim_{r\to 0} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} B[\exp(-k_D r)](k_D r + 1)\sin\theta d\theta d\varphi = -4\pi B \qquad \ldots(33)$$

Untuk suku ke dua pada ruas kiri diambil $dV = R^2 \sin\theta dR d\theta d\varphi$

$$\int_{RSr} k_D^2 \Phi dV = \lim_{r\to 0} - k_D^2 B \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} R\sin\theta \exp(-k_D R) dR d\theta d\varphi$$

$$= \lim_{r\to 0} - 4\pi k_D^2 B \int_0^{r} \exp(-k_D R) R\, dR = 0 \qquad \ldots(34)$$

Sedangkan untuk ruas kanan, integrasi δ menghasilkan satu, sehingga seluruh persamaan direduksi menjadi:

$$-4\pi B = \frac{Q}{\varepsilon_0}, atau: B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \qquad \ldots(35)$$

Subtitusi hasil ini pada pers. (28), akhirnya diperoleh potensial yang ditimbulkan oleh muatan Q yang ditempatkan pada titik asal, yaitu:

$$\Phi = \frac{Q\exp(-k_D R)}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad \ldots(36)$$

Potensial inilah yang dinamakan Potensial Debye.

V. Interpretasi Potensial Debye

Jika muatan titik Q ditempatkan di dalam ruang vakum, ω_e (demikian juga k_D) akan menjadi nol, sehingga potensial akan direduksi menjadi potensial Coulomb, $\Phi_c = Q/4\pi\varepsilon_0$. Selanjutnya kita dapat nyatakan potensial Debye menjadi:

$$\Phi = \Phi_c \exp(-k_D R) \qquad \ldots(37)$$

yang menunjukkan bahwa Φ jauh lebih kecil dari potensial Coulomb apabila R melebihi λ_D (Debye length). Sehingga secara kasar dikatakan bahwa suatu paerikel dalam plasma (steady state) berinteraksi hanya dengan partikel pada jarak lebih kecil dari λ_D (Debye length). Partikel-partikel demikian dikatakan terletak disekitar partikel bermuatan di dalam bola Debye.

Untuk melengkapi pembicaraan kita mengenai masalah ini, kita sekarang dapat uji kembali tentang pendekatan yang digunakan untuk membuktikan potensial Debye

1. $|\gamma| = |e\Phi/kT| << 1$, dan

2. $|\xi| = |V^{-1}\int \gamma d^3x| << |\gamma|$

Untuk mencek pendekatan pertama, dengan memperhatikan Φ pada pers. (36) dan Q=e

$$\gamma = \frac{e^2 \exp(-k_D R)}{4\pi\varepsilon_o RkT} = \frac{\lambda_D \exp(-k_D R)}{3RN_D} \qquad \ldots(38)$$

dimana: $N_D = \frac{4}{3}\pi\lambda_D^3 n_e = 1{,}37.10^6\, T^{3/2} / n_e^{1/2}$,

dengan T dalam Kelvin dan n dalam partikel per meter kubik, yaitu jumlah elektron–elektron didalam bola Debye. Keadaan yang sebenarnya untuk semua plasma bahwa N_D sangat besar, dengan ini jelaslah bahwa $|\gamma| << 1$ (kecuali jika R lebih kecil dari λ_D/N_D). akan tetapi, jika N_D tidak besar, maka tidak dapat memperoleh potensial bentuk Debye di sekitar muatan

Untuk menguji pendekatan ke dua, dapat ditunjukkan dengan perhitungan langsung yaitu untuk volume sebuah bola dengan radius R_o dengan asumsi bahwa Φ seperti yang diberikan persamaan (36), maka akan diperoleh:

$$\frac{\xi}{\gamma} = \frac{1{,}5R\lambda_D^2}{R_o}\exp(k_D R)[1-(1+k_D R_o)\exp(-k_D R_o)] \qquad \ldots(39)$$

Oleh karena itu ζ dapat diabaikan terhadap γ untuk jarak $\leq \lambda_D$ asalkan volume plasma jauh labih besar dari nola Debye, yaitu $R_o^3 >> \lambda_D^3$. Untuk jarak yang lebih besar pengabaian ζ tidak dibenarkan, tetapi untuk jarak yang sedemikian itu harga Φ sudah cukup kecil sehingga dapat diabaikan oleh karenanya kesalahan tidak begitu berarti. Dari uraian di atas disimpulkan bahwa potensial Debye sesuai dengan pendekatan-pendekatan yang digunakan asalkan pembahasannya kita batasi pada jarak antara λ_D/N sampai λ_D, dan volume plasma harus lebih besar dibandingkan dengan volume bola Debye.

oooOOOooo

DAFTAR PUSTAKA

Jacson,J.D., 1990, Classical Electrodynsmics. 2nd ed, Wiley, Singapore

Huang, K, 1987, Statistical Mechanies, 2nd ed, Wiley, USA.

Philips, M., and Panofsky, W.K.H., 1962, Classical Electricity and Magnetism, Addison Wesley, Tokyo.

Tanembaum, S.B., 1967, Plasma Physics, MeGraw-Hill, USA.

Zemansky, F.W., and Dittman, R.H., 1986, Kalor dan Termodinamika, Terjemahan The Houw Liong, ITB Bandung.

ooo000ooo